$2^{η}$ ΕΡΓΑΣΙΑ
Παράδοση 21-12-08

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

Άσκηση 1η

Υπολογίστε τα κάτωθι όρια:

α) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ β) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ γ) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2 x}$

δ) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ ε) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}$

Λύσεις

α) Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital μια φορά (απροσδιοριστία της μορφής 0/0)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$

β) Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital μια φορά (απροσδιοριστία της μορφής 0/0)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

γ) Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital δύο φορές (απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2 x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(\ln^2 x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\ln x(\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\ln x\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(2\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=\infty$$

δ) <u>α΄ τρόπος</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1-2/x)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1-2/x)}{(x-1)}$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital μια φορά (απροσδιοριστία της μορφής 0/0)

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1-2/x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1+2/x^2}{1} = 3$$

<u>β΄ τρόπος</u>

Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital μια φορά (απροσδιοριστία της μορφής 0/0)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)'}{(x^2-x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = 3$$

ε) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{5x}\lim_{x\to 0}\cos x = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos x = \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}$

Άσκηση 2η

2-1. Υπολογίστε την παράγωγο των κατωτέρω συναρτήσεων:

α) $y=x^x$

β) $y=\ln[\cos(1/x)]$

γ) $y=\ln[\sin(1-2x)]$

δ) $y = x^2 e^{x^2}\sin 3x$

2-2. Υπολογίστε την 1η και 2η παράγωγο (δηλαδή $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ αντίστοιχα) αν:

$x^2- y^2+ x- 2y+1=0$

Λύσεις

2-1.

α)

$$y = x^x$$

$$\ln y = x\ln x \Rightarrow \ln y' = (x\ln x)' \Rightarrow \frac{1}{y}y' = \ln x + 1 \Rightarrow$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

β)

$$y = \ln[\cos(1/x)]$$

$$y' = \frac{1}{\cos(1/x)}[\cos(1/x)]' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos(1/x)}\cdot[-\sin(1/x)]\cdot(1/x)'$$

$$y' = \frac{\sin(1/x)}{\cos(1/x)}\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2}\tan(1/x)$$

γ)

$$y' = \ln[\sin(1-2x)]' \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\sin(1-2x)}\sin(1-2x)' \Rightarrow y' = \frac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)}(1-2x)' \Rightarrow y' = -2\cot(1-2x)$$

δ)

$$y = x^2 e^{x^2}\sin 3x$$

$$y' = (x^2 e^{x^2})'\sin 3x + x^2 e^{x^2}(\sin 3x)' \qquad (1)$$

Έστω ότι

$$z = x^2 e^{x^2}$$

$$\ln z = \ln x^2 + \ln e^{x^2} \Rightarrow$$

$$\ln z = x^2 + \ln x^2$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή όποτε έχουμε:

$$\frac{1}{z}z' = (x^2)' + \ln(x^2)' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z}z' = 2x + \frac{1}{x^2}2x \Rightarrow$$

$$z' = 2z(x + \frac{1}{x})$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται:

$$y' = (x^2 e^{x^2})'\sin 3x + x^2 e^{x^2}(\sin 3x)'$$

$$y' = 2x^2 e^{x^2}(x + \frac{1}{x})\sin 3x + 3x^2 e^{x^2}(\cos 3x)$$

Σημείωση: Η άσκηση 2-1 δ) λύνεται και με τον κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων

2-2.

Παραγωγίζουμε ως προς x την έκφραση που δίνεται και προκύπτει:

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} + 1 - 2\frac{dy}{dx} + 0 = 0 \Rightarrow 2\frac{dy}{dx}(y+1) = 2x+1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{2(y+1)}, y \neq -1$$

Με παραγώγιση της ανωτέρω σχέσης καταλήγουμε στην $2^{η}$ παράγωγο:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\cdot 2(y+1) - (2x+1)\cdot 2\cdot\frac{dy}{dx}}{4(y+1)^2} = \frac{1}{y+1} - \frac{(2x+1)\frac{dy}{dx}}{2(y+1)^2} = \frac{1}{y+1} - \frac{(2x+1)\frac{2x+1}{2(y+1)}}{2(y+1)^2} =$$

$$\frac{1}{y+1} - \frac{(2x+1)^2}{4(y+1)^3}, y \neq -1$$

Άσκηση 3η

Δίδονται οι κατωτέρω διανυσματικές συναρτήσεις:
$\vec{u} = 5t\hat{i} - \hat{j} + t^2\hat{k}$ και $\vec{v} = \sin t\hat{i} + \cos t\hat{k}$.
Υπολογίστε:
α) $\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v})$, β) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\bullet\vec{v})$, γ) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})$, δ) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\bullet\vec{u})$

Λύσεις

α)
$$\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{d}{dt}[(5t+\sin t)\hat{i} - \hat{j} + (t^2+\cos t)\hat{k}] = (5+\text{cost})\hat{i} + 0\hat{j} + (2t-\sin t)\hat{k} =$$
$$= (5+\text{cost})\hat{i} + (2t-\sin t)\hat{k}$$

β)
$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\bullet\vec{v}) = \frac{d}{dt}(5t\sin t + (-1)(0) + t^2\cos t) = 5\sin t + 5t\cos t + 2t\cos t - t^2\sin t =$$
$$= -t^2\sin t + 7t\cos t + 5\sin t = \sin t(5-t^2) + 7t\cos t$$

γ)
$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5t & -1 & t^2 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{vmatrix} = \frac{d}{dt}[(-\cos t - t^2\cdot 0)\hat{i} - (5t\cos t - t^2\sin t)\hat{j} + (5t\cdot 0 + \sin t)\hat{k}] =$$
$$= (\sin t)\hat{i} - (5\cos t - 5t\sin t - 2t\sin t - t^2\cos t)\hat{j} + (\cos t)\hat{k} = (\sin t)\hat{i} + (t^2\cos t + 7t\sin t - 5\cos t)\hat{j}$$
$$+(\cos t)\hat{k}$$

δ)
$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\bullet\vec{u}) = \frac{d}{dt}[5t\cdot 5t + (-1)(-1) + t^2\cdot t^2] = \frac{d}{dt}(25t^2 + 1 + t^4) = 50t + 4t^3$$

<u>Σημείωση</u>: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με τη χρήση των κανόνων παραγώγισης αθροίσματος, εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου διανυσματικών συναρτήσεων.

Άσκηση 4η

Να υπολογιστούν τα κάτωθι ολοκληρώματα (όπου $\alpha \in \mathbb{R}$):

α) $\int x\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$ β) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ γ) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ δ) $\int x^3e^x dx$

Λύσεις

α) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση.

Θέτουμε $u = a^2 + x^2, οπότε \ \ du = 2xdx \Rightarrow xdx = \dfrac{du}{2}$ και παίρνουμε

$$\int x \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} = \int \frac{du}{2\sqrt{u^3}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{u^{-1/2}}{(-\frac{1}{2})} + c = -\frac{1}{\sqrt{u}} + c = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + c$$

β) Θέτουμε

$$\sqrt{a^2+x^2} = t - x \Rightarrow a^2 + x^2 = t^2 + x^2 - 2xt \Rightarrow x = \frac{t^2-a^2}{2t} \Rightarrow \sqrt{a^2+x^2} = t - \frac{t^2-a^2}{2t} =$$

$$= \frac{2t^2 - t^2 + a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t}$$

και $dx = \dfrac{2t \cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}dt \Rightarrow dx = \dfrac{t^2+a^2}{2t^2}dt$

οπότε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}}{\frac{t^2+a^2}{2t}}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

γ) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο ανάλυσης σε κλάσματα

$\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$. Τα A, B, C είναι προς προσδιορισμό.

Κάνοντας απαλοιφή παρανομαστών προκύπτει η εξίσωση

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \Rightarrow 1 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές των ομοβαθμίων όρων του x προκύπτει το σύστημα

$$A + B = 0$$
$$C = 0$$
$$A = 1$$

και ευρίσκουμε A=1, B=-1, C=0, οπότε

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

δ) Θα εφαρμόσουμε διαδοχικά την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int e^x d(x^3) = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx \quad (1)$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - 2\int x e^x dx \quad (2)$$

και τέλος

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) και την (2) στην (1) προκύπτει

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + c)] =$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

Άσκηση 5$^{\eta}$

Να αποδειχθούν οι σχέσεις

α) $\int \cos^m x dx = \dfrac{\cos^{m-1} x \sin x}{m} + \dfrac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x dx$

β) $\int \sin^m x dx = -\dfrac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \dfrac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x dx$

Λύσεις
α)

$$\int \cos^m x dx = \int \cos^{m-1} x \cos x dx = \int \cos^{m-1} x (\sin x)' dx$$
$$= \sin x \cos^{m-1} x - \int \left(\cos^{m-1} x\right)' \sin x dx$$
$$= \sin x \cos^{m-1} x - \int (m-1)\cos^{m-2} x (\cos x)' \sin x dx =$$
$$= \sin x \cos^{m-1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^2 x dx$$
$$= \sin x \cos^{m-1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \left(1 - \cos^2 x\right) dx$$
$$= \sin x \cos^{m-1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x dx - (m-1)\int \cos^{m-2} x \cos^2 x dx$$
$$= \sin x \cos^{m-1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x dx - (m-1)\int \cos^m x dx$$
$$\Rightarrow \int \cos^m x dx + (m-1)\int \cos^m x dx = \sin x \cos^{m-1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x dx$$
$$\Rightarrow m\int \cos^m x dx = \sin x \cos^{m-1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x dx$$
$$\Rightarrow \int \cos^m x dx = \frac{\sin x \cos^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x dx$$

β)

$$\int \sin^m xdx = \int \sin^{m-1} x \sin xdx = \int \sin^{m-1} x\left(-\cos x\right)' dx$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + \int \left(\sin^{m-1} x\right)' \cos xdx$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + \int \left(m-1\right)\sin^{m-2} x\left(\sin x\right)' \cos xdx$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + \left(m-1\right)\int \sin^{m-2} x \cos^2 xdx$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + \left(m-1\right)\int \sin^{m-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + \left(m-1\right)\int \sin^{m-2} xdx - \left(m-1\right)\int \sin^{m-2} x \sin^2 xdx$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + \left(m-1\right)\int \sin^{m-2} xdx - \left(m-1\right)\int \sin^{m} xdx$$

$$\Rightarrow \int \sin^m xdx + \left(m-1\right)\int \sin^m xdx = -\cos x \sin^{m-1} x + \left(m-1\right)\int \sin^{m-2} xdx$$

$$\Rightarrow m\int \sin^m xdx = -\cos x \sin^{m-1} x + \left(m-1\right)\int \sin^{m-2} xdx$$

$$\Rightarrow \int \sin^m xdx = -\frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} xdx$$

Άσκηση 6^{η}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ με τύπο $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x}$

γ) Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς την μονοτονία.

δ) Να δείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστροφής της.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την αντίστροφη. συνάρτηση $f^{1}(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία x=1

Λύσεις

(α) Π.Ο. $= \left(-\infty, +\infty\right)$

(β)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}2x}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

(γ) $f(x)'=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=\dfrac{1+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}2x}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$

Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο **R**

(δ) Θέτουμε $y=f(x)$ και έχουμε

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Leftrightarrow e^y=x+\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow e^y-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow\left(e^y-x\right)^2=x^2+1\Leftrightarrow$$

$$e^{2y}-2xe^y+x^2=x^2+1\Leftrightarrow e^{2y}-2xe^y=1\Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$

(ε) Για $x\geq 0$ έχουμε $e^{2x}\geq 1$ και $f^{-1}(x)\geq 0$

Επομένως

$$E=\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^1\frac{e^{2x}-1}{2e^x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1=\frac{e^2-2e+1}{2e}$$

Άσκηση 7η

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{3f^2(t)+2}dt$$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$.
γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f^{-1}(x)$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=3$.

Λύσεις

(α) $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+2}>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ κατά συνέπεια η f είναι μονοτονική άρα αντιστρέφεται.

(β) $3f'(x)f^2(x)+2f'(x)=1\Rightarrow\left(f^3(x)+2f(x)\right)'=(x)'\Rightarrow f^3(x)+2f(x)=x+c$
Για x=0, έχουμε f(x)=0, συνεπώς c=0 και τελικά $f^3(x)+2f(x)=x$

Θέτοντας $f(x)=y\Rightarrow x=f^{-1}(y)$, η (1) γίνεται

$y^3+2y=x \quad$ ή $\quad f^{-1}(y)=y^3+2y, \quad y\in\mathbf{R}$

και αλλάζοντας μεταβλητή, $f^{-1}(x)=x^3+2x, \quad x\in\mathbf{R}$

(γ) Για $x\geq 0$, ισχύει $f(x)\geq f(0)=0$, οπότε

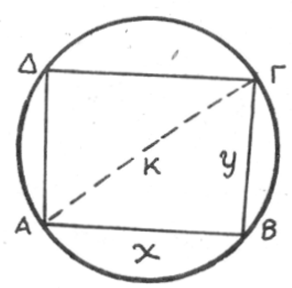
Για x=3 έχουμε $y=f(3)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=3\Leftrightarrow y^3+2y=3\Leftrightarrow y=1$

Άρα, $E=\int_0^1 y\left(y^3+2y\right)'dy=\int_0^1 y\left(3y^2+2\right)dy=\int_0^1 3y^3dy+\int_0^1 2y\,dy=\frac{7}{4}m^2$

Άσκηση 8η

α) Να βρεθεί το ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R.
β) Να βρεθεί το ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν που είναι εγγεγραμμένο σε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου μία ορθή γωνία συμπίπτει με την ορθή γωνία του τριγώνου.

Λύσεις
α)



Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=(\mathrm{AB})(\mathrm{B\Gamma})=xy$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει ότι $x^2+y^2=(2R)^2\Rightarrow y^2=4R^2-x^2\Rightarrow y=\sqrt{4R^2-x^2}$

Επομένως $E = x\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$.
Στην τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται το εμβαδόν θα πρέπει

$$\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\left(4R^2x^2 - x^4\right)'}{2\sqrt{4R^2x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow \frac{8R^2x - 4x^3}{2\sqrt{4R^2x^2 - x^4}} = -2\frac{x^2 - 2R^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0$$

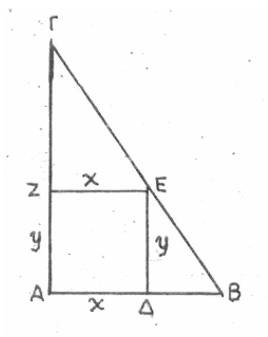
$$\Rightarrow x^2 = 2R^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}R$$

Ελέγχουμε εάν το σημείο αυτό είναι μέγιστο παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο

$$\frac{d^2E}{dx^2} = -2\frac{2x\sqrt{4R^2 - x^2} - \left(x^2 - 2R^2\right)\frac{-x}{\sqrt{4R^2 - x^2}}}{4R^2 - x^2}$$ η οποία για $x = \sqrt{2}R$ είναι αρνητική.

Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου μεγιστοποιείται όταν $x = \sqrt{2}R$ και $y = \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{2}R$. Άρα το ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R είναι τετράγωνο με πλευρά μήκους $\sqrt{2}R$

β)



Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = (\mathrm{ZE})(\mathrm{AZ}) = x \cdot y$.
Όμως τα τρίγωνα ΓΖΕ και ΓΑΒ είναι όμοια, επομένως ισχύει

$$\frac{(\mathrm{ZE})}{(\mathrm{AB})} = \frac{(\Gamma\mathrm{Z})}{(\Gamma\mathrm{A})} \Rightarrow \frac{x}{\gamma} = \frac{\beta - y}{\beta} \Rightarrow x = \frac{\gamma}{\beta}(\beta - y)$$ όπου $\beta = (\mathrm{A}\Gamma)$ και $\gamma = (\mathrm{AB})$

Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου γράφεται ως $E = \frac{\gamma}{\beta}(\beta - y)y = \frac{\gamma}{\beta}\left(\beta y - y^2\right)$

Για να είναι το εμβαδόν μέγιστο θα πρέπει $\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{\beta}(\beta - 2y) = 0 \Rightarrow y = \frac{\beta}{2}$

Επίσης $\frac{d^2E}{dy^2} = -2\frac{\gamma}{\beta} < 0$ άρα μέγιστο.

Επομένως το ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν που είναι εγγεγραμμένο σε ορθογώνιο τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη $y = \frac{\beta}{2}$ και $x = \frac{\gamma}{\beta}(\beta - y) = \frac{\gamma}{2}$, δηλαδή το ήμισυ των πλευρών του τριγώνου.

Άσκηση 9η

9-1. Να βρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτομένης και της καθέτου για τις παρακάτω καμπύλες στα σημεία που σημειώνονται εντός παρενθέσεως:

α) $y = x^2 - 4x + 5$ $\quad (x_0 = 1)$

β) $y = x^3 - 2x^2$ $\quad (x_0 = 2)$

γ) $y = \tan x + \cot x$ $\quad \left(x_0 = \dfrac{\pi}{6}\right)$

Λύσεις

Η εφαπτομένη είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ όπου ο συντελεστής λ ισούται με την τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο x_0.

α) Για $x_0 = 1$ έχουμε ότι $y_0 = 2$.
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - 2 = \lambda(x - 1)$ όπου
$\lambda = f'(x_0) = 2x_0 - 4 = -2$. Επομένως έχουμε τελικά ότι
$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$
Η εξίσωση της καθέτου είναι επίσης της μορφής $y - y_0 = \lambda'(x - x_0)$ όπου $\lambda' = -\dfrac{1}{\lambda}$
Άρα έχουμε $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

β) Για $x_0 = 2$, $y_0 = 0$. Επίσης $f'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 = 4$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 4(x - 2)$ ενώ της καθέτου είναι $y = -\dfrac{1}{4}(x - 2)$

γ) Για $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $y_0 = \tan\dfrac{\pi}{6} + \cot\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
Ακόμη $f'(x_0) = \dfrac{1}{\cos^2 x_0} - \dfrac{1}{\sin^2 x_0} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{3} - 4 = -\dfrac{8}{3}$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ και της καθέτου είναι
$y - \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

9-2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες:

α) $x^2 + y^2 = 4$, $\quad x^2 + y^2 = 4x$

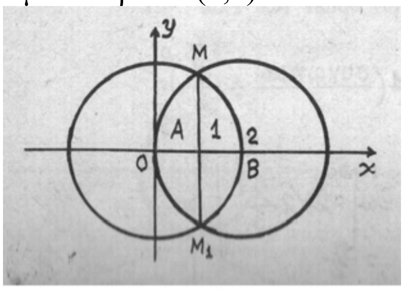
β) $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x - x^2$

Λύσεις

α) Η πρώτη εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα $R = 2$, ενώ η δεύτερη μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow \left(x-2\right)^2 + y^2 = 4$$

Επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το (2,0) και ακτίνα επίσης $R = 2$



Λόγω συμμετρίας, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις δύο καμπύλες δίνεται από τη σχέση

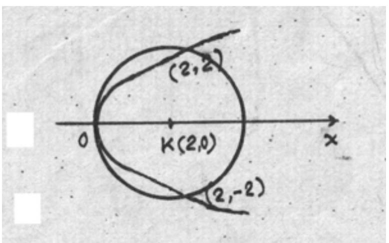
$$E = 4\int_1^2 y dx = 4\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $x = 2\sin t$, έχουμε $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t$, ενώ $dx = d\left(2\sin t\right) = 2\cos t$. Όσον αφορά τα όρια της ολοκλήρωσης για $x = 1$ έχουμε $t = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, ενώ για $x = 2$, $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$E = 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{8\pi}{3} + 4\left[\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{8\pi}{3} + 4\left[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{8\pi}{3} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

β) Η καμπύλη $y^2 = 2x$ παριστάνει παραβολή με κορυφή το (0,0) ενώ η $y^2 = 4x - x^2$ γράφεται στη μορφή $\left(x-2\right)^2 + y^2 = 4$, επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το (2,0) και ακτίνα $R = 2$



Τα σημεία τομής των δύο καμπύλων είναι τα (2,2) και (2,-2). Λόγω συμμετρίας το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$E = 2\int_0^2 \left(\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}\right)dx = 2\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx - 2\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{4x - x^2 - 4 + 4}\,dx - 2\sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = 2\int_0^2 \sqrt{4 - (x-2)^2}\,dx - \frac{4\sqrt{2}}{3}2^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{4 - (x-2)^2}\,dx - \frac{16}{3}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$ υπολογίζεται κάνοντας την αντικατάσταση $x - 2 = 2\sin t$, οπότε έχουμε $\sqrt{4-(x-2)^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t$, $dx = 2\cos t\,dt$. Τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται για $x = 0$, $t = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, ενώ για $x = 2$, $t = \arcsin 0 = 0$.

Επομένως έχουμε

$$\int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 4\cos^2 t\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1+\cos 2t)\,dt = \pi + [\sin 2t]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \pi$$

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου είναι τελικά $E = 2\pi - \frac{16}{3} = 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right)$.

Άσκηση 10η

Να γίνει η μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$.

Λύσεις

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το R, είναι συνεχής και περιττή, διότι $f(-x)=-f(x)$.

Θα βρούμε τις ρίζες της συνάρτησης.

$$f(x) = x^3 - x \Rightarrow f(x) = x(x^2 - 1) \Rightarrow f(x) = x(x-1)(x+1)$$

Οι ρίζες είναι $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, και τα σημεία τομής της f(x) με τον άξονα των x είναι τα -1, 0, 1.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την $1^η$ παράγωγο της f(x).

$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 1$. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος είναι τα

$x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.577, x_5 = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$. Στα σημεία αυτά είναι δυνατό να παρουσιάζει ακρότατα.

Στα διαστήματα $(-\infty, x_4)$ και $(x_5, +\infty)$ η 1η παράγωγος είναι θετική και η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Στο διάστημα (x_4, x_5) η 1η παράγωγος είναι αρνητική και η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Υπολογίζουμε την 2η παράγωγο της $f(x)$.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 6x \,.$$

Για $x = x_4$ είναι $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ και η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, $f(x_4) \approx 0.385$.

Για $x = x_5$ είναι $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ και η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, $f(x_5) \approx -0.385$.

Στο $(-\infty, 0)$ η 2η παράγωγος είναι αρνητική και η $f(x)$ είναι κοίλη.

Στο $(0, +\infty)$ η 2η παράγωγος είναι θετική και η $f(x)$ είναι κυρτή.

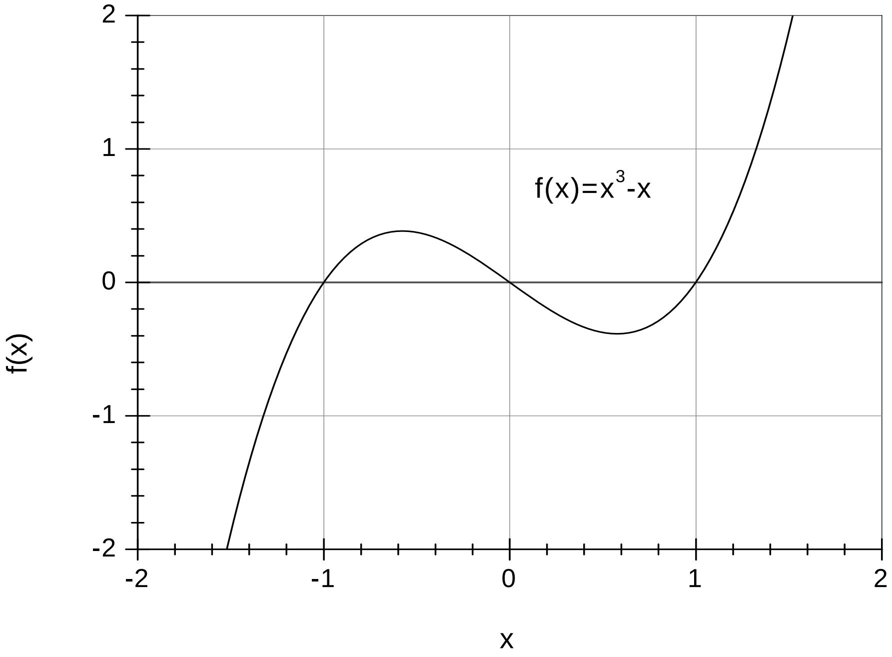
Στο σημείο x=0 η 2η παράγωγος μηδενίζεται και το (0, $f(0)$=(0,0) είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

Η $f(x)$ δεν έχει ασύμπτωτες.

Πίνακας μελέτης της συνάρτησης $f(x)$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
f'			+		0		-		0		+		
f''			-				0				+		
f			0				0				0		
	Αύξουσα κοίλα άνω			Αύξουσα κοίλα άνω		φθίνουσα κοίλα κάτω		φθίνουσα κοίλα άνω		Αύξουσα κοίλα άνω		Αύξουσα κοίλα άνω	
					Τοπικό μέγιστο		Σημείο καμπής		Τοπικό ελάχιστο				

Η γραφική παράσταση της $f(x)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα


f(x)=x3-x
f(x)
x
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2