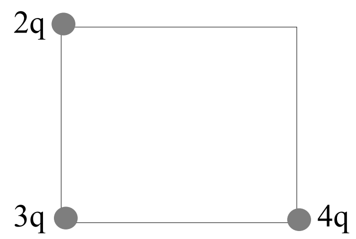
ΦΥΕ 14
6η ΕΡΓΑΣΙΑ
Παράδοση 30-06-08
(Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Α) Τρία σημειακά φορτία τοποθετούνται στις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς α, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Υπολογίστε τη διεύθυνση και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στη κορυφή όπου δεν υπάρχει φορτίο.

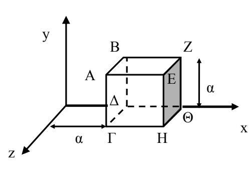


Σχήμα 1

Β) Κύβος έχει τις ακμές του, μήκους α, παράλληλες στους 3 ορθογώνιους άξονες x, y, z. Η έδρα που είναι παράλληλη στο επίπεδο yz απέχει από αυτό απόσταση α. Στο χώρο υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E} = b\sqrt{x}\hat{\mathbf{x}} + c\hat{\mathbf{y}},$$

όπου b, c σταθερές με μονάδες $\mathrm{NC^{-1}m^{-1/2}}$ και $\mathrm{NC^{-1}}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 2

(α) Βρείτε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από την επιφάνεια του κύβου,
(β) το φορτίο που υπάρχει στο εσωτερικό του κύβου.

Λύση :

Α)

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι το διανυσματικό άθροισμα των ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργούνται από κάθε φορτίο ξεχωριστά :

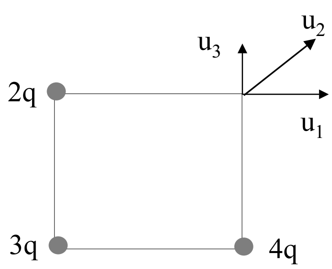
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{2q} + \mathbf{E}_{2q} + \mathbf{E}_{4q},$$

με

$$\mathbf{E}_{2q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\alpha^2}\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{E}_{3q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3q}{2\alpha^2}\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{E}_{4q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4q}{\alpha^2}\mathbf{u}_3$$



Σχήμα 3

Θεωρώντας ως σύστημα συντεταγμένων $x-y$ με άξονα x παράλληλο στη διεύθυνση του u_1 και y παράλληλο στο u_3 έχουμε:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0)$$

$$\mathbf{u}_3 = (0, 1)$$

$$\mathbf{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Έτσι θα έχουμε:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{2q} + \mathbf{E}_{23} + \mathbf{E}_{4q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}(2, 0) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}(0, 4)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}\left(\frac{3+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \frac{3+8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right).$$

Επομένως, το μέτρο και γωνία που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο με τον άξονα x είναι

$$|\mathbf{E}| = \frac{5.91}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}$$

$$\phi = 58,8^o\ .$$

Β)

Η ολική ροή που διέρχεται από τον κύβο είναι το άθροισμα των ροών που διέρχονται από κάθε πλευρά του. Τα διανύσματα των 6 επιφανειών του κύβου έχουν μέτρο ίσο με a^2, διεύθυνση κάθετα στην κάθε πλευρά αντίστοιχα και φορά προς τα έξω της κλειστής επιφάνειας που ορίζουν. Επομένως:

$$S_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} = -a^2\hat{\mathbf{x}}, \quad S_{\mathrm{ABZE}} = a^2\hat{\mathbf{y}}, \quad S_{\mathrm{EZH\Theta}} = a^2\hat{\mathbf{x}},$$

$$S_{\mathrm{\Gamma\Delta\Theta H}} = -a^2\hat{\mathbf{y}}, \quad S_{\mathrm{AE\Gamma H}} = a^2\hat{\mathbf{z}}, \quad S_{\mathrm{BZ\Theta\Delta}} = -a^2\hat{\mathbf{z}}\ .$$

Στις πλευρές ΑΕΓΗ και ΒΖΘΔ οι ροές είναι μηδέν γιατί δεν υπάρχει συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια Στις πλευρές ΑΒΖΕ και ΓΔΘΗ οι ροές οφείλονται μόνο στην $y-$συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που είναι σταθερή γιατί η $x-$συνιστώσα αν και έχει διαφορετική τιμή για κάθε σημείο των επιφανειών είναι κάθετη στα διανύσματα των επιφανειών. Στις πλευρές ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ οι ροές οφείλονται στη $x-$ συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου η οποία στην πλευρά ΑΒΓΔ έχει τιμή $b\sqrt{a}$ ενώ στην πλευρά $EZH\Theta$ έχει τιμή $b\sqrt{2a}$. Επομένως οι ροές είναι:

$$\Phi_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} = -a^2 b\sqrt{a}, \quad \Phi_{\mathrm{ABZE}} = a^2 c, \quad \Phi_{\mathrm{EZH\Theta}} = a^2 b\sqrt{2a},$$

$$\Phi_{\mathrm{\Gamma\Delta\Theta H}} = -a^2 c, \quad \Phi_{\mathrm{AE\Gamma H}} = 0, \quad \Phi_{\mathrm{BZ\Theta\Delta}} = 0$$

(α)

Η συνολική ροή είναι το άθροισμα των επιμέρους ροών, δηλαδή

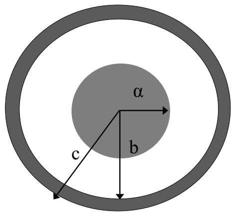
$$\Phi_{\mathrm{o\lambda}} = a^2 b\sqrt{2a} - a^2 b\sqrt{a} = a^2 b\sqrt{a}(\sqrt{2}-1)\ \mathrm{NC^{-1}m^2}\ .$$

(β)

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss η συνολική ροή είναι $\Phi_{\mathrm{o\lambda}} = Q/\epsilon_0$, επομένως το φορτίο μέσα στον κύβο είναι ίσο με $Q = \Phi_{\mathrm{o\lambda}}\epsilon_0$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας α έχει θετικό φορτίο $3Q$ που ισοκατανέμεται στον όγκο της. Η σφαίρα περικλείεται από ένα αγώγιμο ομοκεντρικό σφαιρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c που έχει φορτίο $-Q$. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο και κάντε τη γραφική παράσταση της έντασης συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο της σφαίρας.



Σχήμα 4

Λύση:

Επειδή το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία (μονωτική σφαίρα ομογενούς πυκνότητας φορτίου και σφαιρικός αγώγιμος φλοιός) το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει ακτινική διεύθυνση και μέτρο που θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο της σφαίρας. Αν ρ η πυκνότητα φορτίου της σφαίρας που (επειδή είναι ομογενής) είναι σταθερή θα ισχύει $\rho = 3Q/V$ όπου V ο όγκος της σφαίρας ($V = 4\pi\alpha^3/3$). Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(I) $r < a$

Τότε αν θεωρήσουμε μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r και εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss θα έχουμε:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_{r<\alpha}(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_{r<a}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{\frac{3Q}{4\pi\alpha^3/3}}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{\alpha^3} r \ .$$

(II) $a < r < b$

Η σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r περιέχει φορτίο $3Q$ επομένως ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\Phi_E = \frac{3Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_{a<r<b}(r) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \ .$$

(III) $b < r < c$

Επειδή σε αυτήν την περιοχή βρισκόμαστε μέσα σε αγωγό το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι μηδέν:

$$E_{b<r<c}(r) = 0$$

(IV) $r > c$

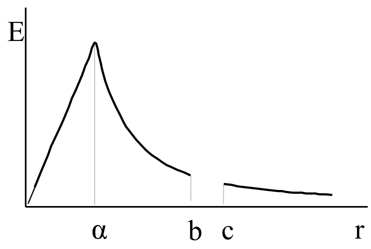
Η σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r περιέχει φορτίο $3Q - Q = 2Q$ επομένως ο νόμος του gauss δίνει:

$$\Phi_E = \frac{2Q}{\epsilon_0} \ .$$

$$\Rightarrow \quad E_{r>c}(r) 4\pi r^2 = \frac{2Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_{r>c}(r) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \ .$$

Σ' όλες τις περιπτώσεις η φορά του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\hat{\mathbf{r}}$



Σχήμα 5

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δύο αγώγιμες σφαίρες ακτίνων R_1 και R_2 με $R_1 > R_2$ συνδέονται με ένα αγώγιμο σύρμα. Οι σφαίρες έχουν φορτίο q_1 και q_2 αντίστοιχα. Ποια από τις δύο σφαίρες έχει μεγαλύτερη επιφανειακή κατανομή φορτίου;

Λύση:

Οι σφαίρες επειδή συνδέονται με σύρμα βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό. Το δυναμικό σφαιρικού αγωγού ακτίνας R και φορτίου Q μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:
Αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια Gauss ακτίνας $r > R$ τότε έχουμε εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss:

$$\oint \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

με ακτινική διεύθυνση και φορά προς τα έξω αν το φορτίο είναι θετικό ή προς τα μέσα αν το φορτίο είναι αρνητικό.
Για $r > R$ το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίδιο με αυτό που θα προκαλούσε ένα σημειακό φορτίο q τοποθετημένο στο κέντρο της σφαίρας, οπότε το δυναμικό είναι

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Το δυναμικό λοιπόν μιας αγώγιμης σφαίρας ακτίνας R και φορτίου q στην επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

Επειδή οι σφαίρες βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό, έχουμε:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

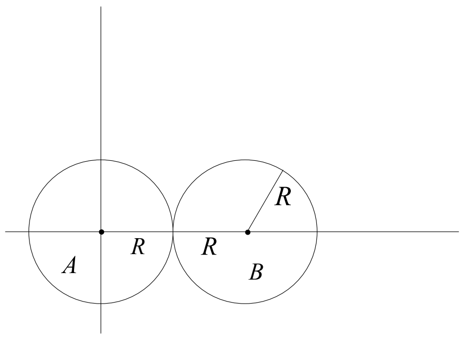
$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Δηλαδή η σφαίρα με τη μεγαλύτερη ακτίνα έχει μικρότερη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θετικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε δύο σφαίρες από μονωτικό υλικό ακτίνας R. Το κέντρο της πρώτης σφαίρας βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων και της δεύτερης στο σημείο $x = 2R$. Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ στον άξονα των x για: $x = 0$, $x = R/2$, $x = R$, και $x = 3R$.

Λύση:



Σχήμα 6

Για $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E_A} &= 0 \\ \mathbf{E_B} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q/2}{(2R)^2} = -\frac{Q/2}{16\pi\epsilon_0 R^2}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{TOT}} = \mathbf{E_A} + \mathbf{E_B} = -\frac{Q/2}{16\pi\epsilon_0 R^2} \qquad (\hat{\mathbf{x}})\ .$$

Για $x = R/2$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E_A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q/2(R/2)^3}{R^3}\frac{1}{(R/2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q/2}{2R^2} \qquad (\hat{\mathbf{x}}) \\
\mathbf{E_B} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q/2}{(3R/2)^2} = \frac{Q/2}{9\pi\epsilon_0 R^2} \qquad (\hat{\mathbf{x}})
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}_{\text{TOT}} = \mathbf{E_A} + \mathbf{E_B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q/2}{R^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q/2}{18R^2} \qquad (\hat{\mathbf{x}}) \ .$$

Για $x = R$:

$$\mathbf{E_A} = -\mathbf{E_B}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}_{\text{TOT}} = 0 \ .$$

Για $x = 3R$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E_A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q/2}{(3R)^2}\hat{\mathbf{x}} \\
\mathbf{E_B} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q/2}{R^2}\hat{\mathbf{x}}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

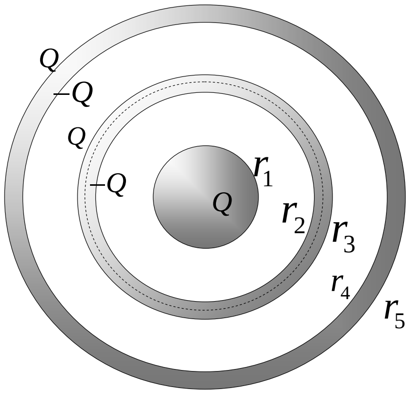
$$\mathbf{E}_{\text{TOT}} = \mathbf{E_A} + \mathbf{E_B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{10Q/2}{9R^2} \qquad (\hat{\mathbf{x}}) \ .$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μεταλλική σφαίρα ακτίνας r_1 φέρει φορτίο Q και περιβάλλεται από αγώγιμους φλοιούς με ακτίνες (r_2, r_3) και (r_4, r_5) αντίστοιχα.
(α) Βρείτε τα φορτία στις επιφάνειες των φλοιών.
(β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο παντού.
(γ) Βρείτε το δυναμικό της κεντρικής σφαίρας.

(α)

Τα φορτία που επάγονται στις επιφάνειες των αγωγών φαίνονται στο σχήμα. Στο εσωτερικό κάθε αγωγού του ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν. Επομένως για κάθε επιφάνεια (εστιγμένη γραμμή στο σχήμα) που θεωρούμε στο εσωτερικό κάθε σφαιρικού φλοιού, η ροή είναι μηδέν και, συνεπώς, και το φορτίο που περιέχεται σε κάθε τέτοια επιφάνεια είναι συνολικά επίσης μηδέν.



Σχήμα 7

(β)

Για κάθε σφαιρικό φλοιό εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \ .$$

Για $r > r_5$:

$$E_5 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_5 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \ .$$

Για $r_4 < r < r_5$:

$$E_4 = 0 \ .$$

Για $r_3 < r < r_4$:

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \ .$$

Για $r_2 < r < r_3$:

$$E_2 = 0 \ .$$

Για $r_1 < r < r_2$:

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \ .$$

(γ)

Το δυναμικό υπολογίζεται ως εξής:

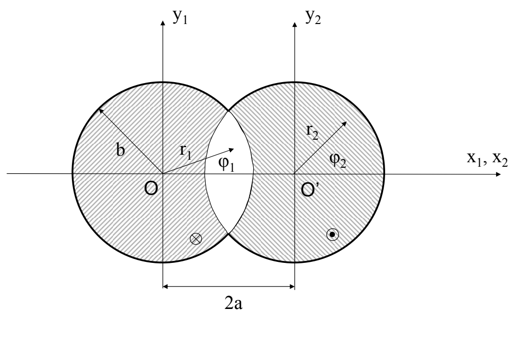
$$V(r_1) = -\int_{\infty}^{r_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \quad V(r_1) = -\int_{\infty}^{r_5} E_5\, dr - \int_{r_4}^{r_3} E_3\, dr - \int_{r_2}^{r_1} E_1\, dr$$

$$\Rightarrow \quad V(r_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] .$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένα σύστημα αγωγών έχει διατομή που δίνεται από την τομή δύο κύκλων ακτίνας b των οποίων τα κέντρα βρίσκονται σε απόσταση $2a$ όπως φαίνεται στο σχήμα 8. Το αγώγιμο τμήμα τους είναι η γραμμοσκιασμένη περιοχή στο σχήμα ενώ το υπόλοιπο είναι κενό. Ο αριστερός αγωγός έχει πυκνότητα ρεύματος J με φορά πρός τη σελίδα ενώ ο δεξιός αγωγός έχει ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος J με αντίθετη φορά. Θεωρείστε ότι η μαγνητική διαπερατότητα του αγωγού είναι ίδια με αυτή του κενού. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε όλα τα σημεία x, y στο κενό που περικλείεται από τους δύο αγωγούς.



Σχήμα 8

Λύση:

Αφού η μαγνητική διαπερατότητα του αγωγού είναι ίδια με αυτή του κενού, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κενή περιοχή ανάμεσα στους δύο αγωγούς είναι γεμάτη με τον ίδιο αγωγό χωρίς να επηρεάζουμε την κατανομή του μαγνητικού πεδίου. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η περιοχή αυτή διαρρέεται από δύο ρεύματα πυκνότητας $\pm\mathbf{J}$, δηλαδή ιδίου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς. Συνεπώς έχουμε δύο κυλινδρικούς αγωγούς με μια ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος ο καθένας και η μαγνητικό πεδίο θα είναι το άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών.
Από το νόμο του Ampère έχουμε:

$$\mathbf{B_1} = -\frac{\mu_0}{2} J r_1 \hat{\phi}_\mathbf{1} \, , \qquad (r_1 \leq b) \tag{0.1}$$

$$\mathbf{B_2} = \frac{\mu_0}{2} J r_2 \hat{\phi}_\mathbf{2} \; , \qquad (r_2 \leq b) \tag{0.2}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα των γωνιών ϕ_1 και ϕ_2 σχετίζονται με τα μοναδιαία $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\mathbf{y}}$ ως εξής:

$$\hat{\phi}_\mathbf{1} = (-\sin\phi_1, \cos\phi_1) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = -\sin\phi_1 \hat{\mathbf{x}} + \cos\phi_1 \hat{\mathbf{y}}$$

και

$$\hat{\phi}_\mathbf{2} = (-\sin\phi_2, \cos\phi_2) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = -\sin\phi_2 \hat{\mathbf{x}} + \cos\phi_2 \hat{\mathbf{y}}$$

Άρα οι 0.1 και 0.2 γίνονται:

$$\mathbf{B_1} = \frac{\mu_0}{2} J \left(y_1 \hat{\mathbf{x}} - x_1 \hat{\mathbf{y}} \right) \; , \tag{0.3}$$

$$\mathbf{B_2} = \frac{\mu_0}{2} J \left(-y_2 \hat{\mathbf{x}} + x_2 \hat{\mathbf{y}} \right) \; . \tag{0.4}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 2a \\ \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

η σχέση 0.4 γίνεται:

$$\mathbf{B_2} = \frac{\mu_0}{2} J \left(-y_1 \hat{\mathbf{x}} + (x_1 - 2a) \hat{\mathbf{y}} \right)] ; . \tag{0.5}$$

Από τις 0.3 και 0.5 το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή μεταξύ των αγωγών είναι:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} J \left[(y_1 - y_1)\, \hat{\mathbf{x}} \, (x_1 - x_1 - 2a)\, \hat{\mathbf{y}} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} = -\mu_0 a J \hat{\mathbf{y}} \; .$$

που σημαίνει ότι το πεδίο είναι ομογενές κατά την $-\hat{\mathbf{y}}$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

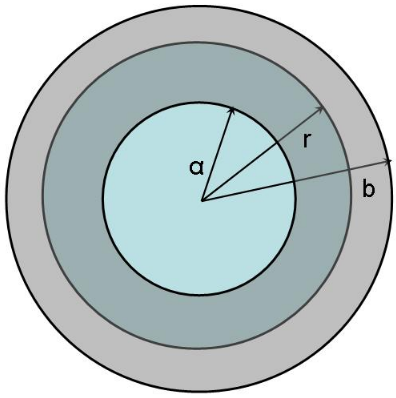
Κοίλος αγωγός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I ομοιόμορφα κατανενημημένο.
(α) Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο $B(r)$ για σημεία μέσα στο σώμα του αγωγού (δηλαδή για $a < r < b$) δίδεται από τη σχέση:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}$$

Να ελέγξετε τον τύπο για την περίπτωση του $a = 0$.

(β) Δώστε μια χονδρική γραφική παράσταση της γενικής συμπεριφοράς του $B(r)$ από $r = 0$ μέχρι $r \to \infty$.

Λύση:



Σχήμα 9

(α)

Η πυκνότητα ρεύματος μέσα στο αγωγό είναι σταθερή, επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} J = \frac{I}{\pi(b^2-a^2)} \\ \\ J = \frac{I'}{\pi(r^2-a^2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad I' = \frac{r^2-a^2}{b^2-a^2} I \ .$$

όπου I' το ρεύμα που διαρρέει το μέρος του αγωγού που περιλαμβάνεται μεταξύ a και r.
Εφαρμόζοντας το Νόμο του $Ampere$ για μία κλειστή κυκλική διαδρομή έχουμε:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I'$$

$$\Rightarrow \quad B 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2-a^2}{b^2-a^2} I \ ,$$

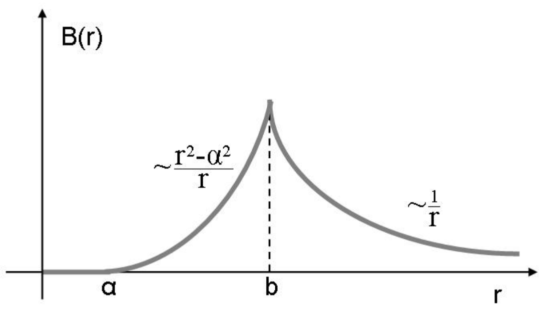
και τελικά:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2-a^2)} \frac{r^2-a^2}{r} \ .$$

για $a = 0$ παραπάνω σχέση δίδει: $B(r) = (\mu_0 I/2\pi b^2) r$, η οποία μπορεί πολύ εύκολα να προκύψει και εφαρμόζοντας το Νόμο του $Ampere$ σε αγωγό ακτίνας r.

(β)

Λαμβάνοντας υπ' όψη τα αποτελέσματα του (α) και δεδομένου ότι για $r < a$ ισχύει $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ή $\mathbf{B} = 0$ η γραφική παράσταση της μαγνητικής επαγωγής φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 10

ΑΣΚΗΣΗ 8

Το ρεύμα που διαρρέει ευθύγραμμο αγωγό ΑΒ απείρου μήκους αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $i(t) = At + B$, με $A, B > 0$. Ο αγωγός βρίσκεται στο επίπεδο συρμάτινου τετραγωνικού πλαισίου, πλευράς α, σε απόσταση α απο την πλησιέστερη πλευρά του πλαισίου. (α) Πόση είναι η ολική μαγνητική ροή που διαπερνά το πλαίσιο και (β) βρείτε την ΗΕΔ που επάγεται στο πλαίσιο και το επαγόμενο ρεύμα αν η αντίσταση του πλαισίου είναι R.

Λύση:

Η στοιχειώδης μαγνητική ροή μέσα από μία επιφάνεια dS ισούται με $d\Phi = BdS$ όπου B η μαγνητική επαγωγή σε απόσταση x από τον αγωγό που δίδεται από την σχέση

$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi x} \; .$$

Επομένως:

$$\Phi(t) = \int d\Phi(t) = \frac{\mu_0 \alpha i(t)}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{dx}{x}$$

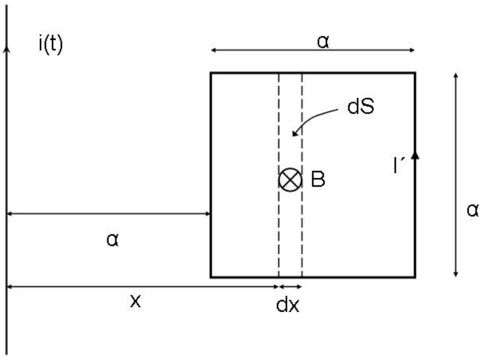
$$\Rightarrow \quad \Phi(t) = \frac{\mu_0 \alpha i(t)}{2\pi} \ln 2 \; .$$

Η ΗΕΔ, δεδομένου ότι $i(t) = At + B$, είναι:

$$E = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 \alpha A}{2\pi} \ln 2 \; ,$$

και το επαγόμενο ρεύμα:

$$I' = \frac{E}{R} = \frac{\mu_0 \alpha A}{2\pi R} \ln 2 \; .$$



Σχήμα 11

ΑΣΚΗΣΗ 9

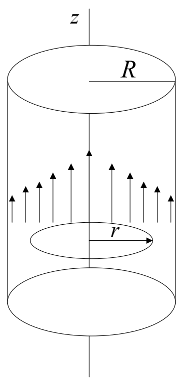
Κυλινδρικός αγωγός άπειρου μήκους και ακτίνας R διαρρέεται από ρεύμα που το διάνυσμα πυκνότητας είναι:

$$\mathbf{J} = J_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\hat{z} \qquad r \leq R$$

$$\mathbf{J} = 0 \qquad r > R\,.$$

(α) Υπολογίστε την ένταση του ρεύματος I που διαρρέει διατομή ακτίνας r.
(β) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο B εντός και εκτός του αγωγού.
(γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου B και σε ποια απόσταση από το άξονα επιτυγχάνεται αυτή η τιμή.

Λύση:



Σχήμα 12

(α)

Η ένταση του ρεύματος δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

όπου:

$$d\mathbf{A} = 2\pi r\, dr \hat{\mathbf{z}}$$

συνεπώς:

$$I = J_0 \int_0^r (1 - \frac{r^2}{R^2}) 2\pi r\, dr = \pi J_0 \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) r^2 \qquad \text{για } r \leq R\ .$$

(β)

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ για $r \leq R$ και $r > R$ και έχουμε:
Για $r \leq R$:

$$B 2\pi r = \mu_0 \pi J_0 \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) r^2$$

$$\Rightarrow \quad B_{r \leq R} = \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) r\ .$$

Για $r > R$:

$$B 2\pi r = \mu_0 \pi J_0 \left(1 - \frac{R^2}{2R^2}\right) R^2 = \frac{\mu_0 \pi J_0 R^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B_{r > R} = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{4r}\ .$$

(γ)

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει μέγιστη τιμή εκεί που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγός της:

$$\frac{dB_{r<R}}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu_0 J_0}{2} \left[\left(\frac{-2r}{2R^2} \right) r + \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(1 - \frac{3r^2}{2R^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}} R\ .$$

Και η μέγιστη τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι:

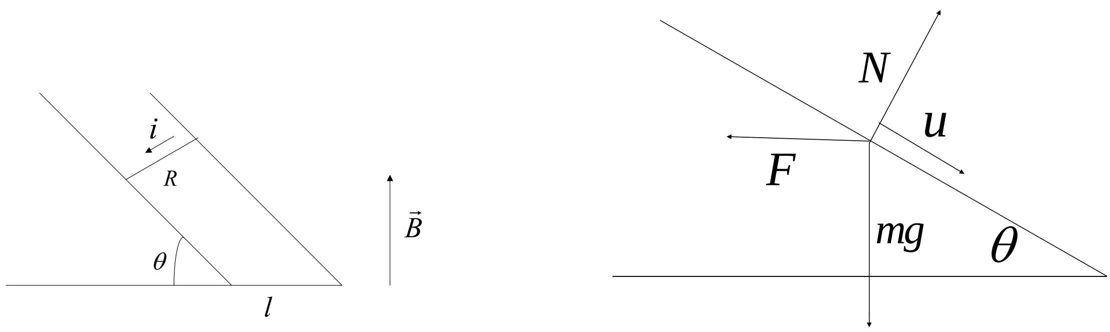
$$B_{\max} = B_{r<R} \left(r = \sqrt{\frac{2}{3}} R \right) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \mu_0 J_0 R\ .$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Μία ράβδος μήκους l, μάζας m και αντίστασης R ολισθαίνει χωρίς τριβή πάνω σε δύο παράλληλους αγώγιμους οδηγούς αμελητέας αντίστασης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι οδηγοί συνδέονται μεταξύ τους στο κάτω άκρο τους και μαζί με τη ράβδο αποτελούν έναν αγώγιμο βρόχο. Το επίπεδο των οδηγών σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ και παντού στο χώρο υπάρχει κάθετο ομογενές μαγνητικό πεδίο B. Δείξτε ότι η ραβδος αποκτά σταθερή τελική ταχύτητα με μέτρο:

$$u = \frac{mgR\sin\theta}{B^2 l^2 \cos^2\theta} \ .$$

Λύση:



Σχήμα 13

Η ανάλυση των δυνάμεων γίνεται σε άξονα κάθετο και παράλληλο προς το επίπεδο των οδηγών:
Στον κάθετο άξονα έχουμε:

$$N = mg\cos\theta + F\sin\theta \ .$$

Στον παράλληλο άξονα έχουμε:

$$ma = mg\sin\theta - F\cos\theta \ .$$

όπου F είναι η δύναμη Laplace που ασκείται στη ράβδο:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l}\times\mathbf{B} = ilB \quad (-\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\mathcal{E}}{R}lB \quad (-\hat{\mathbf{x}})$$

και $\mathcal{E}$ η διαφορά δυναμικού που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου λόγω μεταβολής της μαγνητικής ροής από το βρόχο που σχηματίζει η ράβδος με τους οδηγούς:

$$\mathcal{E} = -\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}}{dt} = B\cos\theta\, l\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} = Blu\cos\theta \; .$$

Συνεπώς:

$$F = \frac{B^2 l^2 u \, \cos\theta}{R} \; .$$

Όταν η ράβδος αποκτήσει σταθερή ταχύτητα η επιτάχυνση a θα είναι μηδενική. Επομένως:

$$ma = mg\sin\theta - \frac{B^2 l^2 u \, \cos^2\theta}{R} = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{\text{ορική}} = \frac{mgR\sin\theta}{B^2 l^2 \cos^2\theta} \; .$$
