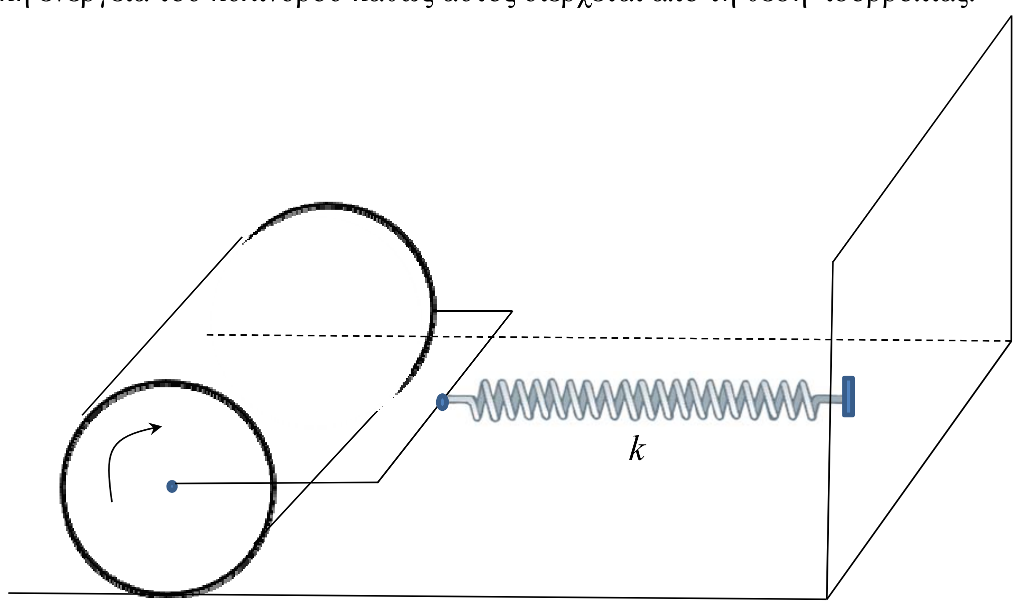
ΦΥΕ 14
5η ΕΡΓΑΣΙΑ
Παράδοση 19-05-08
(Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες)

Άσκηση 1 :

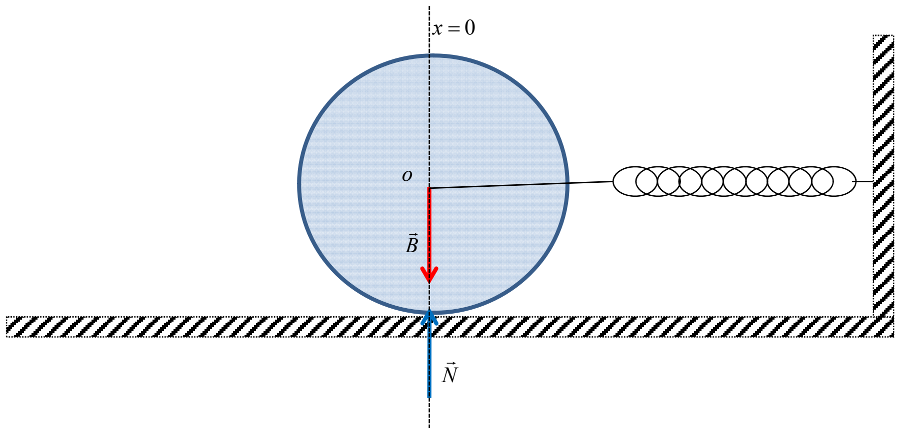
Συμπαγής κύλινδρος μάζας M συνδεδεμένος σε ελατήριο σταθεράς $k = 3.0\ N/m$ και αμελητέας μάζας, κυλίεται , χωρίς να σύρεται, κατά μήκος μιας οριζόντιας επιφάνειας όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

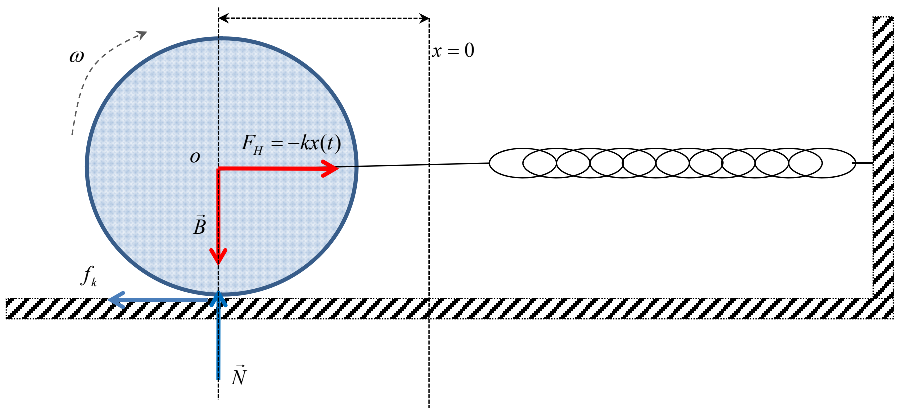
Α) Δείξτε ότι αν ο κύλινδρος μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας εκτελεί απλή αρμονική κίνηση και υπολογίστε την περίοδο

Β) Αν το σύστημα αφεθεί σε κατάσταση ηρεμίας από μία θέση που απέχει 0.25 m από τη θέση ισορροπίας, υπολογίστε την μεταφορική κινητική ενέργεια και την περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου καθώς αυτός διέρχεται από τη θέση ισορροπίας.



Λύση





Α) Ας υποθέσουμε ότι η αρχική μετατόπιση είναι αριστερά της θέσης ισορροπίας, προς αρνητικές μετατοπίσεις. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου παίρνουμε

$$\Sigma F_x = M\gamma \Rightarrow -kx(t) - f = M\gamma \qquad (1)$$

$$\Sigma\tau = I a \Rightarrow fR = Ia \qquad (2)$$

Όπου $-kx(t)$ η δύναμη του ελατηρίου, f είναι η δύναμη τριβής που ασκείται στον κύλινδρο από την επιφάνεια, γ η μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας και α η περιστροφική επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Απαλείφοντας τη δύναμη f από τις εξισώσεις (1),(2) και αντικαθιστώντας

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \ , \quad \alpha = \frac{\gamma}{R}$$

παίρνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\frac{3}{2}M\gamma + kx(t) = 0$$

Γράφοντας την μεταφορική επιτάχυνση στη μορφή $\gamma = d^2x(t)/dt^2$ η εξίσωση αυτή γίνεται

$$\frac{3}{2}M\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}+kx(t)=0 \tag{3}$$

Η εξίσωση (3) όμως μας λέει ότι το κέντρο μάζας εκτελεί αρμονική κίνηση με

$$\omega_0^2=\frac{2k}{3M},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}} \tag{4}$$

Β) Σύμφωνα με την (3) οι εξισώσεις θέσης και μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας είναι οι ακόλουθες

$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$, $\upsilon(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$

Για $t=0$ έχουμε $x(0)=-0.25$ m, $\upsilon(0)=0$. Από αυτές τις αρχικές συνθήκες προκύπτει ότι $A=-0.25$ m, $\varphi=0$. Όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου διέρχεται από τη θέση ισορροπίας θα έχει παρέλθει χρόνος t=T/4 οπότε στο σημείο αυτό η ταχύτητα θα έχει μέτρο $\upsilon=\mathrm{A}\omega_0$ και η μεταφορική κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας θα είναι

$$E_1=\frac{1}{2}M\upsilon^2=\frac{1}{2}MA^2\frac{2}{3}\frac{k}{M}=\frac{A^2}{3}k=\frac{\left(0.25m\right)^2}{3}\times 3\frac{N}{m}=6.25\times10^{-2}\ joule \tag{5}$$

Η περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι

$$E_2=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{A^2\omega_0^2}{R^2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{A^2}{R^2}\frac{2k}{3M}\right)=\frac{1}{2}\frac{A^2k}{3}=\frac{E_1}{2}=3.12\times10^{-2}\ joule \tag{6}$$

Μην κάνετε σύγχυση ανάμεσα στη γωνιακή ταχύτητα ω λόγω περιστροφής του κυλίνδρου και την γωνιακή συχνότητα ω_0 της ταλάντωσης του κέντρου μάζας.

Β) Ενεργειακή Θεώρηση

Θεωρούμε το ενεργειακό ισοζύγιο για τις δύο καταστάσεις που αφορούν το σύστημα

1. Στην αρχική θέση όπου η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι Α=0.25m και το σύστημα σε κατάσταση ηρεμίας (μηδενικές αρχικές ταχύτητες) οπότε το σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $(1/2)kA^2$
2. Στη (διέλευση από τη) θέση ισορροπίας όπου το ελατήριο έχει μηδενική επιμήκυνση και το κέντρο μάζας του κυλίνδρου μεταφορική ταχύτητα υ και γωνιακή ταχύτητα ω. Το σύστημα έχει μεταφορική κινητική ενέργεια $E_1=(1/2)M\upsilon^2$ και περιστροφική κινητική ενέργεια $E_2=(1/2)I\omega^2$

Οπότε

$$\frac{1}{2}kA^2=E_1+E_2 \tag{7}$$

Αλλά

$$E_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M\upsilon^2\right) = \frac{1}{2}E_1 \qquad (8)$$

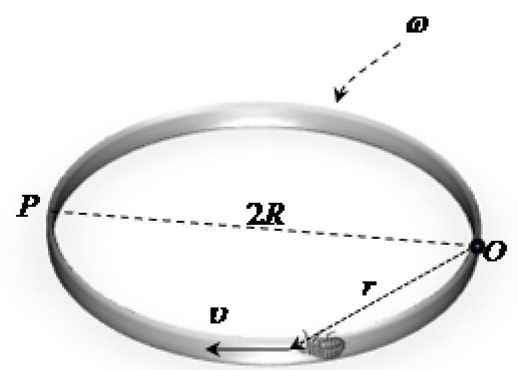
Με αντικατάσταση της (8) στην (7) καταλήγουμε πάλι στην (5)

$$E_1 = \frac{1}{3}kA^2$$

Ασκηση 2 :

Θεωρείστε κυκλική στεφάνη ακτίνας R και μάζας M σε ηρεμία πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Η στεφάνη μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν νοητό άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο της περιφέρειας της και είναι κάθετος στο επίπεδο. Σκαθάρι μάζας m το οποίο αρχικά βρίσκεται ακίνητο στο σημείο Ο αρχίζει να κινείται στην περιφέρεια της στεφάνης με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ ως προς τη στεφάνη όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα ω της στεφάνης τη στιγμή που το σκαθάρι διέρχεται το αντιδιαμετρικό σημείο του Ο.

(Η ροπή αδρανείας κυκλικής στεφάνης ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από το κέντρο της είναι $I_{CM} = MR^2$)



Λύση

Αρχικά το σύστημα στεφάνη + σκαθάρι έχει μηδενική στροφορμή ως προς το σημείο Ο. Καθώς το σκαθάρι αρχίζει να απομακρύνεται από την αρχική του θέση αποκτά στροφορμή ως προς το Ο. Για να διατηρηθεί η ολική στροφορμή του συστήματος μηδενική θα πρέπει η στεφάνη να περιστρέφεται γύρω από το Ο σε αντίθετη διεύθυνση από την κίνηση του σκαθαριού .

Έστω ότι τη στιγμή που το σκαθάρι βρίσκεται στο αντιδιαμετρικό σημείο P του Ο η στεφάνη έχει γωνιακή ταχύτητα ω. Τη στιγμή αυτή το P θα έχει μεταφορική ταχύτητα $-\omega 2R$ και το μέτρο της ολικής ταχύτητας του σκαθαριού ως προς το έδαφος στο σημείο P θα είναι

$$\upsilon_P = \upsilon - 2\omega R \qquad (1)$$

Το μέτρο της στροφορμής του σκαθαριού στη θέση P γύρω από το O είναι

$L_{σκαθαριού} = 2mR(\upsilon - 2\omega R)$ (2)

(Σε τυχαία θέση A το σκαθάρι έχει δύο συνιστώσες στροφορμής. Η μία οφείλεται στην κίνησή του με ταχύτητα υ πάνω στην περιφέρεια της στεφάνης και η δεύτερη οφείλεται στην περιστροφική κίνηση του σημείου A. Στο σημείο P όμως η απόσταση από το σημείο περιστροφής είναι $2R$ και οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας σχηματίζουν γωνία $\theta = \pi / 2$ με το διάνυσμα θέσης. Άρα στο σημείο αυτό $L = 2m\upsilon_P R$)

Το μέτρο της στροφορμής της στεφάνης γύρω από το O είναι :

$L_{στεφάνης} = I_O \omega$ (3)

Όπου I_O είναι η ροπή αδρανείας της στεφάνης ως προς τον άξονα περιστροφής.

Προκειμένου να υπολογίσουμε το I_O χρησιμοποιούμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων οπότε παίρνουμε

$I_o = I_{CM} + Md^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$ (4)

Όπου $d = R$ είναι η απόσταση του O από το κέντρο του κύκλου. Λόγω της (4) η (3) δίνει

$L_{στεφάνης} = 2MR^2\omega$ (5)

Επειδή το άθροισμα των στροφορμών θα πρέπει να είναι μηδενικό έχουμε

$L_{σκαθαριου} - L_{στεφάνης} = 0$ (6)

Αντικαθιστώντας στην (6) τις τιμές των δύο στροφορμών από τις (5), (2) παίρνουμε

$2mR(\upsilon - 2\omega R) - 2MR^2\omega = 0$ (7)

Λύνοντας ως προς ω βρίσκουμε

$$\omega = \frac{m\upsilon}{MR + 2mR}$$

Άσκηση 3 :

Μικρό σωμάτιο μάζας m είναι δεμένο στην άκρη ενός αβαρούς νήματος το οποίο περνάει μέσα από έναν σωλήνα και υποχρεώνεται να κινείται κυκλικά σε οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα υ_0 σε ακτίνα r_0. Τραβώντας το νήμα από την άλλη άκρη του σωλήνα το σωμάτιο υποχρεώνεται να κινηθεί σε τροχιά μικρότερης ακτίνας r_f.

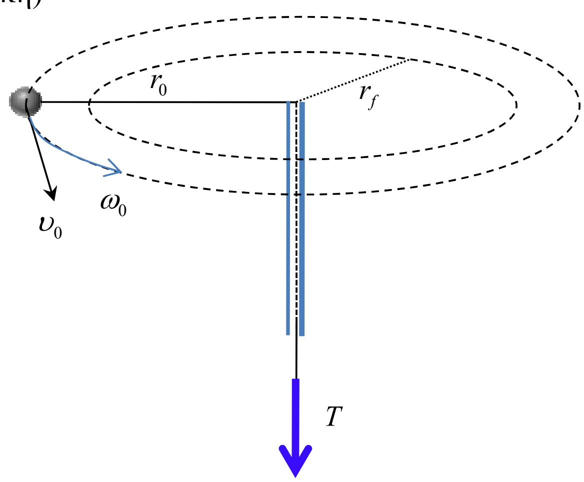
α) Βρείτε την ταχύτητα του σωματίου στη νέα θέση

β) Υπολογίστε την τάση του νήματος T στη νέα θέση

γ) Αν $m = 0.25\ kg$, $r_0 = 80\ cm$, $\upsilon_0 = 400\ cm/s$ και το νήμα σπάει όταν $T = 30\ N$ υπολογίστε την ακτίνα r_f τη στιγμή που σπάει το νήμα.

δ) Υπολογίστε το έργο που καταναλίσκει η T προκειμένου να μετατοπιστεί το σωμάτιο από την αρχική στην νέα θέση και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματίου

(Θεωρείστε ότι οι μεταβολές γίνονται κατά τέτοιο τρόπο που η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική)



Λύση :

Η τάση T του νήματος μεταφέρεται ως ακτινική δύναμη στο σωμάτιο. Επειδή αυτή διέρχεται από το κέντρο περιστροφής η ροπή που ασκεί είναι μηδενική άρα η στροφορμή στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής διατηρείται.

α) Από τη διατήρηση της στροφορμής έχουμε για την αρχική και τελική θέση $L_0 = L_f$ ή

$$m\upsilon_0 r_0 = m\upsilon_f r_f \qquad (1)$$

(Επειδή στη κυκλική κίνηση τα διάνυσμα τη θέσης είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας θα έχουμε $\vec{r} \times \vec{p} = rm\upsilon \sin(\pi/2) = rm\upsilon$*)*

Από την (1) βρίσκουμε ότι

$$\upsilon_f = \frac{r_0}{r_f}\upsilon_0 \qquad (2)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι στην περίπτωση που η στροφορμή διατηρείται καθώς μικραίνει η ακτίνα περιστροφής η ταχύτητα μεγαλώνει.

β) Η τάση του νήματος λειτουργεί ως κεντρομόλος άρα σε κάθε θέση του σώματος με ταχύτητα υ και ακτίνα r είναι

$$T = m\frac{\upsilon^2}{r} \qquad (3)$$

Εφαρμόζοντας την (3) για την τελική θέση και κάνοντας χρήση της (2) παίρνουμε

$$T = m\frac{\upsilon_f^2}{r_f} = \frac{mr_0^2\upsilon_0^2}{r_f^3} = \frac{L^2}{mr_f^3} \qquad (4)$$

γ) Λύνοντας ως προς r_f την (4) και αντικαθιστώντας τις τιμές που δίνονται στην εκφώνηση βρίσκουμε

$$r_f^3 = \frac{mr_0^2\upsilon_0^2}{T} = \frac{(0.25\ kg)(0.80\ m)^2(4.0\ m/s)^2}{30.00\ N} = 0.09 \Rightarrow r_f = 45\ cm$$

δ) Επειδή η μεταβολή είναι κατά μήκος της ακτίνας, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η T και επειδή τα διανύσματα $\vec{T}$ και $d\vec{r}$ είναι αντιπαράλληλα απαιτείται να καταναλώσουμε έργο το οποίο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του σωματίου

$$W = -\int_{r_0}^{r_f} Tdr = m\upsilon_0^2 r_0^2 \int_{r_f}^{r_0} \frac{dr}{r^3} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\left(\frac{r_0^2}{r_f^2} - 1\right) \qquad (5)$$

Υπολογίζουμε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματίου από τη σχέση

$$K = \frac{L^2}{2I} \qquad (6)$$

Για την αρχική θέση του σωματίου ισχύει $K_0 = L^2/2(mr_0^2)$ και για την τελική θέση $K_f = L^2/2(mr_f^2)$ οπότε

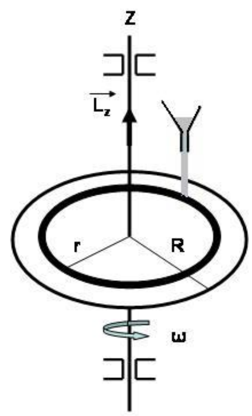
$$\Delta K = K_f - K_0 = ... = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\left(\frac{r_0^2}{r_f^2} - 1\right) \qquad (7)$$

Που ισούται με το συνολικό έργο που καταναλώσαμε.

Άσκηση 4:

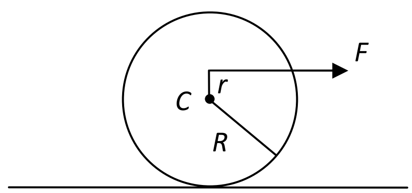
Α:

Ο δίσκος του σχήματος έχει μάζα m_0, ακτίνα R, σε ακτίνα $r < R$ φέρει κυκλικό αυλάκι μικρού εύρους και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ρίχνουμε με ένα χωνί άμμο στο αυλάκι του δίσκου με σταθερό ρυθμό $\lambda = dm/dt$. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου σαν συνάρτηση του χρόνου.



Β:

Ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στον κύλινδρο εφαρμόζεται οριζόντια δύναμη F προς τα δεξιά και σε απόσταση r πάνω από το κέντρο μάζας του C, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε τη δύναμη της τριβής για να κυλίσει ο κύλινδρος χωρίς ολίσθηση πάνω στην επιφάνεια. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από το κέντρο μάζας του είναι $I_c = \frac{1}{2}MR^2$.



Λύση:

Α:

Θεωρούμε την άμμο και τον περιστρεφόμενο δίσκο ως ένα σύστημα. Η ροπή της δύναμης της βαρύτητας που ασκείται πάνω στην άμμο (εξωτερική, μη μηδενική δύναμη του συστήματος) δεν έχει συνιστώσα κατά τη διεύθυνση του άξονα z (βλ. σχήμα) $M_z = 0$. Επομένως:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = 0 \text{ ή } L_z = \text{σταθ.} \qquad (1)$$

Επειδή $L_z = I_z \cdot \omega$ έπεται ότι $dI_z \cdot \omega + d\omega \cdot I_z = 0$, όπου I_z η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα z.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση:

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega}=-\int_{I_{z,0}}^{I_z}\frac{dI_z}{I_z}\Rightarrow \omega=\omega_0\cdot\frac{I_{z,0}}{I_z} \qquad (2)$$

όπου $I_{z,0}=\frac{1}{2}m_0R^2$ (3) είναι η αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος, δηλαδή η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα z.

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι πρέπει να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος τη χρονική στιγμή t. Αυτή είναι:

$$I_z=I_{z,0}+\lambda tr^2=\frac{1}{2}m_0R^2+\lambda tr^2 \qquad (3)$$

όπου λt είναι η αύξηση της μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t. Πράγματι επειδή ο ρυθμός λ με τον οποίο πέφτει η άμμος στο αυλάκι του δίσκου είναι: $\lambda=dm/dt$, έπεται:

$$\int_{m_0}^{m}dm=\lambda\cdot\int_0^t dt\Rightarrow m=m_0+\lambda\cdot t \qquad (4)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2) και (3), υπολογίζεται από τη σχέση (2) ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$\omega_0\cdot\frac{I_{z,0}}{I_z}=\omega_0\cdot\frac{\frac{1}{2}m_0R^2}{\frac{1}{2}m_0R^2+\lambda tr^2}=\omega_0\cdot\frac{1}{1+\frac{\lambda tr^2}{\frac{1}{2}m_0R^2}}=\omega_0\cdot\frac{1}{1+\frac{2\lambda}{m_0}\left(\frac{r}{R}\right)^2 t}$$

B:

Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας ισχύει:

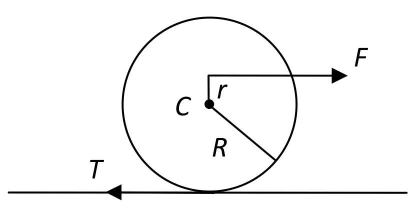
$$\Sigma F_x=Ma_c\Rightarrow F-T=Ma_c\Rightarrow a_c=\frac{F-T}{M} \qquad (1)$$

όπου a_c είναι η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma\tau_c=\mathrm{I}_c\alpha_\gamma\Rightarrow rF+RT=\mathrm{I}_c\alpha_\gamma \qquad (2)$$

όπου α_γ είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.



Επίσης, λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει:

$$\upsilon_c=\omega R\Rightarrow a_c=\alpha_\gamma R\Rightarrow \alpha_\gamma=\frac{a_c}{R} \qquad (3)$$

Με αντικατάσταση της (3) στην (1) προκύπτει:

$$\alpha_\gamma = \frac{F-T}{MR} \qquad (4)$$

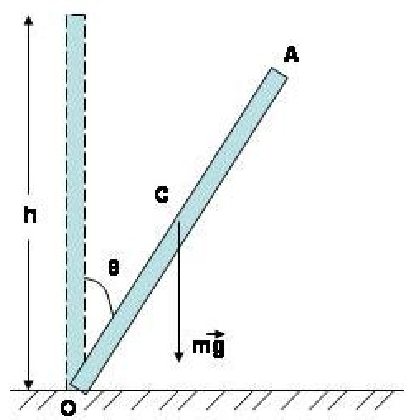
Τέλος, με αντικατάσταση της (4) στη (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ προκύπτει:

$$rF + RT = \frac{MR^2}{2}\frac{F-T}{MR} \Rightarrow rF + RT = \frac{R}{2}(F-T) \Rightarrow 3RT = RF - 2rF \Rightarrow T = \frac{F(R-2r)}{3R}$$

Άσκηση 5:

Μια ψηλή καμινάδα ύψους *h* σπάει κοντά στη βάση της και πέφτει όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκφράστε:

α) την ακτινική και β) την εφαπτομενική γραμμική επιτάχυνση της κορυφής της καμινάδας συναρτήσει της γωνίας θ που σχηματίζει η καμινάδα με την κατακόρυφο. Με τι ταχύτητα φτάνει το πάνω μέρος της καμινάδας στο οριζόντιο έδαφος; Μπορεί η προκύπτουσα επιτάχυνση να υπερβεί την επιτάχυνση της βαρύτητας;



Λύση

Η καμινάδα υπό την επίδραση της ροπής του βάρους της περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα O που διέρχεται από τη βάση της. Η εξίσωση κίνησής της θα είναι:

$$mg\frac{h}{2}\sin\theta = I_O\frac{d\omega}{dt} \qquad (1)$$

όπου I_O η ροπή αδράνειας της καμινάδας ως προς τον άξονα O.

Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner η ροπή αδράνειας της καμινάδας ως προς τον άξονα O είναι:

$$I_O = I_C + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Όπου I_C η ροπή αδράνειας της καμινάδας ως προς άξονα C παράλληλο του O που διέρχεται από το κέντρο μάζας της.

$$I_O = \frac{1}{12}mh^2 + m\frac{h^2}{4} \quad \text{ή} \quad I_O = \frac{1}{3}mh^2$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στην εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$mg\frac{h}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}mh^2\frac{d\omega}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g\sin\theta}{2h} \qquad (3)$$

Αλλά:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{d\omega}{dt} = \omega\cdot\frac{d\omega}{d\theta}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3):

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \frac{3g}{2h}\int_0^\theta \sin\theta d\theta \quad \text{ή} \quad \frac{\omega^2}{2} = \frac{3g}{2h}\cdot(1-\cos\theta)$$

ή

$$\omega = \left[\frac{3g}{h}\cdot(1-\cos\theta)\right]^{1/2} \qquad (4)$$

Επειδή η ω είναι μεταβαλλόμενη εκτός από την ακτινική θα έχουμε και εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης

Η γραμμική ταχύτητα του άνω άκρου A της καμινάδας είναι:

$$\upsilon_A = \omega\cdot h = h\cdot\left[\frac{3g}{h}\cdot(1-\cos\theta)\right]^{1/2}$$

Η εφαπτομενική συνιστώσα της γραμμικής επιτάχυνσης του άκρου της καμινάδας είναι:

$$a_T = \frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{1}{2}h\cdot\left[\frac{3g}{h}\cdot(1-\cos\theta)\right]^{-1/2}\cdot\frac{3g}{h}\cdot\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

ή

$$a_T = \frac{3}{2}g\sin\theta \qquad (5)$$

Η ακτινική συνιστώσα της γραμμικής επιτάχυνσης είναι:

$$a_n = \frac{\upsilon_A^2}{h} = 3g(1-\cos\theta) \qquad (6)$$

Η ταχύτητα με την οποία φθάνει στο έδαφος το πάνω μέρος της καμινάδας είναι:

$\upsilon_T = \omega_T\cdot h$, όπου η ω_T προκύπτει από τη σχέση (4) για $\theta = \pi/2$: $\omega_T = \left(\frac{3g}{h}\right)^{1/2}$

Συνεπώς τη στιγμή που το άκρο της καμινάδας αγγίζει το έδαφος θα έχει τελική ταχύτητα

$$\upsilon_T = \omega_T\cdot h = (3gh)^{1/2}$$

Από τις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει ότι:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{9}{4} g^2 \sin^2\theta + 9g^2(1-\cos\theta)^2}$$

ή

$$a = \frac{3g}{2}\sqrt{\sin^2\theta + 4(1-\cos\theta)^2} \qquad (7)$$

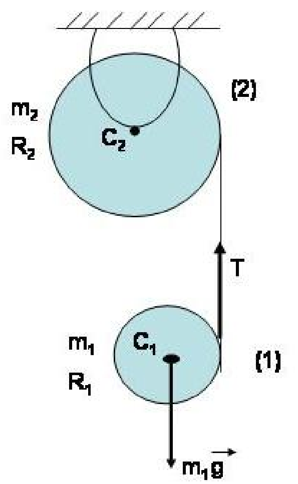
Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι αυξανομένης της γωνίας θ το μέτρο α της επιτάχυνσης αυξάνεται και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της $a_{\max} = \frac{3\sqrt{5}g}{2}$ για $\theta = \pi/2$, δηλαδή $a_{\max} > g$.

Άσκηση 6:

Οι δύο τροχαλίες του σχήματος έχουν ακτίνες R_1, R_2 και μάζες m_1 και $m2$ αντίστοιχα. Ένα σχοινί είναι τυλιγμένο γύρω από τις δύο τροχαλίες και καθώς αυτό ξετυλίγεται ταυτόχρονα από αυτές, η τροχαλία που βρίσκεται χαμηλότερα πέφτει. Να υπολογιστούν:

α) η τάση του σχοινιού και

β) η γωνιακή επιτάχυνση κάθε τροχαλίας γύρω από το κέντρο μάζας της.



Λύση:

Η τροχαλία (1) αφ' ενός μεν μεταφέρεται κατακόρυφα υπό την επίδραση της συνισταμένης των δυνάμεων του βάρους της και της τάσης T του σχοινιού, αφ' ετέρου δε περιστρέφεται γύρω από τον άξονα C_1 λόγω της ροπής της τάσης T. Επομένως οι εξισώσεις κίνησής της είναι:

$$m_1 g - T = m_1 a \qquad (1)$$

και

$$TR_1 = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \qquad (2)$$

Η τροχαλία (2) εκτελεί μόνο περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα C_2 που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Συνεπώς:

$$TR_2 = I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \tag{3}$$

Όπου στις παραπάνω εξισώσεις α είναι η γραμμική επιτάχυνση της τροχαλίας (1) και I_1, I_2 είναι οι ροπές αδράνειας των τροχαλιών (1) και (2) αντίστοιχα ως προς τους οριζόντιους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους

Όταν η τροχαλία (1) περιστρέφεται κατά γωνία $d\theta_1$ σε χρόνο dt, κατεβαίνει ταυτόχρονα κατά $dh_1 = R_1 \cdot d\theta_1$.

Όταν η τροχαλία (2) περιστρέφεται κατά γωνία $d\theta_2$ σε χρόνο dt, το σχοινί αλλά ταυτόχρονα και η τροχαλία (1) κατεβαίνει κατά: $dh_2 = R_2 \cdot d\theta_2$

Άρα η τροχαλία (1) κατεβαίνει σε χρόνο dt συνολικά κατά:

$$dh = dh_1 + dh_2 = R_1 \cdot d\theta_1 + R_2 \cdot d\theta_2 \tag{4}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση δύο φορές ως προς το χρόνο:

$$a = R_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} + R_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} \tag{5}$$

Η εύρεση των μεγεθών T, $\frac{d\omega_1}{dt}$ και $\frac{d\omega_2}{dt}$ απαιτεί τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (1), (2),(3) και (5).Προς τούτο, λύνουμε τις εξισώσεις (2) και (3) ως προς $\frac{d\omega_1}{dt}$ και $\frac{d\omega_2}{dt}$ αντίστοιχα και αντικαθιστούμε στην (5), οπότε παίρνουμε:

$$a = \frac{TR_1^2}{I_1} + \frac{TR_2^2}{I_2} \tag{6}$$

Επίσης εκ των εξισώσεων (1) και (6) είναι:

$$g - \frac{T}{m_1} = T\left(\frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2}\right) \text{ ή } T\left(\frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2} + \frac{1}{m_1}\right) = g$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις τιμές των I_1, και I_2 βρίσκεται ότι:

$$T = \frac{g}{\frac{3}{m_1} + \frac{2}{m_2}} \tag{7}$$

Αντικατάσταση της Τ στις εξισώσεις (2) και (3) δίνει:

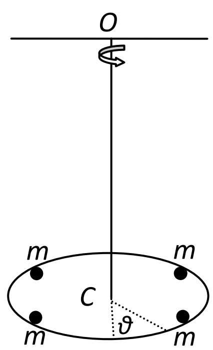
$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{2g}{R_1\left(3 + 2\frac{m_1}{m_2}\right)} \quad \text{και} \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{2g}{R_2\left(2 + 3\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

Άσκηση 7:

Α:

Ένα στροφικό εκκρεμές αποτελείται από σύρμα με συντελεστή στρέψης D. Το ένα άκρο του έχει στερεωθεί σε ακλόνητο σημείο O και το άλλο συγκρατεί ομογενή δίσκο μάζας M και 4 σημειακές μάζες m που είναι τοποθετημένες συμμετρικά στη περιφέρεια του δίσκου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο δίσκος εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του στρεφόμενος κατά γωνία θ, υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης του συστήματος.
Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι $I_c = \frac{1}{2}MR^2$.

Υπόδειξη: Όταν το σύστημα περιστραφεί κατά γωνία θ, τότε το σύρμα ασκεί στο δίσκο ροπή στρέψης: $\tau = -D\theta$, όπου D είναι μία θετική σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες του σύρματος και λέγεται συντελεστής στρέψης του σύρματος. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η ροπή έχει αντίθετη φορά από τη γωνιακή απομάκρυνση θ.



Β:

Συμπαγής σφαίρα μάζας *m=2.0 kg* περιορίζεται στο να περιστρέφεται ως προς κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Ένα νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από τον "ισημερινό" της σφαίρας, περνάει από μια τροχαλία αμελητέας μάζας και στην ελεύθερη άκρη του είναι τοποθετημένο ένα σώμα μάζας *M=0.8 kg* το οποίο μπορεί να εκτελέσει ελεύθερη πτώση με την επίδραση της βαρύτητας. Να γραφεί η ενέργεια του συστήματος ως συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας. Αν η ακτίνα της σφαίρας είναι *r=0.3 m* και το διάστημα της ελεύθερης πτώσης είναι *h=1.5 m*, να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος *M* και η στροφορμή της σφαίρας ($g = 9.81\ m/s^2$).

Λύση

Α:

Από το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης:

$$\Sigma\tau_c = \mathrm{I}_c\dot{\omega} = \mathrm{I}_c\ddot{\theta} = -D\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{D}{\mathrm{I}_c}\theta = 0$$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{D}{I_c}}$.

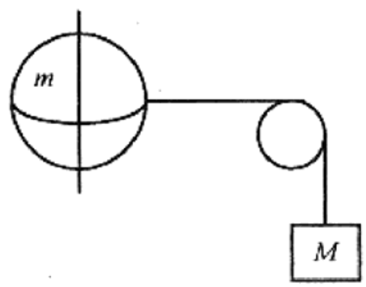
Για το σύστημα δίσκου-μαζών ισχύει:

$$\mathrm{I}_c = \frac{1}{2}MR^2 + 4mR^2 = (M/2 + 4m)R^2$$

Επομένως η περίοδος ταλάντωσης του συστήματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(M/2+4m)R^2}{D}}$$

B:



Όταν η μάζα *M* πέφτει κατά το διάστημα *h* η δυναμική ενέργεια *Mgh* μετατρέπεται σε κινητική τόσο της μάζας *M* όσο και της σφαίρας που περιστρέφεται.

$$Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

Η γραμμική ταχύτητα κάθε σημείου του ισημερινού της μάζας Μ και οποιουδήποτε σημείου του νήματος είναι ίδια και η σχέση της με τη γωνιακή ταχύτητα είναι v=ωr. Η ροπή αδρανείας της σφαίρας είναι $I=2mr^2/5$. Άρα

$$E = Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M\left(\omega r\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{2mr^2}{5}\omega^2 + \frac{1}{2}M\left(\omega r\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{m}{5} + \frac{M}{2}\right)\left(\omega r\right)^2$$

Αντικαθιστώντας έχουμε τις τιμές της *v* και ω

$$v = 3.8\ m/s$$

$$\omega = \frac{v}{r} = 13\ rad/s$$

Η στροφορμή της σφαίρας είναι

$$L = I\omega = \left[\frac{2 \cdot 2\ kg \cdot (0.3\ m)^2}{5}\right]\left[\frac{13\ rad}{s}\right] = 0.94\ kgm^2/s$$

Άσκηση 8:

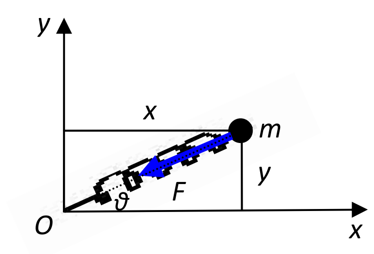
Σημειακή μάζα m κινείται χωρίς τριβή σε οριζόντιο τραπέζι προσδεμένη με αβαρές ελατήριο σταθεράς k και μηδενικού φυσικού μήκους (δηλ. το φυσικό μήκος είναι τόσο μικρό σε σχέση με τις επιμηκύνσεις που μπορεί να παραλειφθεί), του οποίου το άλλο άκρο έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο (αρχή των αξόνων). Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $(0, y_0)$ και έχει ταχύτητα $(\upsilon_0, 0)$.

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης $x(t)$, $y(t)$ και

β) Να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς.

Λύση

α) Έστω O η αρχή των αξόνων. Θεωρούμε τυχαία θέση (x, y) της μάζας m, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Στη θέση αυτή, η μάζα m δέχεται τη δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}$, η οποία έχει μέτρο

$$F = k\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1)$$

αφού το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι μηδενικό. Αναλύοντας την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες και εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει:

$-F\cos\theta = m\ddot{x}$ και $-F\sin\theta = m\ddot{y}$

Ισχύει επίσης ότι $\cos\theta = x/\sqrt{x^2+y^2}$ και $\sin\theta = y/\sqrt{x^2+y^2}$. Επομένως, οι παραπάνω εξισώσεις και με τη βοήθεια της (1) μπορούν να γραφούν ως εξής :

$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$ και

$-ky = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \dfrac{k}{m}y = 0$

Καθεμία από αυτές παριστάνει αρμονική ταλάντωση με $\omega^2 = k/m$. Έτσι οι εξισώσεις κίνησης είναι της μορφής:

$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ και $y(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t$

Επειδή αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $(0, y_0)$ έχουμε $x(0)=0$, $y(0)=y_0$, οπότε βρίσκουμε $B=0$ και $D=y_0$ αντίστοιχα. Επίσης, επειδή το σωματίδιο έχει αρχική ταχύτητα $(\upsilon_0, 0)$ έχουμε

$$\frac{dx}{dt}=A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

Για $t=0$, $\dfrac{dx}{dt}=A\omega\cos 0 - B\omega\sin 0=\upsilon_0 \Rightarrow A=\upsilon_0/\omega$

Ομοίως

$$\frac{dy}{dt}=C\omega\cos\omega t - D\omega\sin\omega t$$

Για $t=0$, $\dfrac{dy}{dt}=C\omega\cos 0 - D\omega\sin 0=0 \Rightarrow C=0$

Έτσι οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τελικά τη μορφή:

$$x(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$y(t)=y_0\cos\omega t$$

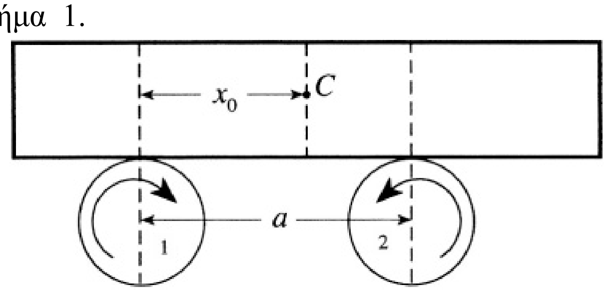
β) Η εξίσωση τροχιάς υπολογίζεται από τις εξισώσεις κίνησης με απαλοιφή του χρόνου και με τη χρήση της ταυτότητας $\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1$. Έτσι προκύπτει:

$$\left(\frac{x}{\upsilon_0/\omega}\right)^2+\left(\frac{y}{y_0}\right)^2=1$$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει έλλειψη με ημιάξονες υ_0/ω και y_0.

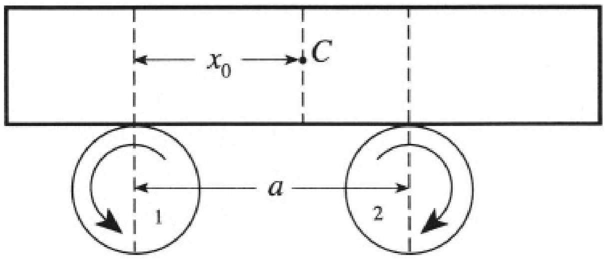
Ασκηση 9:

Μια ομοιόμορφη λεπτή άκαμπτη ράβδος μάζας M υποστηρίζεται από δύο περιστρεφόμενους κυλίνδρους των οποίων οι άξονες απέχουν σταθερή απόσταση a. Η ράβδος αρχικά τοποθετείται ασύμμετρα ως προς τους δύο κυλίνδρους και σε ηρεμία και όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1.

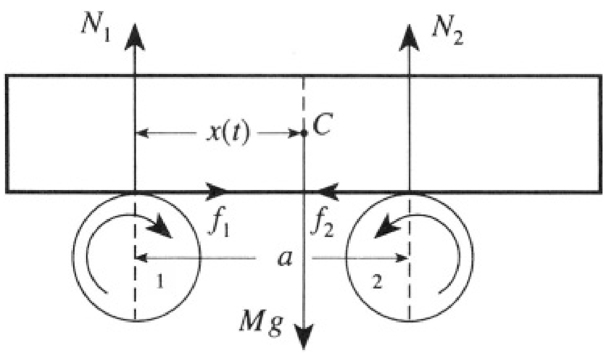
Α) Υποθέστε ότι οι κύλινδροι περιστρέφονται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ της ράβδου και των κυλίνδρων είναι μ. Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της ράβδου και η λύση της για τη μετατόπιση x(t) του κέντρου της ράβδου C από τον κύλινδρο 1, υποθέτοντας ότι $x(0) = x_0$ και $\dot{x}(0) = 0$.



Σχήμα 2.

Β) Εξετάστε την περίπτωση στην οποία οι κατευθύνσεις της περιστροφής των κυλίνδρων αντιστρέφεται, όπως φαίνεται στον σχήμα 2. Υπολογίστε τη μετατόπιση x(t), υποθέτοντας ότι $x(0) = x_0$ και $\dot{x}(0) = 0$.

Λύση



Σχήμα 3

Στο σχήμα 3 φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο. Έστω ότι η θετική x-διεύθυνση είναι προς τα δεξιά. Οι εξισώσεις των δυνάμεων και των ροπών ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου είναι:

$$N_1 + N_2 = Mg \tag{1}$$

$$N_1 x = N_2 (a - x) \tag{2}$$

$$M\ddot{x} = f_1 - f_2 \tag{3}$$

όπου N_1 και N_2 οι κάθετες δυνάμεις και $f1$ και $f2$ οι δυνάμεις τριβής από τον πρώτο και δεύτερο κύλινδρο αντίστοιχα.

$$f_1 = \mu N_1 \qquad f_2 = \mu N_2 \tag{4}$$

Από τις 1 και 2 έχουμε

$$\begin{aligned} N_1 &= Mg\left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ N_2 &= Mg\frac{x}{a} \end{aligned} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 4 και 5 στη σχέση 3 έχουμε την εξίσωση

$$\ddot{x} + \frac{2\mu g}{a} x - \mu g = 0 \qquad (6)$$

Θέτοντας ω^2=2μg/α η εξίσωση γίνεται

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu g \qquad (7)$$

Η λύση της εξίσωσης είναι

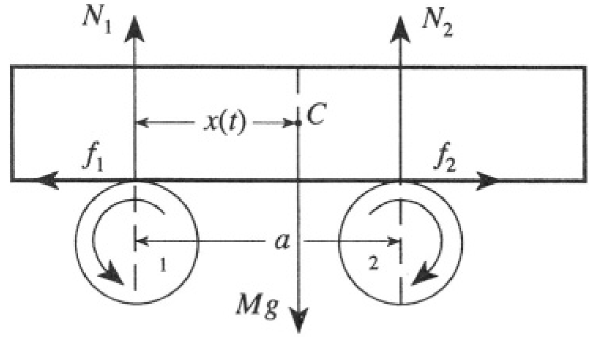
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha}{2} \qquad (8)$$

Όπου φ μια φάση που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $\dot{x}(0) = 0$ η λύση της εξίσωσης γίνεται

$$x(t) = (x_0 - \frac{a}{2})\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{2} \qquad (9)$$

Που αντιστοιχεί σε απλή αρμονική ταλάντωση.

Β) Στη δεύτερη περίπτωση (σχήμα 4) οι εξισώσεις είναι παρόμοιες.



Σχήμα 4

$$N_1 + N_2 = Mg \qquad (10)$$

$$N_1 x = N_2(a - x) \qquad (11)$$

$$M\ddot{x} = f_2 - f_1 = \mu(N_2 - N_1) \qquad (12)$$

Και πάλι από τις σχέσεις 11 και 12 παίρνουμε $\ddot{x} - \omega^2 x = -\mu g$, $\omega^2 = 2\mu g / a$

Η λύση της εξίσωσης είναι

$$x(t) = (x_0 - \frac{a}{2})\cosh(\omega\ t) + \frac{\alpha}{2}$$

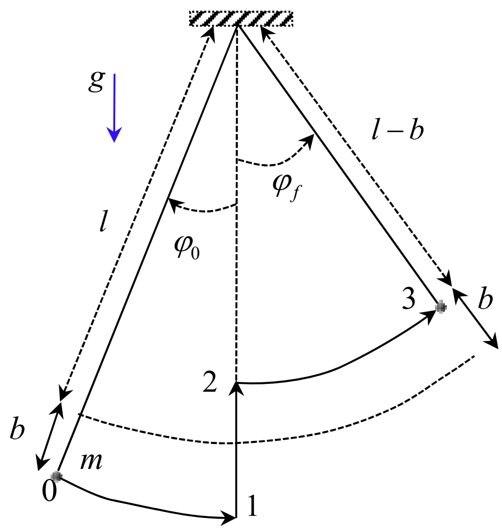
Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση δεν περιορίζεται μέσα στο μήκος της ράβδου. Ακόμη και αν τοποθετηθεί η ράβδος στο μέσο των κυλίνδρων, η ισορροπία δεν θα είναι ευσταθής.

Ασκηση 10:

Ένα παιδί μάζας *m* βρίσκεται σε μια κούνια μήκους *l* και έχει τη δυνατότητα να μεταβάλλει το μήκος *l*. Αρχικά ξεκινά από το σημείο 0 (δες σχήμα) όπου το μήκος είναι *l+b*. Καθώς κουνιέται προς τα δεξιά και διέρχεται από το σημείο της κατακόρυφης θέσης (σημείο 1) μειώνει το μήκος της κούνιας σε *l-b*. Υπολογίστε το πλάτος της γωνίας φ_f όταν το παιδί φτάσει στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς (σημείο 3).

Υπόδειξη: Για μικρές γωνίες φ_0 ισχύει $(1-\cos\varphi_0) = \frac{\varphi_0^2}{2}$. Θεωρείστε ότι για *b/l*<<1 ισχύει $\left(1+\frac{b}{l}\right)^3 \approx \left(1+3\frac{b}{l}\right)$.

Λύση:



Θεωρούμε τη θέση 1 σαν επίπεδο μηδενικής ενέργειας Θεωρούμε την κίνηση της κούνιας από τα σημεία 0→ 1→ 2 → 3.

Από το σημείο 0 έως το σημείο 1, χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε $E_0=E_1$.

$$mg(l+b)(1-\cos\varphi_0) = \frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

Όπου φ_0 είναι η αρχική γωνία. Για μικρές γωνίες, $1-\cos\varphi_0 = \varphi_0^2/2$ και

$$mg(l+b)\frac{\varphi_0^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} \qquad (1)$$

Από το σημείο 1 στο σημείο 2 χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της στροφορμής έχουμε

.

$$m(l+b)\upsilon_1 = m(l-b)\upsilon_2$$

$$\upsilon_2 = \left(\frac{l+b}{l-b}\right)\upsilon_1 \qquad (2)$$

Από το σημείο 2 στο σημείο 3 με τη διατήρηση της ενέργειας μπορούμε να βρούμε την τελική γωνία φ_f.

$$mg(l-b)\frac{\varphi_f^2}{2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2}\left(\frac{l+b}{l-b}\right)^2 \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) αντικαθιστώντας το $m\upsilon_1^2/2$ έχουμε

$$mg(l+b)\varphi_0^2 = mg(l-b)\left(\frac{l-b}{l+b}\right)^2 \varphi_f^2 \Rightarrow \varphi_0^2 = \varphi_f^2\left(\frac{l-b}{l+b}\right)^3 \qquad (4)$$

Επομένως $\varphi_f^2 = \left(\frac{l+b}{l-b}\right)^3 \varphi_0^2 = \left(1+\frac{b}{l}\right)^3\left(1-\frac{b}{l}\right)^{-3}\varphi_0^2$ (5)

και χρησιμοποιώντας την υπόδειξη $b/l \ll 1$

$$\left(1+\frac{b}{l}\right)^3 \approx 1+\frac{3b}{l} \qquad (6)$$

$$\left(1-\frac{b}{l}\right)^{-3} \approx 1-(-3)\frac{b}{l} = 1+\frac{3b}{l} \qquad (7)$$

Και με αντικατάσταση των σχέσεων (6) και (7) στη (5) προκύπτει:

$$\varphi_f^2 \approx \left(1+\frac{3b}{l}\right)^2 \varphi_0^2 \Rightarrow \varphi_f \approx \left(1+\frac{3b}{l}\right)\varphi_0$$