

2^η ΕΡΓΑΣΙΑ
Παράδοση 21-12-08

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

Άσκηση 1η

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} & \gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2 x} \\ \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} & \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} & \end{array}$$

Άσκηση 2^η

2-1. Υπολογίστε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = x^x$

β) $y = \ln[\cos(1/x)]$

γ) $y = \ln[\sin(1-2x)]$

δ) $y = x^2 e^{x^2} \sin 3x$

2-2. Υπολογίστε την 1^η και 2^η παράγωγο (δηλαδή $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ αντίστοιχα) αν:

$$x^2 - y^2 + x - 2y + 1 = 0$$

Άσκηση 3η

Δίνονται οι παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις:

$$\vec{u} = 5t\hat{i} - \hat{j} + t^2\hat{k} \quad \text{και} \quad \vec{v} = \sin t\hat{i} + \cos t\hat{k}.$$

Υπολογίστε:

$$\alpha) \frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v}), \quad \beta) \frac{d}{dt}(\vec{u} \bullet \vec{v}), \quad \gamma) \frac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v}), \quad \delta) \frac{d}{dt}(\vec{u} \bullet \vec{u})$$

Άσκηση 4^η

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα (όπου $a \in \mathbb{R}$):

$$\alpha) \int x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \quad \beta) \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} \quad \gamma) \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} \quad \delta) \int x^3 e^x dx$$

Άσκηση 5^η

Να αποδειχθούν οι σχέσεις

$$\alpha) \int \cos^m x dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x dx$$

$$\beta) \int \sin^m x dx = \frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx$$

Άσκηση 6^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ με τύπο $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$

γ) Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς την μονοτονία.

δ) Να δείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστροφής της.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$, τον άξονα x και την ευθεία $x=1$

Άσκηση 7^η

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{3f^2(t) + 2} dt$$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρεθεί ο τύπος της αντιστροφής συνάρτησης $f^{-1}(x)$.

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, τους άξονες x , y και την ευθεία $x=3$.

Άσκηση 8^η

α) Να βρεθεί το ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδό που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R .

β) Να βρεθεί το ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν που είναι εγγεγραμμένο σε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου μία ορθή γωνία συμπίπτει με την ορθή γωνία του τριγώνου.

Άσκηση 9^η

9-1. Να βρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτομένης και της καθέτου για τις παρακάτω καμπύλες στα σημεία που σημειώνονται εντός παρενθέσεως:

$$\alpha) y = x^2 - 4x + 5 \quad (x_0 = 1)$$

$$\beta) y = x^3 - 2x^2 \quad (x_0 = 2)$$

$$\gamma) y = \tan x + \cot x \quad \left(x_0 = \frac{\pi}{6}\right)$$

9-2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες:

$$\alpha) x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4x$$

$$\beta) y^2 = 2x, \quad y^2 = 4x - x^2$$

Άσκηση 10^η

Να γίνει η μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$.