ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

Θέμα 1 (μονάδες 10)

i. Δείξτε ότι $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = -\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$.

ii. Δείξτε την ταυτότητα Jacobi : $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}=0$

Απάντηση

i. Έστω $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle,\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle,\vec{c}=\langle c_1,c_2,c_3\rangle$ Τότε

$\vec{a}\times\vec{b}=\langle a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\rangle$ και $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=$

$$= \begin{pmatrix} (a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_2-a_2b_1)c_1-(a_2b_3-a_3b_2)c_3 \\ (a_2b_3-a_3b_2)c_2-(a_3b_1-a_1b_3)c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1(b_2c_2+b_3c_3)+b_1(a_2c_2+a_3c_3) \\ -a_2(b_1c_1+b_3c_3)+b_2(a_1c_1+a_3c_3) \\ -a_3(b_1c_1+b_2c_2)+b_3(a_1c_1+a_2c_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)+b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \\ -a_2(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)+b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \\ -a_3(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)+b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)$$

$$=-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$$

ii. Απλά προσθέτουμε τις σχέσεις:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$$

$$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\vec{a}\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)$$

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}=-\vec{b}\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)+\vec{c}\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$$

Θέμα 2 (μονάδες 10)

i. Εκφράστε το διάνυσμα $\vec{x}=(1,0,0)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}=(1,2,0)$ $\vec{\upsilon}=(2,1,0)$ $\vec{w}=(-1,3,2)$. Δηλαδή να βρεθούν οι πραγματικοί α, b και c ώστε να μπορεί να γραφεί το $\vec{x}$ ως $\vec{x}=a\vec{u}+b\vec{\upsilon}+c\vec{w}$.

ii. Έστωσαν τα σημεία $A=(1,2,3)$ $B=(2,-1,4)$ $D=(2,0,-3)$. Βρείτε σημείο C ώστε το ABCD να είναι παραλληλόγραμμο.

Απάντηση

i. . Θα πρέπει να βρούμε τα *a, b, c* ώστε

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} a + 2b - c &= 1 \\ 2a + b + 3c &= 0 \\ 2c &= 0 \end{aligned}$$

Από την τελευταία έχουμε $c = 0$ οπότε η πρώτη γίνεται $a = 1 - 2b$. Με αντικατάσταση στην δεύτερη παίρνουμε $2(1-2b) + b = 0$ ή $b = 2/3.$ Επομένως έχουμε και $a = -1/3$. Άρα

$$\vec{x} = \frac{-1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} + 0\vec{w}$$

ii. Θα πρέπει το διάνυσμα $\overrightarrow{DC}$ να ταυτίζεται με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Επομένως $\vec{c} - \vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ και $\vec{c} = \vec{d} + \vec{b} - \vec{a}$ Άρα

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Θέμα 3 (μονάδες 10)

Έστω $\vec{a} = (1,0,1) \quad \kappa\alpha\iota \quad \vec{b} = (1,-2,2)$ Βρείτε:

i. Το μήκος της προβολής του $\vec{b}$ στο $\vec{a}$.
ii. Τις γωνίες που σχηματίζει το $\vec{a}$ με τους άξονες συντεταγμένων
iii. Την γωνία μεταξύ $\vec{a}$ και $\vec{b}$.
iv. Τις συντεταγμένες του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία $(1,0,1) \quad \kappa\alpha\iota \quad (1,-2,2)$.
v. Την επιφάνεια του παραλληλογράμου που σχηματίζεται από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$
vi. Αν $\vec{c} = (1,-1,0)$ βρείτε τον όγκο του παραληλεπιπέδου που σχηματίζεται από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$.

Απάντηση

i. Το μήκος της προβολής είναι $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{3}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \boxed{3/\sqrt{2}}$
ii. Η γωνία α με τον άξονα των x είναι $\cos\alpha = \vec{i}\cdot\vec{a}/|\vec{a}| = a_1/|\vec{a}| = 1/\sqrt{2},\ \alpha = \pi/4$ όμοια για τους άλλους άξονες βρίσκουμε $\cos\beta = 0, \boxed{\beta = \pi/2}, \cos\gamma = 1/\sqrt{2}, \boxed{\gamma = \pi/4}$.
iii. Για την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων έχουμε $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \boxed{\theta = \pi/4}$
iv. Οι συν/νες του μέσου προκύπτουν ως $(1/2)(\vec{a} + \vec{b}) = \boxed{(1,-1,3/2)}$.

v. $$|\vec{a}\times\vec{b}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \left|2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}\right| = 3$$

vi. Έχουμε

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= \boxed{\langle 2,-1,-2\rangle}$$

και

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \langle 2,-1,-2\rangle\cdot\langle 1,-1,0\rangle = \boxed{3}.$$

Θέμα 4 (μονάδες 10)

Να μελετηθούν οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων για διάφορες τιμές των μ και ν (μ,ν,x,y,z πραγματικοί αριθμοί).

$$(i)\ \begin{aligned} \mu x+y+z &= 1 \\ x+\mu y+z &= 1 \\ x+y+\mu z &= 1 \end{aligned} \qquad (ii)\ \begin{aligned} x-3z &= -3 \\ 2x+\nu y-z &= -2 \\ x+2y+\nu z &= 1 \end{aligned}$$

Απάντηση

i. Η ορίζουσα του πρώτου συστήματος υπολογίζεται πως είναι

$$D = \begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{vmatrix} = \mu\left(\mu^2-1\right)-1(\mu-1)+1(1-\mu) = \mu(\mu-1)(\mu+1)-2(\mu-1) =$$

$$(\mu-1)\left[\mu(\mu+1)-2\right] = (\mu-1)\left(\mu^2+\mu-2\right) = (\mu-1)(\mu-1)(\mu+2) = (\mu-1)^2(\mu+2)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $\mu \neq 1$ και $\mu \neq -2$. Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{\mu+2}$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{\mu+2}$$
$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{\mu+2}$$

γιατί εύκολα βρίσκει κανείς ότι $D_x = D_y = D_z = (\mu-1)^2$

2. $\mu = 1$. Τότε το σύστημα καταλήγει στην x+y+z = 1, δηλαδή άπειρες λύσεις με δύο ελεύθερες παραμέτρους.
3. $\mu = -2$. Τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} -2x+y+z &= 1 \\ x-2y+z &= 1 \\ x+y-2z &= 1 \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο όπως φαίνεται αν προσθέσουμε όλες τις εξισώσεις κατά μέλη.

ii. Για το δεύτερο σύστημα έχουμε $D=(\nu+5)(\nu-2)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $\nu \neq -5$ και $\nu \neq 2$. Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{D_x}{D}=-\frac{3(\nu+1)}{\nu+5}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{4}{\nu+5}$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{4}{\nu+5}$$

2. $\nu=-5$ Τότε οι ορίζουσες υπολογίζονται ως $D_x=-84 \quad D_y=-28 \quad D_z=-28$ και επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

3. $\nu=2$ Τότε το σύστημα καταλήγει στην

$$\begin{aligned} x-3z &= -3 \\ 2x+2y-z &= -2 \\ x+2y+2z &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2x+2y-z &= -2 \\ x+2y+2z &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= -3+3z \\ y &= -\frac{5}{2}z+2 \end{aligned}$$

δηλαδή άπειρες λύσεις με μια ελεύθερη παράμετρο.

Θέμα 5 (μονάδες 10)

Δίνεται το τριώνυμο $(4\lambda-1)x^2+(\lambda-1)x-\lambda$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε οι ρίζες του :
α) να έχουν άθροισμα 4
β) να είναι ετερόσημες με απόλυτα μεγαλύτερη τη θετική και
γ) να είναι αντίστροφες.

ii. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η γραφική παράσταση του τριωνύμου:
α) να έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των y
β) να εφάπτεται στο άξονα των x
γ) να έχει κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη 1.

Απάντηση

Καταρχάς θα πρέπει $(4\lambda-1)\neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1/4$

i. Για να έχει το τριώνυμο ρίζες πρέπει η διακρίνουσά του να είναι Δ>0 που σημαίνει ότι

$$\beta^2-4\alpha\gamma>0 \Rightarrow (\lambda-1)^2-4(4\lambda-1)(-\lambda)>0 \Rightarrow$$
$$\lambda^2+1-2\lambda+16\lambda^2-4\lambda>0 \Rightarrow 17\lambda^2-6\lambda+1>0$$

Χρειάζεται τώρα να διερευνήσουμε πότε το τριώνυμο $17\lambda^2-6\lambda+1$ είναι θετικό. Επειδή η διακρίνουσα του είναι $\Delta'=(-6)^2-4\cdot 17\cdot 1=36-68=-32$ και είναι πάντα αρνητική το τριώνυμο $17\lambda^2-6\lambda+1$ είναι θετικό για κάθε λ. Άρα και το $(4\lambda-1)x^2+(\lambda-1)x-\lambda$ έχει ρίζες για κάθε λ.

α) Η συνθήκη για να έχουν οι ρίζες άθροισμα 4 είναι
$-\frac{\beta}{\alpha}=4 \Rightarrow -\frac{\lambda-1}{4\lambda-1}=4 \Rightarrow (1-\lambda)=4(4\lambda-1) \Rightarrow 1-\lambda=16\lambda-4 \Rightarrow 17\lambda=5 \Rightarrow \lambda=\frac{5}{17}$

(β) Από τα προηγούμενα έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη των δύο ριζών για κάθε λ.
Για να είναι οι ρίζες ετερόσημες πρέπει να ισχύει ότι
$\frac{\gamma}{\alpha}<0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{4\lambda-1}<0 \Rightarrow \lambda(4\lambda-1)>0 \Rightarrow \lambda<0$ ή $\lambda>0.25$
ενώ για να είναι απολύτως μεγαλύτερη η θετική θα ισχύει ότι
$-\frac{\beta}{\alpha}>0 \Rightarrow -\frac{\lambda-1}{4\lambda-1}>0 \Rightarrow (\lambda-1)(4\lambda-1)<0 \Rightarrow 0.25<\lambda<1$
Όλες λοιπόν οι συνθήκες συναληθεύουν όταν $0.25<\lambda<1$
γ) Για να είναι οι ρίζες αντίστροφες πρέπει να ισχύει ότι
$\frac{\gamma}{\alpha}=1 \Rightarrow -\frac{\lambda}{4\lambda-1}=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{5}$

ii.
α) Αφού το τριώνυμο έχει πάντα 2 ρίζες αρκεί να ζητήσουμε να έχουν άθροισμα 0. $-\frac{\beta}{\alpha}=0 \Rightarrow -\frac{\lambda-1}{4\lambda-1}=0 \Rightarrow \lambda=1$
β) θα πρέπει να είναι Δ=0 που όμως είναι αδύνατο όπως αποδείξαμε παραπάνω.
γ) η κορυφή έχει τεταγμένη $f(-\frac{\beta}{2\alpha})$ η οποία είναι ίση με 1. Άρα θα ισχύει ότι
$$f(-\frac{\beta}{2\alpha})=1 \Rightarrow (4\lambda-1)(-\frac{\lambda-1}{2(4\lambda-1)})^2+(\lambda-1)(-\frac{\lambda-1}{2(4\lambda-1)})-\lambda=1 \Rightarrow -17\lambda^2-10\lambda+3=0 \Rightarrow$$
$\lambda_1=-0.2, \lambda_2=-0.80$

Θέμα 6 (μονάδες 10)

i. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sin(ax+b)$. Να βρεθούν τα $a,b \in R$, ώστε η συνάρτηση να είναι περιττή.
ii. Αν για μια συνάρτηση g ισχύει $2g(x)+3g(-x)=5\cos x$, να δείξετε ότι η g είναι άρτια και να βρείτε τον τύπο της g.

Απάντηση

i. Για να είναι η συνάρτηση περιττή θα ισχύει ότι $f(-x)=-f(x) \Rightarrow \sin(-ax+b)=-\sin(ax+b) \Rightarrow \sin(-ax+b)=\sin(-ax-b) \Rightarrow$
$a)-ax+b=-ax-b+2k\pi \Rightarrow b=k\pi$ και α οτιδήποτε
και $b)-ax+b+(-ax-b)=\pi+2k\pi \Rightarrow -2ax=\pi+2k\pi$ (αδύνατο)
άρα είναι δεκτή η λύση b=kπ και α οτιδήποτε.

ii. $2g(x)+3g(-x)=5\cos x \Rightarrow 2g(-x)+3g(x)=5\cos(-x) \Rightarrow 2g(-x)+3g(x)=5\cos x$
αφού $\cos(-x)=\cos x$.

Επομένως
$2g(x)+3g(-x)=2g(-x)+3g(x)\Rightarrow 2g(x)-3g(x)=2g(-x)-3g(-x)\Rightarrow g(x)=g(-x)$
πράγμα που σημαίνει ότι η g είναι άρτια.
Αφού όμως $g(x)=g(-x)\Rightarrow 2g(x)+3g(-x)=2g(x)+3g(x)=5g(x)$ και επομένως $5g(x)=5\cos(x)\Rightarrow g(x)=\cos x$

Θέμα 7 (μονάδες 10)

i. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x+2$ και $g(x)=ax+4$.Για ποια τιμή του α ισχύει $f\circ g=g\circ f$;

ii. Εχει η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-1)$ αντίστροφη; Αν έχει να βρεθεί, αλλιώς να διερευνηθεί κάτω από ποιες προϋποθέσεις έχει αντίστροφη και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Απάντηση

i. $f\circ g=g\circ f\Rightarrow f(g(x))=g(f(x))\Rightarrow 3(ax+4)+2=a(3x+2)+4\Rightarrow$
$3ax+12+2=3ax+2a+4\Rightarrow 2a=10\Rightarrow a=5$

ii. Κατ'αρχήν θα πρέπει $x^2-1>0\Rightarrow x<-1$ ή $x>1$. Ορίζονται όμως έτσι δύο κλάδοι της συνάρτησης και δεν είναι 1-1 αφού για αντίθετα x η συνάρτηση παίρνει την ίδια τιμή. Επομένως δεν είναι αντιστρέψιμη. Μπορεί όμως να αντιστραφεί κατά κλάδο. Ορίζουμε λοιπόν τους κλάδους της συνάρτησης. Ο πρώτος θα είναι $f(x)=\ln(x^2-1), x>1$ και εδώ η συνάρτηση είναι 1-1 και «επί» αφού για $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ και το σύνολο των πραγματικών αριθμών R είναι εικόνα και πεδίο τιμων. Η αντίστροφη συνάρτηση του κλάδου μπορεί να βρεθεί ώς εξής: $y=\ln(x^2-1)\Rightarrow e^y=x^2-1\Rightarrow x^2=e^y+1\Rightarrow x=+\sqrt{e^y+1}$ (αφού είναι το x σαν μεγαλύτερο του 1 είναι εδώ θετικό). Η αντίστροφη λοιπόν συνάρτηση είναι η $y=+\sqrt{e^x+1}$.

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για τον άλλο κλάδο $f(x)=\ln(x^2-1), x<-1$, όπου και εδώ η συνάρτηση είναι 1-1 και «επί». Η αντίστροφη συνάρτηση θα είναι $y=\ln(x^2-1)\Rightarrow e^y=x^2-1\Rightarrow x^2=e^y+1\Rightarrow x=-\sqrt{e^y+1}$ (αφού το x σαν μικρότερο του -1 είναι αρνητικό) και η τελική της μορφή είναι $y=-\sqrt{e^x+1}$.

Θέμα 8 (μονάδες 10)

Δίνονται οι πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστούν με απ΄ ευθείας υπολογισμούς οι $\det \mathbf{A}$, $\det(3\,\mathbf{A})$, $\det \mathbf{B}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$, $\det \mathbf{A}^{-1}$, $\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$. Στη συνέχεια να επαληθευτεί ότι $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$ και $\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \det \mathbf{A}\,\det \mathbf{B}$. Ισχύει ότι $\det(3\,\mathbf{A}) = 3\,\det \mathbf{A}$;

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (24+6) + 4 \cdot (3+4) = 60 + 28 = 88 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -(9-14) + 8 \cdot (28-6) = 5 + 176 = 181 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(3\,\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 3 & 12 & -6 \\ -3 & 9 & 18 \\ 6 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ 9 & 18 \end{vmatrix} + 12 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot (216+54) + 12 \cdot (27+36) = 1620 + 756 = 2376 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\det(3\,\mathbf{A}) = 2376 = 27 \cdot 88 = 3^3 \cdot 88 \neq 3 \cdot 88$. Γενικά για ένα $N \times N$ πίνακα ισχύει ότι $\det(\lambda\,\mathbf{A}) = \lambda^N \det \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 4+4\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 2+4\cdot 7+(-2)\cdot 3 & 1\cdot(-1)+4\cdot 0+(-2)\cdot 8 \\ (-1)\cdot 4+3\cdot 3+6\cdot 2 & (-1)\cdot 2+3\cdot 7+6\cdot 3 & (-1)\cdot(-1)+3\cdot 0+6\cdot 8 \\ 2\cdot 4+0\cdot 3+4\cdot 2 & 2\cdot 2+0\cdot 7+4\cdot 3 & 2\cdot(-1)+0\cdot 0+4\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 24 & -17 \\ 17 & 37 & 49 \\ 16 & 16 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{88} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -16 & 30 \\ 16 & 8 & -4 \\ -6 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{22} & -\frac{2}{11} & \frac{15}{44} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{22} \\ -\frac{3}{44} & \frac{1}{11} & \frac{7}{88} \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 0.136 & -0.182 & 0.341 \\ 0.182 & 0.091 & -0.045 \\ -0.068 & 0.091 & 0.080 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A}^{-1} &= \frac{3}{22}\left(\frac{1}{11}\frac{7}{88} + \frac{1}{22}\frac{1}{11}\right) + \frac{2}{11}\left(\frac{2}{11}\frac{7}{88} - \frac{3}{44}\frac{1}{22}\right) + \frac{15}{44}\left(\frac{2}{11}\frac{1}{11} + \frac{1}{11}\frac{3}{44}\right) \\
&= \frac{1}{88} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \begin{vmatrix} 12 & 24 & -17 \\ 17 & 37 & 49 \\ 16 & 16 & 30 \end{vmatrix} \\
&= 12 \cdot \begin{vmatrix} 37 & 49 \\ 16 & 30 \end{vmatrix} - 24 \cdot \begin{vmatrix} 17 & 49 \\ 16 & 30 \end{vmatrix} - 17 \cdot \begin{vmatrix} 17 & 37 \\ 16 & 16 \end{vmatrix} \\
&= 15928 = 88 \cdot 181 = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Θέμα 9 (μονάδες 10)

Δίνεται ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

καθώς και ο πίνακας

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o & 0 \\ \sin 30^o & \cos 30^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος 'περιστρέφει' τον $\mathbf{A}$ κατά 30^o. Αυτό γίνεται σε συνδυασμό με τον πίνακα που 'περιστρέφει' τον $\mathbf{A}$ κατά την αντίθετη φορά, δηλ. κατά -30^o:

$$\mathbf{R^T} = \begin{pmatrix} \cos(-30^o) & -\sin(-30^o) & 0 \\ \sin(-30^o) & \cos(-30^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o & 0 \\ -\sin 30^o & \cos 30^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η δράση της περιστροφής από τους πίνακες $\mathbf{R}$, $\mathbf{R^T}$ πάνω στον $\mathbf{A}$ μας δίνει τον 'περιστραμμένο' πίνακα

$$\mathbf{A_R} = \mathbf{R}\,\mathbf{A}\,\mathbf{R^T}$$

(α΄) Υπολογίστε τον πίνακα $\mathbf{A_R}$

(β΄) Δείξτε ότι η ορίζουσα $\det \mathbf{A_R} = \det \mathbf{A}$.

(γ΄) Δείξτε ότι η δράση του $\mathbf{R^T}$ αναιρεί αυτή του $\mathbf{R}$ 'περιστρέφοντας ' τον $\mathbf{A_R}$ πίσω στον $\mathbf{R}$. Δηλαδή ότι $\mathbf{R^T A_R R} = \mathbf{A}$.

(δ΄) Δείξτε ότι η δράση του $\mathbf{R}$ δύο φορές, 'περιστρέφει' τον $\mathbf{A}$ κατά $30^o + 30^o = 60^o$. Αρκεί να δείξετε, αφού το δικαιολογήσετε, ότι

$$\mathbf{R^2} = \mathbf{R}\,\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos 60^o & -\sin 60^o & 0 \\ \sin 60^o & \cos 60^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ε΄) Δείξτε ότι οι τιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ επαληθεύουν και τις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$\det(\mathbf{A_R} - \lambda \mathbf{I_3}) = 0 \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I_3}) = 0$$

όπου

$$\mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας. (Σημ: Οι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ λέγονται ιδιοτιμές των δύο πινάκων και όπως βλέπετε είναι κοινές).

(ϛ′) Δείξτε ότι $\mathbf{R}\,\mathbf{R^T} = \mathbf{R^T}\,\mathbf{R} = \mathbf{I_3}$.

Υπόδειξη: Δίνεται ότι $\sin 30^o = \cos 60^o = 1/2$ και $\cos 30^o = \sin 60^o = \sqrt{3}/2$. Δεν είναι ανάγκη να χρησιμοποιήσετε σχέσεις τριγωνομετρίας, αρκεί να αντικαταστήσετε τις παραπάνω τιμές (αν φυσικά τις γνωρίζετε μπορείτε να τις χρησιμοποιήσετε). Στην παράγραφο 5.4 του βιβλίου σας μπορείτε να βρείτε χρήσιμες πληροφορίες.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(α′)

$$\begin{aligned} \mathbf{A_R} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 \cdot \frac{1}{2} & 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(β′)

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$\det \mathbf{A_R} = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 6$$

(γ′)

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A_R} \cdot \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του τελευταίου υποερωτήματος της άσκησης αυτής $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ παίρνουμε:

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A_R} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_3 = \mathbf{A}$$

(δ′)

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 60^o & -\sin 60^o & 0 \\ \sin 60^o & \cos 60^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Παρομοίως παίρνουμε

$$(\mathbf{R}^T)^2 = (\mathbf{R}^2)^T = \begin{pmatrix} \cos 60^o & \sin 60^o & 0 \\ -\sin 60^o & \cos 60^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Τότε η δράση του $\mathbf{R}$ δύο φορές είναι

$$\mathbf{A} \to \mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^T \to \mathbf{R}\cdot(\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^T)\cdot\mathbf{R}^T = (\mathbf{R})^2\cdot\mathbf{A}\cdot(\mathbf{R}^T)^2$$

που σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην άσκηση ‘στρέφει’ τον πίνακα $\mathbf{A}$ κατά $30^o + 30^o = 60^o$

(ε′)

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

έχει λύσεις τις $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A_R}-\lambda\,\mathbf{I}_3) &= \begin{vmatrix} \frac{5}{4}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} \frac{5}{4}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\cdot\left[(\frac{5}{4}-\lambda)(\frac{7}{4}-\lambda)-\frac{3}{16}\right] \\ &= \frac{(3-\lambda)}{16}\cdot[(5-4\,\lambda)(7-4\,\lambda)-3] \end{aligned}$$

Με απλή αντικατάσταση των τιμών $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ στην παραπάνω έκφραση βρίσκουμε ότι μηδενίζουν την παραπάνω ορίζουσα.

(ϛ′)

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θέμα 10 (μονάδες 10)

Δίνονται οι πίνακες $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{A_R}$ σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση. Έστω οι πίνακες γραμμή/στήλη:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y^T} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Η δράση του $\mathbf{R}$ πάνω στα $\mathbf{y}$, $\mathbf{y^T}$ τα περιστρέφει δίνοντας τους πίνακες

$$\mathbf{y_R} = \mathbf{R}\,\mathbf{y} \qquad \mathbf{y_R^T} = \mathbf{y^T}\,\mathbf{R^T}$$

(α΄) Δείξτε ότι $\mathbf{y_R^T}\,\mathbf{A_R}\,\mathbf{y_R} = \mathbf{y^T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{y}$.

(β΄) Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{v^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v^1} = \lambda_1\mathbf{v^1} \qquad \mathbf{A}\,\mathbf{v^2} = \lambda_2\mathbf{v^2} \qquad \mathbf{A}\,\mathbf{v^3} = \lambda_3\mathbf{v^3}$$

όπου, όπως στην προηγούμενη άσκηση $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

(γ΄) Δείξτε ότι

$$\mathbf{A_R}\,\mathbf{v_R^1} = \lambda_1\mathbf{v_R^1} \qquad \mathbf{A_R}\,\mathbf{v_R^2} = \lambda_2\mathbf{v_R^2} \qquad \mathbf{A_R}\,\mathbf{v_R^3} = \lambda_3\mathbf{v_R^3}$$

όπου $\mathbf{v_R^1} = \mathbf{R}\mathbf{v^1}$, $\mathbf{v_R^2} = \mathbf{R}\mathbf{v^2}$, $\mathbf{v_R^3} = \mathbf{R}\mathbf{v^3}$, (Σημ.: Τα διανύσματα $\mathbf{v^1}$, $\mathbf{v^2}$, $\mathbf{v^3}$ και $\mathbf{v_R^1}$, $\mathbf{v_R^2}$, $\mathbf{v_R^3}$ λέγονται τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A_R}$ αντίστοιχα. Μόλις αποδείξατε ότι τα ιδιοδιανύσματα του περιστραμμένου πίνακα $\mathbf{A_R}$ προκύπτουν από την περιστροφή των ιδιοδιανυσμάτων του αρχικού πίνακα $\mathbf{A}$!)

ΛΥΣΗ

(α′)

$$\mathbf{y_R} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y_R}^T &= \mathbf{y}^T\cdot\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 & \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 & y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{y_R}^T\cdot\mathbf{A_R}\cdot\mathbf{y_R} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 & \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 & \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - y_2 \\ \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{3}y_2 \\ 3y_3 \end{pmatrix} =$$

$$y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{y} &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_2 \\ 3y_3 \end{pmatrix} = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 \end{aligned}$$

(β′)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{v}^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\mathbf{v}^1 \\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{v}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot\mathbf{v}^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}^3 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot\mathbf{v}^3$$

(γ')

$$\begin{aligned}
{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^1 &= \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^2 &= \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^3 &= \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\mathbf{R}}\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^1 &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^1 = \lambda_1\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^1 \\
\mathbf{A}_{\mathbf{R}}\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^2 &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^2 = \lambda_2\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^2 \\
\mathbf{A}_{\mathbf{R}}\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^3 &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^3 = \lambda_3\cdot{\mathbf{v}_{\mathbf{R}}}^3
\end{aligned}$$