ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Παράδοση 9-2-2009

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

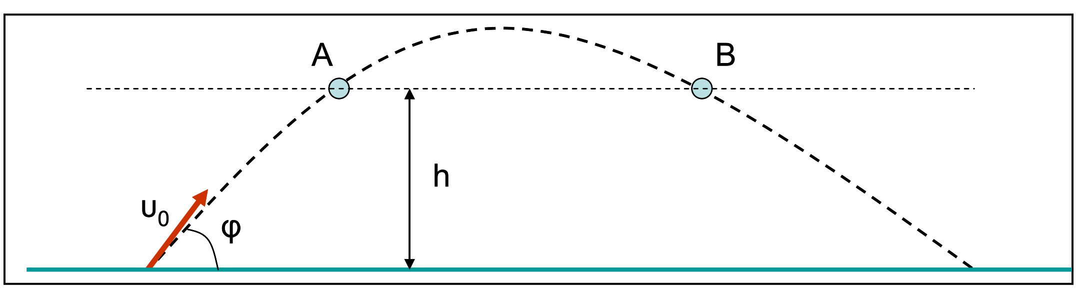
Άσκηση 1

Α) Δυο τραίνα ταξιδεύουν στην ίδια σιδηροτροχιά το ένα πίσω από το άλλο. Το πρώτο τραίνο κινείται με ταχύτητα $12\,m/s$. Το δεύτερο τραίνο πλησιάζει από πίσω με ταχύτητα $20\,m/s$. Όταν το δεύτερο τραίνο είναι $200m$ πίσω από το πρώτο, ο μηχανοδηγός του δεύτερου τραίνου εφαρμόζει πέδηση σταθερής επιβράδυνσης $0.2\,m/s^2$.

1. Θα συγκρουστούν τα δύο τραίνα, και αν ναι σε ποια χρονική στιγμή και σε ποιά θέση x από το σημείο εφαρμογής της πέδησης;
2. Τι θα συμβεί αν το δεύτερο τραίνο έχει αρχική ταχύτητα $25\,m/s$ (θα συγκρουστούν και αν ναι, σε ποια χρονική στιγμή και σε ποιά θέση); Να εξετάσετε επίσης την περίπτωση κατά την οποία τα τραίνα κινούνται με τις ίδιες αρχικές συνθήκες αλλά σε παράλληλες σιδηροτροχιές.
3. Δώστε τη γραφική παράσταση μεταβολής της θέσης των δύο τραίνων σαν συνάρτηση του χρόνου και βρείτε γραφικά τη λύση για το δεύτερο υποερώτημα.

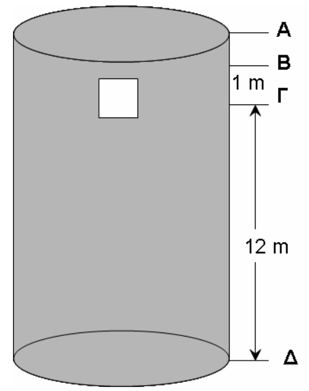
Β) Ένα βλήμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα υ_0 έτσι ώστε να διέρχεται από τα σημεία Α και Β που βρίσκονται στο ίδιο ύψος h από το έδαφος. Δείξετε ότι εάν η αρχική ταχύτητα του βλήματος σχηματίζει την κατάλληλη γωνία με το οριζόντιο επίπεδο ώστε να έχουμε μέγιστο βεληνεκές, η απόσταση μεταξύ των σημείων είναι:

$$\mathrm{AB} \equiv \mathrm{d} = \frac{\upsilon_0}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 4gh}$$



Άσκηση 2

Σε ένα πείραμα κίνησης μικρών μεταλλικών σφαιρών σε δοχείο γεμάτο με ιδανικό υγρό αφήνεται μία σφαίρα στην επιφάνεια του υγρού με μηδενική αρχική ταχύτητα. Η σφαίρα αναγκάζεται να κινηθεί με σταθερή επιτάχυνση $6.0\,m/s^2$. Στο δοχείο υπάρχει παράθυρο ύψους $1m$ το οποίο απέχει $12m$ από τον πυθμένα του δοχείου. Ο χρόνος που χρειάζεται μια σφαίρα για να διανύσει το παράθυρο (το διάστημα ΒΓ) είναι $0.4s$. Να υπολογιστούν:



Α) ο χρόνος που χρειάζεται η σφαίρα να φτάσει στον πυθμένα του δοχείου αφού περάσει το παράθυρο (για να διανύσει την απόσταση ΓΔ),

Β) το ύψος του υγρού πάνω από το παράθυρο (η απόσταση ΑΒ),

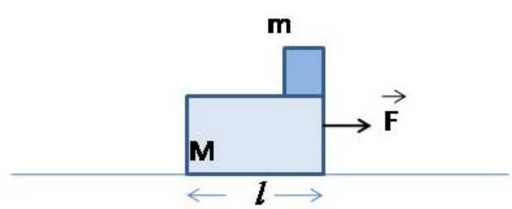
Γ) η ταχύτητα με την οποία η σφαίρα φτάνει στον πυθμένα του δοχείου.

Άσκηση 3:

Α) Σώμα μάζας Μ και μήκους l ακινητεί πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Ένα δεύτερο σώμα μάζας m τοποθετείται πάνω στο πρώτο όπως δείχνει το σχήμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μ. Στο κάτω σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F (όπως στο σχήμα). Να βρεθεί:

1) Για ποιά τιμή της οριζόντιας δύναμης F το σώμα μάζας m θα αρχίσει να ολισθαίνει.

2) Ποιά χρονική στιγμή το σώμα μάζας m θα πέσει από το σώμα μάζας Μ.



Β) 1) Βρείτε την δύναμη τριβής που χρειάζεται για να σταματήσει ένα σώμα μάζας m, το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_0 υπό την προϋπόθεση ότι πρέπει να σταματήσει σε απόσταση d.

2) Βρείτε τον κατάλληλο συντελεστή τριβής για να συμβεί το παραπάνω.

3) Υπολογίστε την δύναμη και τον συντελεστή τριβής, χρησιμοποιώντας τους τύπους που βρήκατε στην 1) και 2) ερώτηση, στην περίπτωση που $m = 1000Kgr$, $\upsilon_0 = 60\,km/h$ και $d = 200m$.

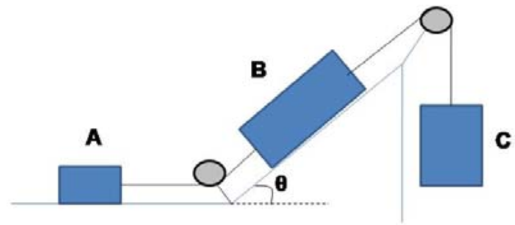
Άσκηση 4

Δύο σώματα Α και Β συνδέονται μέσω νήματος με σώμα C, όπως στο σχήμα. Οι τροχαλίες είναι χωρίς τριβές. Τα βάρη των σωμάτων Α και Β είναι ίσα με 8 Ν και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα σε κάθε σώμα και στην επιφάνεια στην οποία εφάπτεται είναι 0.5. Το σώμα C κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα. Να βρεθούν:

A) Η δύναμη πάνω στο νήμα που συνδέει τα σώματα Α και Β.

B) Το βάρος του σώματος C.

Δίνεται θ=37^{o}



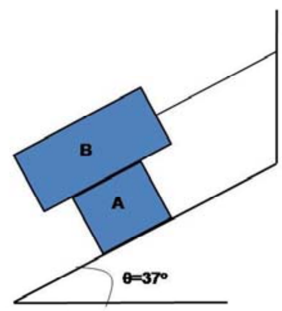
Άσκηση 5

Σώμα Α βάρους $\vec{W}$ ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα προς τα κάτω (βλ. σχήμα). Η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου είναι 37^{o}. Το σώμα Β έχει βάρος $2\vec{W}$ και παραμένει ακίνητο συγκρατούμενο από πακτωμένο νήμα. Να υπολογιστούν:

α) ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα Α και στο κεκλιμένο επίπεδο

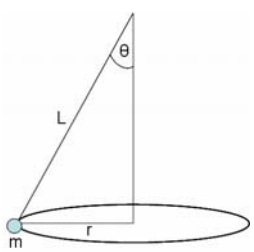
β) η τάση του νήματος που συγκρατεί το σώμα Β

Να θεωρηθεί ότι τα σώματα και το κεκλιμένο επίπεδο αποτελούνται από το ίδιο υλικό.



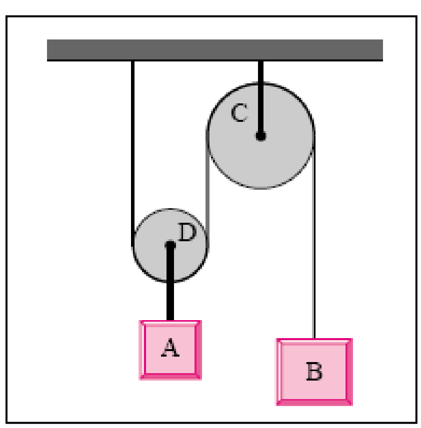
Άσκηση 6

A) Μάζα m είναι στερεωμένη στο άκρο νήματος αμελητέας μάζας του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο. Η μάζα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r. Το σύστημα αυτό ονομάζεται κωνικό εκκρεμές. Θεωρείστε κωνικό εκκρεμές μήκους $L = 1.2m$ το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 0.2m$. Να υπολογιστεί η περίοδος του εκκρεμούς. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $9.8\, m/s^2$



(Υπόδειξη: θεωρείστε τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κάθετο ίση με θ)

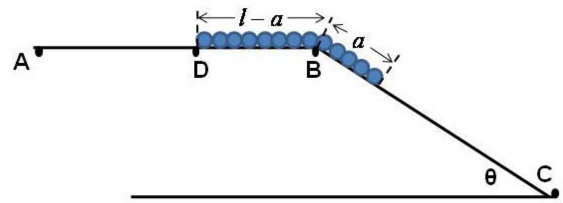
B) Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Α ως συνάρτηση της επιτάχυνσης του σώματος Β στο σύστημα τροχαλιών του σχήματος. Το σχοινί που συνδέει τα σώματα θεωρείται μη εκτατό και χωρίς μάζα και οι τροχαλίες χωρίς μάζα και χωρίς τριβές.



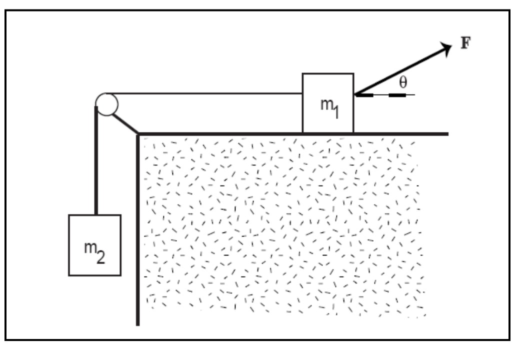
Άσκηση 7

A) Μια εύκαμπτη αλυσίδα μήκους l και βάρους W τοποθετείται αρχικά ακίνητη σε λεία επιφάνεια ABC με το ένα άκρο της D σε απόσταση $l-a$ από το σημείο B, όπως στο σχήμα. Αποδείξτε ότι όταν η άκρη D φτάσει στο σημείο B, η ταχύτητα της αλυσίδας θα είναι:

$$u = \sqrt{g/l\left(l^2 - a^2\right)\sin\theta}$$



B) Ένα τούβλο μάζας m_1 βρίσκεται σε αδρή οριζόντια επιφάνεια και είναι συνδεδεμένο με ένα δεύτερο τούβλο, μάζας m_2, μέσω ενός αβαρούς και μη εκτατού σχοινιού, το οποίο διέρχεται από τροχαλία (μηδενικής μάζας) όπως στο σχήμα. Δύναμη $\vec{F}$ εφαρμόζεται στο τούβλο μάζας m_1, που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, και το κινεί προς τα δεξιά. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του τούβλου μάζας m_1 και του επιπέδου είναι μ. Βρείτε την έκφραση για την επιτάχυνση των τούβλων.



Άσκηση 8

Σωματίδιο κινείται στον τρισδιάστατο χώρο κατά τέτοιο τρόπο ώστε η επιτάχυνση του να παραμένει σταθερή και ίση με $\vec{a} = -\hat{k}$ (όπου $\hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{j}}, \hat{\mathrm{k}}$) είναι τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς ($\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$). Η θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει συντεταγμένες $(0,0,1)$ ενώ η ταχύτητά του την ίδια χρονική στιγμή έχει συνιστώσες (1,1,0). Υπολογίστε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σωματίδιο θα περάσει κάτω από το επίπεδο $z = 0$ καθώς και τις συντεταγμένες της θέσης του τη στιγμή αυτή. Δώστε μια περιγραφή του είδους της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο. (Θεωρείστε μόνο θετικούς χρόνους $t \geq 0$)

Άσκηση 9

Θεωρείστε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς O_1 με μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1$ και ένα δεύτερο, μη αδρανειακό σύστημα O, η αρχή του οποίου έχει τυχαία γραμμική επιτάχυνση ως προς το O_1, ενώ το σύστημα αξόνων του περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ως προς το O_1. Θεωρείστε στοιχειώδη μάζα m στο χώρο επί της οποίας δρα δύναμη $\vec{F}(t)$ ($\vec{F}(t) = m\vec{\gamma}(t)$, όπως μετράται στο αδρανειακό σύστημα O_1). Ας υποθέσουμε ότι ένας παρατηρητής είναι καθηλωμένος στο εσωτερικό του O και μετρά τις συντεταγμένες του διανύσματος θέσης $\vec{r}(t)$ του m, καθώς και την ταχύτητά του $\vec{\upsilon}(t)$ και την επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ από τις μεταβολές συντεταγμένων στο σύστημα αξόνων του O, χωρίς να τον απασχολεί τι συμβαίνει στον εξωτερικό κόσμο.

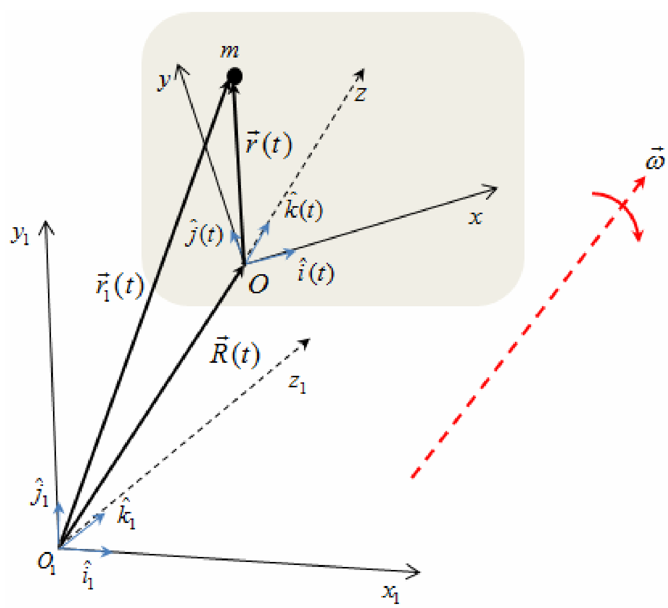
1. Δείξτε ότι οι δύο επιταχύνσεις συνδέονται με την ακόλουθη σχέση.

$$\vec{a}(t) - \vec{\gamma}(t) = -\ddot{\vec{R}}(t) - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}(t)\right) - 2\left(\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}(t)\right)$$

2. Βρείτε τη μορφή του δεύτερου μέλους της παραπάνω σχέσης στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   Α. Σωμάτιο εντός τραίνου που επιταχύνεται γραμμικά με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\kappa}$ (ως προς το αδρανειακό σύστημα O_1)

   Β. Σωμάτιο ακίνητο σε απόσταση r από το κέντρο κυκλικού τροχού που περιστρέφεται στο επίπεδο $x-y$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ (ως προς το αδρανειακό σύστημα O_1 και χωρίς να μετατοπίζεται ως προς το O_1)

   Γ. Σωμάτιο που μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα υ προς το κέντρο κυκλικού τροχού που περιστρέφεται στο επίπεδο x-y με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$.



Υπόδειξη :

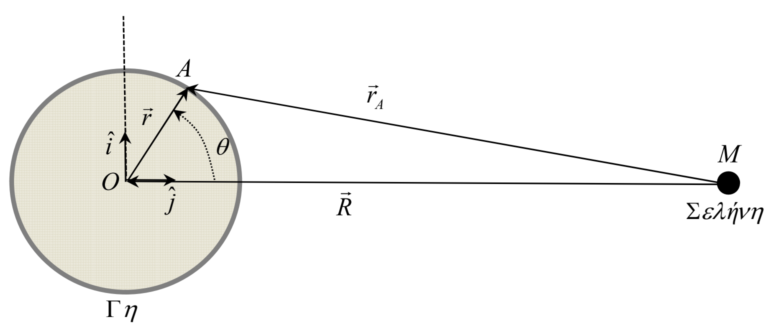
α. Στο σύστημα O, τα μοναδιαία διανύσματα ενώ έχουν σταθερό μήκος μεταβάλλουν τη διεύθυνσή τους λόγω της περιστροφής. Έτσι στο σύστημα O το διάνυσμα θέσης έχει τη μορφή $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}(t) + y(t)\hat{j}(t) + z(t)\hat{k}(t)$

β. Η χρονική παράγωγος διανύσματος $\vec{A}$, σταθερού μήκους, που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, είναι $\dot{\vec{A}}(t) = \vec{\omega} \times \vec{A}$.

Άσκηση 10

Η παλιρροιακή δύναμη σε κάποιο σημείο Α της επιφάνειας της Γης υπολογίζεται από τη διανυσματική διαφορά της βαρυτικής έλξης την οποία ασκεί η Σελήνη σε μια στοιχειώδη μάζα m στο εν λόγω σημείο, και της βαρυτικής έλξης που θα ασκούσε στην ίδια μάζα εάν αυτή βρισκόταν στο κέντρο της Γης.

Σύντομη ερμηνεία: Δεδομένου ότι ο άξονας περιστροφής της Γης δείχνει σε σταθερή διεύθυνση σε σχέση με τους αστέρες, μπορούμε να αναφερθούμε σε ένα σύστημα αναφοράς Ο πακτωμένο στο κέντρο της Γης , που εκτελεί μεταφορική κίνηση μαζί της γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος Γη-Σελήνη αλλά δεν περιστρέφεται. Σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα στο διάστημα όλα τα σημεία του Ο κινούνται με την ίδια επιτάχυνση. Κάθε σώμα στο σύστημα αναφοράς Ο υφίσταται μια δύναμη που είναι ανεξάρτητη από τη θέση του. Για υπολογισμούς πάνω στο ίδιο το Ο η δύναμη αυτή θα πρέπει να αφαιρεθεί διανυσματικά από τη δύναμη βαρύτητας. (Για τους υπολογισμούς σας θεωρείστε τη Σελήνη σημειακή. Ο λόγος της ακτίνας της Γης προς την απόσταση του κέντρου της από τη Σελήνη είναι $\frac{r}{R} \approx 1,6\times10^{-2}$. Όπου χρειαστεί χρησιμοποιείστε την προσέγγιση του διωνυμικού αναπτύγματος: $(1+x)^n \approx 1+nx$ για $|x|<<1,\ n \equiv σταθερά$)



α) Δείξτε ότι η δύναμη παλίρροιας $\vec{F}_{παλ}$ την οποία νοιώθει στοιχειώδης μάζα m στο σημείο Α δίνεται, σε πρώτη προσέγγιση, από τη σχέση

$$\vec{F}_{παλ} \approx -G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{R}\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right]$$

β) Η άποψη που αποδίδει τα παλιρροιακά φαινόμενα στην απλή βαρυτική έλξη της Σελήνης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όταν στην πλησιέστερη προς τη Σελήνη πλευρά, πάνω στην ευθεία που τη συνδέει με το κέντρο της Γης, έχουμε άμπωτη τότε στο αντιδιαμετρικό σημείο θα έχουμε πλημμυρίδα. Στην πράξη όμως παρατηρούμε και στα δύο σημεία ταυτόχρονα άμπωτη όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Εξηγείστε το φαινόμενο, υπολογίζοντας τις δυνάμεις στα σημεία A,B,C,D στο ακόλουθο σχήμα, με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος α.