Παράδοση 9/11/08

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

Θέμα 1 (μονάδες 10)

i. Δείξτε ότι $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$.

ii. Δείξτε την ταυτότητα Jacobi : $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}=0$

Θέμα 2 (μονάδες 10)

i. Εκφράστε το διάνυσμα $\vec{x}=\left(1,0,0\right)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}=\left(1,2,0\right)$ $\vec{\upsilon}=\left(2,1,0\right)$ $\vec{w}=\left(-1,3,2\right)$. Δηλαδή να βρεθούν οι πραγματικοί α, b και c ώστε να μπορεί να γραφεί το $\vec{x}$ ως $\vec{x}=a\vec{u}+b\vec{\upsilon}+c\vec{w}$.

ii. Έστω τα σημεία $A=\left(1,2,3\right)$ $B=\left(2,-1,4\right)$ $D=\left(2,0,-3\right)$. Βρείτε σημείο C ώστε το ABCD να είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 3 (μονάδες 10)

Έστω $\vec{a}=\left(1,0,1\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{b}=\left(1,-2,2\right)$ Βρείτε:

i. Το μήκος της προβολής του $\vec{b}$ στο $\vec{a}$.

ii. Τις γωνίες που σχηματίζει το $\vec{a}$ με τους άξονες συντεταγμένων

iii. Την γωνία μεταξύ $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

iv. Τις συντεταγμένες του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία $\left(1,0,1\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $\left(1,-2,2\right)$.

v. Το εμβαδόν της επιφάνειας του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$

vi. Αν $\vec{c}=\left(1,-1,0\right)$ βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$.

Θέμα 4 (μονάδες 10)

Να μελετηθούν οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων για διάφορες τιμές των μ και ν (μ,ν,x,y,z πραγματικοί αριθμοί).

$$(i)\ \begin{aligned} \mu x+y+z &= 1\\ x+\mu y+z &= 1\\ x+y+\mu z &= 1 \end{aligned} \qquad (ii)\ \begin{aligned} x-3z &= -3\\ 2x+\nu y-z &= -2\\ x+2y+\nu z &= 1 \end{aligned}$$

Θέμα 5 (μονάδες 10)

Δίνεται το τριώνυμο $(4\lambda-1)x^2+(\lambda-1)x-\lambda$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε οι ρίζες του :

α) να έχουν άθροισμα 4

β) να είναι ετερόσημες με απόλυτα μεγαλύτερη τη θετική και

γ) να είναι αντίστροφες.

Παράδοση 9/11/08

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

ii. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η γραφική παράσταση του τριωνύμου:
α) να έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των y
β) να εφάπτεται στο άξονα των x
γ) να έχει κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη 1.

Θέμα 6 (μονάδες 10)

i. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sin(ax+b)$. Να βρεθούν τα $a, b \in R$, ώστε η συνάρτηση να είναι περιττή.

ii. Αν για μια συνάρτηση g ισχύει $2g(x) + 3g(-x) = 5\cos x$, να δείξετε ότι η g είναι άρτια και να βρείτε τον τύπο της g.

Θέμα 7 (μονάδες 10)

i. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x+2$ και $g(x) = ax+4$.Για ποια τιμή του α ισχύει $f \circ g = g \circ f$;

ii. Εχει η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ αντίστροφη; Αν έχει να βρεθεί, αλλιώς να διερευνηθεί κάτω από ποιες προϋποθέσεις έχει αντίστροφη και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Θέμα 8 (μονάδες 10)

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστούν με απ’ ευθείας υπολογισμούς οι:

$$\det A,\ \det(3A),\ \det B, A^{-1}, AB, \det A^{-1}, \det(AB).$$

Στη συνέχεια να επαληθευτεί ότι $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ και $\det(AB) = \det A \det B$.

Ισχύει ότι $\det(3A) = 3\det A$;

Παράδοση 9/11/08

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

Θέμα 9 (μονάδες 10)

Δίνονται οι πίνακες

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad R=\begin{pmatrix}\cos 30^o & -\sin 30^o & 0\\ \sin 30^o & \cos 30^o & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

Ο R «περιστρέφει» τον A κατά 30^o. Αυτό γίνεται σε συνδυασμό με τον πίνακα που «περιστρέφει» τον A κατά την αντίθετη φορά, δηλαδή κατά -30^o:

$$R^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\cos(-30^o) & -\sin(-30^o) & 0\\ \sin(-30^o) & \cos(-30^o) & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 30^o & \sin 30^o & 0\\ -\sin 30^o & \cos 30^o & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

Η δράση της περιστροφής από τους πίνακες R, R^{T} πάνω στον A μας δίνει τον «περιστραμμένο» πίνακα:

$$A_R = RAR^T$$

i. Υπολογίστε τον πίνακα A_R
ii. Δείξτε ότι η $\det A_R=\det A$
iii. Δείξτε ότι η δράση του R^{T} αναιρεί αυτή του R «περιστρέφοντας» τον A_R πίσω στον R. Δηλαδή ότι $R^{\mathrm{T}}A_RR=A$.
iv. Δείξτε ότι η δράση του R δύο φορές, «περιστρέφει» τον A κατά $30^o+30^0=60^0$. Αρκεί να δείξετε, αφού το δικαιολογήσετε, ότι

$$R^2=RR=\begin{pmatrix}\cos 60^o & -\sin 60^o & 0\\ \sin 60^o & \cos 60^o & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

v. Δείξτε ότι οι τιμές $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ επαληθεύουν και τις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$\det(A_R-\lambda I_3)=0 \quad \det(A-\lambda I_3)=0$$

Όπου I_3 είναι ο 3x3 μοναδιαίος πίνακας. (Σημ: Οι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ λέγονται ιδιοτιμές των δύο πινάκων και όπως βλέπετε είναι κοινές).
vi. Δείξτε ότι: $RR^{\mathrm{T}}=R^{\mathrm{T}}R=I_3$

Υπόδειξη: Δίνεται ότι $\sin 30^0=\cos 60^0=1/2$ και $\cos 30^0=\sin 60^0=\sqrt{3}/2$. Δεν είναι ανάγκη να χρησιμοποιήσετε σχέσεις τριγωνομετρίας, αρκεί να αντικαταστήσετε τις παραπάνω τιμές (αν φυσικά τις γνωρίζετε μπορείτε να τις χρησιμοποιήσετε). Στην παράγραφο 5.4 του βιβλίου σας μπορείτε να βρείτε χρήσιμες πληροφορίες.

Θέμα 10 (μονάδες 10)

Δίνονται οι πίνακες A, R, A_R σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση. Έστωσαν οι πίνακες γραμμή/στήλη:

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\qquad y^T=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}$$

Παράδοση 9/11/08

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

Η δράση του R πάνω στα y, y^T τα περιστρέφει δίνοντας τους πίνακες

$$y_R = Ry \qquad y_R^T = y^T R^T$$

i. Δείξτε ότι $y_R^T A_R y_R = y^T A y$

ii. Έστω οι πίνακες

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι

$$Av^1 = \lambda_1 v^1 \quad Av^2 = \lambda_2 v^2 \quad Av^3 = \lambda_3 v^3$$

όπου, όπως στην προηγούμενη άσκηση $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

iii. Δείξτε ότι

$$A_R v_R^1 = \lambda_1 v_R^1 \quad A_R v_R^2 = \lambda_2 v_R^2 \quad A_R v_R^3 = \lambda_3 v_R^3$$

όπου $v_R^1 = Rv^1, v_R^2 = Rv^2, v_R^3 = Rv^3$

(Σημ.: Τα διανύσματα v^1, v^2, v^3 και v_R^1, v_R^2, v_R^3 λέγονται τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων A και A_R αντίστοιχα. Μόλις αποδείξατε ότι τα ιδιοδιανύσματα του περιστραμμένου πίνακα A_R προκύπτουν από την περιστροφή των ιδιοδιανυσμάτων του αρχικού πίνακα A!)