ΕΡΓΑΣΙΑ 3^{η}

Παράδοση 9-2-2009

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

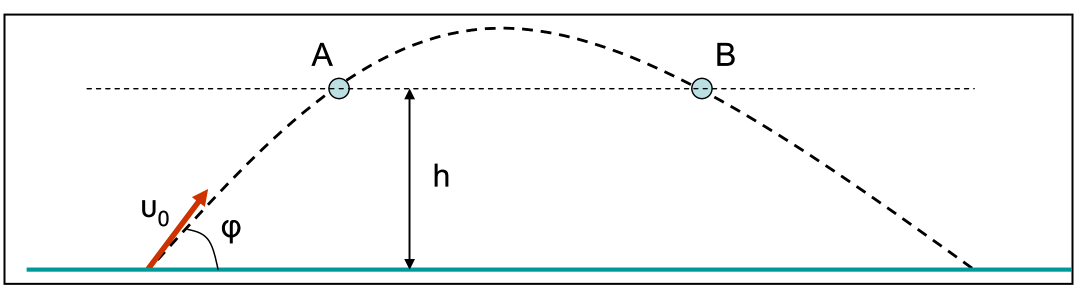
Άσκηση 1

Α) Δυο τραίνα ταξιδεύουν στην ίδια σιδηροτροχιά το ένα πίσω από το άλλο. Το πρώτο τραίνο κινείται με ταχύτητα $12\,m/s$. Το δεύτερο τραίνο πλησιάζει από πίσω με ταχύτητα $20\,m/s$. Όταν το δεύτερο τραίνο είναι $200m$ πίσω από το πρώτο, ο μηχανοδηγός του δεύτερου τραίνου εφαρμόζει πέδηση σταθερής επιβράδυνσης $0.2\,m/s^2$.

1. Θα συγκρουστούν τα δύο τραίνα, και αν ναι σε ποια χρονική στιγμή και σε ποιά θέση x από το σημείο εφαρμογής της πέδησης;
2. Τι θα συμβεί αν το δεύτερο τραίνο έχει αρχική ταχύτητα $25\,m/s$ (θα συγκρουστούν και αν ναι, σε ποια χρονική στιγμή και σε ποιά θέση); Να εξετάσετε επίσης την περίπτωση κατά την οποία τα τραίνα κινούνται με τις ίδιες αρχικές συνθήκες αλλά σε παράλληλες σιδηροτροχιές.
3. Δώστε τη γραφική παράσταση μεταβολής της θέσης των δύο τραίνων σαν συνάρτηση του χρόνου και βρείτε γραφικά τη λύση για το δεύτερο υποερώτημα.

Β) Ένα βλήμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα υ_0 έτσι ώστε να διέρχεται από τα σημεία Α και Β που βρίσκονται στο ίδιο ύψος h από το έδαφος. Δείξετε ότι εάν η αρχική ταχύτητα του βλήματος σχηματίζει την κατάλληλη γωνία με το οριζόντιο επίπεδο ώστε να έχουμε μέγιστο βεληνεκές, η απόσταση μεταξύ των σημείων είναι:

$$\mathrm{AB} \equiv \mathrm{d} = \frac{\upsilon_0}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 4gh}$$



Λύση

Α.

1) Θεωρούμε ως αρχή των χρόνων ($t = 0$) τη χρονική στιγμή όπου ο μηχανοδηγός του δεύτερου τραίνου πατάει τα φρένα οπότε το πρώτο τραίνο βρίσκεται στη θέση $x = 200$ ενώ το δεύτερο τραίνο στη θέση $x = 0$. Οι εξισώσεις κίνησης των δύο τραίνων είναι:

Τραίνο 1 :	Τραίνο 2:
$x_1 = 200 + 12t$	$x_2 = 20t - \frac{1}{2}0.20t^2$
$v_1 = 12$	$v_1 = 20 - 0.20t$
$a_1 = 0$	$a_2 = -0.20$

(όπου οι θέσεις μετρώνται σε m οι ταχύτητες σε m/s και οι επιταχύνσεις σε m/s^2)

Αν τα δύο τραίνα συγκρουστούν σημαίνει ότι $x_1 = x_2$, συνεπώς από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$0.10t^2 - 8t + 200 = 0$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 0.10 \cdot 200}}{2 \cdot 0.10} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{0.20} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{0.20} s$$

οι οποίες είναι μη πραγματικές και συνεπώς τα τραίνα δεν θα συγκρουστούν.

2) Στη περίπτωση αυτή η εξίσωση για τη θέση του δεύτερου τραίνου είναι $x_2(t) = 25t - 0.1t^2$, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση: $0.1t^2 - 13t + 200 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις :

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 0.10 \cdot 200}}{2 \cdot 0.10} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 80}}{0.20} = \frac{13 \pm 9.434}{0.20} s$$

ή:

$$t_1 = 17.83s \text{ και } t_2 = 112.17s$$

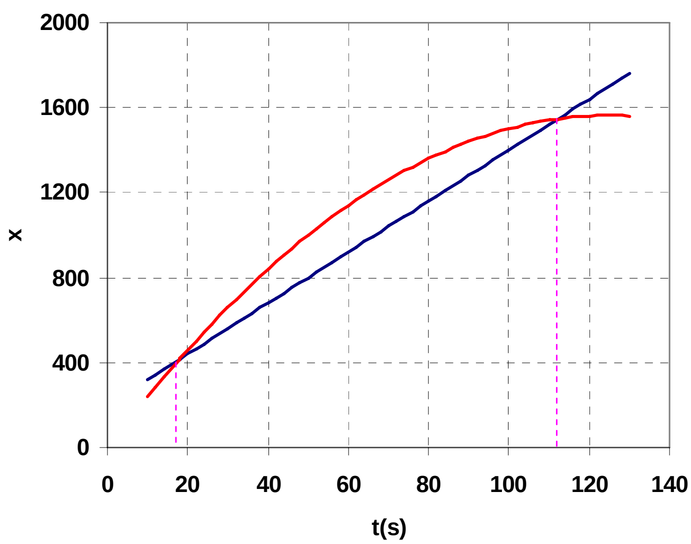
Οι δύο παραπάνω χρόνοι αντιστοιχούν σε δύο χρονικές στιγμές όπου τα δύο τραίνα θα έχουν τη ίδια θέση $x_1 = x_2$. Στην πρώτη χρονική στιγμή $t_1 = 17.83s$ τα δύο τραίνα συγκρούονται και το πρόβλημα των τραίνων τελειώνει (αφού κινούνται στην ίδια τροχιά και δεν μπορούν να συνεχίσουν μετά τη σύγκρουση).

Αν τα τραίνα κινούνταν σε παράλληλες τροχιές τότε την χρονική στιγμή $t_1 = 17.83s$ το δεύτερο τραίνο θα έφτανε το πρώτο (οπότε θα είχαν την ίδια θέση $x_1 = x_2$), στη συνέχεια θα το προσπερνούσε συνεχίζοντας την επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 112.17s$ οπότε το πρώτο τραίνο που θα συνέχιζε να κινείται με σταθερή ταχύτητα θα προσπερνούσε το δεύτερο τραίνο.

Από τις εξισώσεις κίνησης των τρένων προκύπτει ότι η σύγκρουσή τους θα γίνει στη θέση:

$$x_1 = 200 + 12 \cdot 17.83 = 200 + 213,96 = 413,96m$$

3) Αναφορικά με τη γραφική παράσταση της θέσης των δύο τρένων παρατηρούμε ότι η συνάρτηση θέσης του πρώτου τρένου είναι ευθεία: $x_1(t) = 200 + 12 \cdot t$, ενώ εκείνη του δεύτερου είναι παραβολή που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω : $x_2(t) = 25t - 0.1t^2$. Το παρακάτω σχήμα δείχνει τις δύο καμπύλες και τα σημεία τομής τους που αντιστοιχούν στις δύο λύσεις .



B)

Σύμφωνα με τη σχέση 2.55 του βιβλίου, το βεληνεκές δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{2\upsilon_0{}^2 \sin\varphi\cos\varphi}{g} \qquad (1)$$

Το βεληνεκές είναι μέγιστο όταν η παράγωγος του R ως προς φ είναι μηδέν και η δεύτερη παράγωγος αρνητική, δηλαδή:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2\upsilon_0{}^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{g} = \frac{2\upsilon_0{}^2 \cos2\varphi}{g} = 0 \qquad (2)$$

Από την παραπάνω σχέση έπεται ότι $2\varphi = 90^o$, επομένως $\varphi = 45^o$.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε κίνηση επιβραδυνόμενη με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 \cdot \sin\varphi$ επομένως η κατακόρυφη θέση του βλήματος σε κάθε χρονική στιγμή t είναι:

$$y = \upsilon_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{gt^2}{2} \qquad (3)$$

Για να φτάσει σε ύψος h το βλήμα θα χρειασθεί χρόνο t που δίνεται από:

$$y = \upsilon_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t - \frac{gt^2}{2} = h \Rightarrow gt^2 - \upsilon_0 \sqrt{2} t + 2h = 0 \qquad (4)$$

Η παραπάνω σχέση έχει λύσεις:

$$t_{1,2} = \frac{\upsilon_0 \sqrt{2} \mp \sqrt{2\upsilon_0{}^2 - 8gh}}{2g} = \frac{\upsilon_0 \sqrt{2} \mp \sqrt{2}\sqrt{\upsilon_0{}^2 - 4gh}}{2g} \qquad (5)$$

Οι δύο παραπάνω χρονικές στιγμές αντιστοιχούν στις δύο διελεύσεις του βλήματος από το επίπεδο $z = h$. Επομένως ο χρόνος μεταξύ των δύο διελεύσεων είναι:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\upsilon_0{}^2 - 4gh}}{g} \qquad (6)$$

Στην οριζόντια διεύθυνση η κίνηση είναι ευθύγραμμος ομαλή με ταχύτητα $\upsilon_0 \cos\phi$, επομένως η απόσταση d θα είναι:

$$d = \upsilon_0 \cos\varphi \cdot \Delta t = \upsilon_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\upsilon_0{}^2 - 4gh}}{g} = \upsilon_0 \frac{\sqrt{\upsilon_0{}^2 - 4gh}}{g} \qquad (7)$$

Εναλλακτική λύση:

Οι εξισώσεις της κίνησης για τις δύο συνιστώσες x, y είναι:

$$y = (\upsilon_0 \sin\varphi) t - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (8)$$

$$x = (\upsilon_0 \cos\varphi) t \qquad (9)$$

Λύνοντας την (9) ως προς t και αντικαθιστώντας στην (8) έχουμε:

$$y = (\upsilon_0 \sin\varphi) \frac{x}{\upsilon_0 \cos\varphi} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{\upsilon_0 \cos\varphi} \right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y = x \tan\varphi - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\upsilon_0^2 \cos^2\varphi} \qquad (10)$$

Για μέγιστο βεληνεκές, όπως γνωρίζουμε, $\phi = 45^0$ δηλαδή: $\tan\phi = 1$ και $\cos\phi = \sqrt{2}/2$ ή $\cos^2\phi = 1/2$

$$\Rightarrow \quad y = x - \frac{g}{\upsilon_0^2} x^2 \qquad (11)$$

Η (11) είναι η γνωστή εξίσωση παραβολής. Για κάθε τιμή του y θα έχουμε δύο τιμές του x. Επομένως για y=h, η (11) γίνεται:

$$\Rightarrow \quad h = x - \frac{g}{\upsilon_0^2} x^2 \Rightarrow x^2 - \frac{\upsilon_0^2}{g} x + \frac{\upsilon_0^2}{g} h = 0 \qquad (12)$$

Οι δύο λύσεις της (20) θα είναι:

$$x_{1,2} = \frac{\frac{\upsilon_0^2}{g} \mp \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0^2}{g}\right)^2 - 4\frac{\upsilon_0^2}{g} h}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\frac{\upsilon_0^2}{g} - \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0^2}{g}\right)^2 - 4\frac{\upsilon_0^2}{g} h}}{2} \\ x_2 = \dfrac{\frac{\upsilon_0^2}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0^2}{g}\right)^2 - 4\frac{\upsilon_0^2}{g} h}}{2} \end{cases}$$

που αντιστοιχούν στις τετμημένες των σημείων Β και Α, επομένως: $d = x_2 - x_1$

$$d = \frac{2\sqrt{\left(\frac{\upsilon_0^2}{g}\right)^2 - 4\frac{\upsilon_0^2}{g} h}}{2} = \frac{\upsilon_0}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 4gh}$$

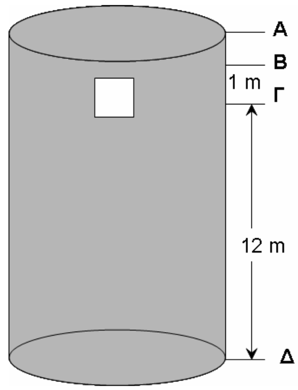
Άσκηση 2

Σε ένα πείραμα κίνησης μικρών μεταλλικών σφαιρών σε δοχείο γεμάτο με ιδανικό υγρό αφήνεται μία σφαίρα στην επιφάνεια του υγρού με μηδενική αρχική ταχύτητα. Η σφαίρα αναγκάζεται να κινηθεί με σταθερή επιτάχυνση $6.0\, m/s^2$. Στο δοχείο υπάρχει παράθυρο ύψους $1m$ το οποίο απέχει $12m$ από τον πυθμένα του δοχείου. Ο χρόνος που χρειάζεται μια σφαίρα για να διανύσει το παράθυρο (το διάστημα ΒΓ) είναι $0.4s$. Να υπολογιστούν:

Α) ο χρόνος που χρειάζεται η σφαίρα να φτάσει στον πυθμένα του δοχείου αφού περάσει το παράθυρο (για να διανύσει την απόσταση ΓΔ),

Β) το ύψος του υγρού πάνω από το παράθυρο (η απόσταση ΑΒ),

Γ) η ταχύτητα με την οποία η σφαίρα φτάνει στον πυθμένα του δοχείου.



Λύση

Α) Η κάθε σφαίρα αρχίζει να κινείται από την επιφάνεια του υγρού έχοντας μηδενική αρχική ταχύτητα και εκτελώντας ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $6.0\, m/s^2$.

Στο σημείο Β έχει αποκτήσει ταχύτητα υ_B και στο σημείο Γ ταχύτητα υ_Γ.

Με δεδομένο ότι η κίνηση στο διάστημα ΒΓ διαρκεί $0.4s$ και ότι το διάστημα ΒΓ=$1m$ έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_\Gamma = x_B + \upsilon_B t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow x_\Gamma - x_B = \upsilon_B t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow 1 = \upsilon_B 0.4 + \frac{1}{2}6(0.4)^2$$

$$\upsilon_B = \frac{1-0.48}{0.4} = 1.3m/s$$

Η ταχύτητα στο σημείο Γ είναι

$$\upsilon_\Gamma^2 = \upsilon_B^2 + 2a\left(x_\Gamma - x_B\right) = \left((1.3)^2 + 2\cdot 6\cdot 1\right)(m/s)^2 \Rightarrow \upsilon_\Gamma = 3.7\, m/s$$

Και ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στον πυθμένα:

$$x_\Delta - x_\Gamma = \upsilon_\Gamma t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow 12 = 3.7t + \frac{1}{2}6t^2$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις:

$$t = \frac{-3.7 \pm \sqrt{(3.7)^2 - 4\cdot 3\cdot(-12)}}{2\cdot 3} = \frac{-3.7 \pm \sqrt{157.69}}{2\cdot 3} = \frac{-3.70 \pm 12.56}{6}$$

ή $t = 1.5s$ και $t = -2.7s$

Αποδεκτή είναι η θετική λύση.

Β) Αφού η σφαίρα άρχισε να κινείται με μηδενική ταχύτητα, η απόσταση από το πάνω σημείο της επιφάνειας του υγρού μέχρι το πάνω σημείο του παραθύρου (διάστημα ΑΒ) δίνεται από τη σχέση

$$\left.\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{2}at^2 \\ \upsilon_B &= at \Rightarrow t = \frac{\upsilon_B}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_B = \frac{\upsilon_B^2}{2a} = \frac{(1.3)^2}{2\cdot 6} = \frac{1.69}{12} = 0.14m$$

Γ) Για το διάστημα ΓΔ=12 m η σφαίρα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\upsilon_\Gamma = 3.7\, m/s$ και η κίνηση διαρκεί $t = 1.5s$ (ερώτηση Α). Η ταχύτητα στον πυθμένα δίνεται από τη σχέση

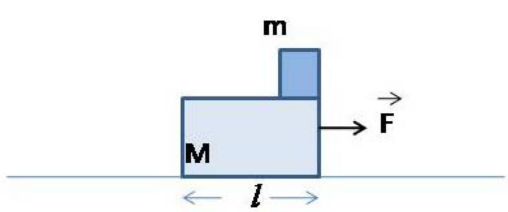
$$\upsilon_\Delta = \upsilon_\Gamma + \alpha t = 3.7 + 6\cdot 1.5 = 12.7 m/s$$

Άσκηση 3:

A) Σώμα μάζας Μ και μήκους l ακινητεί πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Ένα δεύτερο σώμα μάζας m τοποθετείται πάνω στο πρώτο όπως δείχνει το σχήμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μ . Στο κάτω σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F (όπως στο σχήμα). Να βρεθεί:

1) Για ποιά τιμή της οριζόντιας δύναμης F το σώμα μάζας m θα αρχίσει να ολισθαίνει.

2) Ποιά χρονική στιγμή το σώμα μάζας m θα πέσει από το σώμα μάζας Μ.



B)

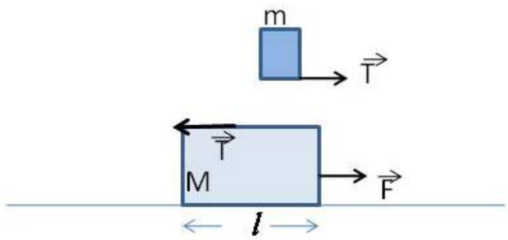
1) Βρείτε την δύναμη τριβής που χρειάζεται για να σταματήσει ένα σώμα μάζας m, το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_0 υπό την προϋπόθεση ότι πρέπει να σταματήσει σε απόσταση d.

2) Βρείτε τον κατάλληλο συντελεστή τριβής για να συμβεί το παραπάνω.

3) Υπολογίστε την δύναμη και τον συντελεστή τριβής, χρησιμοποιώντας τους τύπους που βρήκατε στην 1) και 2) ερώτηση, στην περίπτωση που $m = 1000 Kgr$, $\upsilon_0 = 60 km/h$ και $d = 200m$.

Λύση:

A) Εξετάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε κάθε σώμα (βλ. σχήμα)



Αρχικά το σώμα μάζας m δεν ολισθαίνει. Άρα το μέτρο της δύναμης τριβής T ικανοποιεί την ανισότητα:

$$T \le \mu mg \qquad (1)$$

Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι:

$$\begin{aligned} T &= ma \\ F - T &= Ma \end{aligned} \qquad (2)$$

Από αυτές προκύπτει ότι το μέτρο της δύναμης της τριβής είναι:

$$T = \frac{mF}{m+M} \qquad (3)$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{mF}{m+M} \le \mu mg \qquad (4)$$

Επομένως η ολίσθηση θα αρχίσει όταν :

$$F > (m+M)\mu g$$

β)

Όταν αρχίσει η ολίσθηση του επάνω σώματος, οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι:

$$\begin{aligned} T &= ma \\ F - T &= Mb \end{aligned} \qquad (5)$$

ή

$$\begin{aligned} \mu mg &= ma \\ F - \mu mg &= Mb \end{aligned} \qquad (6)$$

όπου α και b τα μέτρα των επιταχύνσεων των σωμάτων με μάζες m και M αντίστοιχα. Από αυτές προκύπτει ότι τα μέτρα των επιταχύνσεων των δύο σωμάτων είναι:

$$a = \mu g$$
$$b = \frac{F - \mu mg}{M} \qquad (7)$$

Όμως για τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων ισχύει :

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{a}_r \qquad (8)$$

ή

$$a = b - a_r \qquad (9)$$

όπου $\vec{a}_r$ είναι η σχετική επιτάχυνση του επάνω σώματος ως προς το κάτω.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7) και (9), προκύπτει για το μέτρο της σχετικής επιτάχυνσης ότι:

$$a_r = b - a = \frac{F - \mu mg}{M} - \mu g \qquad (10)$$

Επομένως το σώμα μάζας m φτάνει στο άκρο του κάτω σώματος την χρονική στιγμή τ:

$$l = \frac{1}{2} a_r \tau^2 \qquad (11)$$

όπου η σχετική επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση (10)

Άρα με συνδυασμό των σχέσεων (10) και (11) προκύπτει ότι:

$$\tau = \sqrt{2l \Big/ \left(\frac{F - \mu mg}{M} - \mu g \right)}$$

B)

1) Θέτουμε $\upsilon = 0\mathrm{m}/s$ και $\mathrm{x}_0 = 0\mathrm{m}$ στη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απόσταση, οπότε προκύπτει ότι:

$$\upsilon^2 = \upsilon_0{}^2 + 2\alpha(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \Rightarrow 0 = \upsilon_0{}^2 + 2a(d - 0) \Rightarrow \upsilon_0{}^2 = -2ad$$

ή

$$\alpha = -\frac{\upsilon_0{}^2}{2\mathrm{d}} \qquad (1)$$

Η επιτάχυνση αυτή συνεπάγεται δύναμη τριβής:

$$F = m\alpha = -\frac{m\upsilon_0^{\ 2}}{2d} \qquad (2)$$

2) Η δύναμη της τριβής μπορεί να γραφεί ως:

$$F = \mu N = \mu mg = \frac{m\upsilon_0^{\ 2}}{2d}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\mu = \frac{\upsilon_0^{\ 2}}{2dg} \qquad (3)$$

3) Η δύναμη τριβής που απαιτείται είναι:

$$F = -\frac{m\upsilon_0^{\ 2}}{2d} = \frac{1000\text{Kgr}\cdot(60\cdot10^3\,\text{m/hr})^2}{2\cdot200\text{m}} = -694\,\text{Nt}$$

Ο συντελεστής τριβής θα είναι:

$$\mu = \frac{\upsilon_0^{\ 2}}{2dg} = \frac{(60\cdot10^3\,m/hr)^2}{2\cdot200m\cdot9.81m/s^2} = 0.07$$

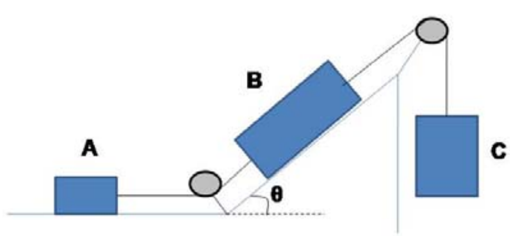
Άσκηση 4

Δύο σώματα A και B συνδέονται μέσω νήματος με σώμα C, όπως στο σχήμα. Οι τροχαλίες είναι χωρίς τριβές. Τα βάρη των σωμάτων A και B είναι ίσα με 8 N και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα σε κάθε σώμα και στην επιφάνεια στην οποία εφάπτεται είναι 0.5. Το σώμα C κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα. Να βρεθούν:

A) Η δύναμη πάνω στο νήμα που συνδέει τα σώματα A και B.

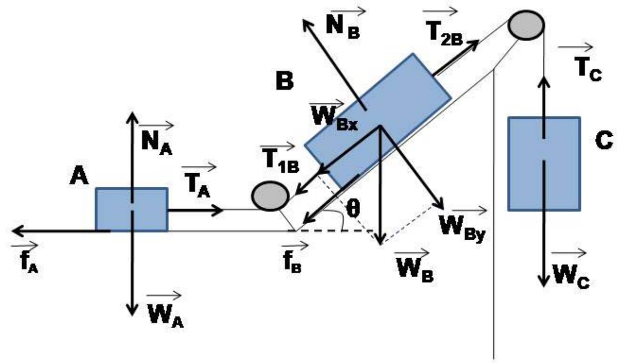
B) Το βάρος του σώματος C.

Δίνεται θ=37°



Λύση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα.



Επειδή η κίνηση των σωμάτων είναι ισοταχής ισχύουν οι σχέσεις:

Για το σώμα Α ισχύει:

$$N_A - W_A = 0 \Rightarrow N_A = W_A \qquad (1)$$

$$T_A - f_A = 0 \Rightarrow T_A = f_A \qquad (2)$$

όπου

$$f_A = \mu_k N_A \qquad (3)$$

Για το σώμα Β ισχύει:

$$N_B - W_{By} = 0 \Rightarrow N_B = W_{By} \qquad (4)$$

$$T_{2B} - T_{1B} - f_B - W_{Bx} = 0 \Rightarrow T_{2B} = T_{1B} + f_B + W_{Bx} \qquad (5)$$

και

$$f_B = \mu_k N_B \qquad (6)$$

Για το σώμα C ισχύει:

$$T_C - W_C = 0 \Rightarrow T_C = W_C \qquad (7)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με το τρίτο αξίωμα του Νεύτωνα ισχύουν οι σχέσεις:

$$T_A = T_{1B} \qquad (8)$$

και

$$T_C = T_{2B} \qquad (9)$$

Το μέτρο της δύναμης ($\vec{T}_A$) που ασκείται στο νήμα που συνδέει τα σώματα A και B είναι (χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1),(2) και (3):

$$T_A = f_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0.5 \cdot 8 = 4N$$

B) Για την εύρεση του βάρους του σώματος C, με συνδυασμό των σχέσεων(7) και (9), προκύπτει ότι:

$$W_C = T_C = T_{2B}$$

Η παραπάνω σχέση με χρήση της σχέση (5) γίνεται:

$$W_C = T_{1B} + f_B + W_{Bx}.$$

Η παραπάνω σχέση με χρήση των σχέσεων (4), (6) και (8) δίνει:

$$W_C = T_A + \mu_k W_B \cos\theta + W_B \sin\theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W_C = 4 + 8 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 8 \cdot 0.8 = 12N$$

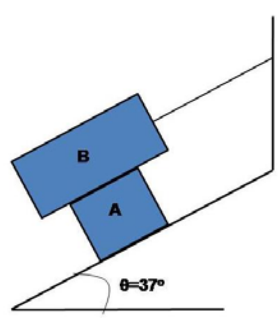
Άσκηση 5

Σώμα A βάρους $\vec{W}$ ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα προς τα κάτω (βλ. σχήμα). Η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου είναι 37^o. Το σώμα B έχει βάρος $2\vec{W}$ και παραμένει ακίνητο συγκρατούμενο από πακτωμένο νήμα. Να υπολογιστούν:

α) ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα A και στο κεκλιμένο επίπεδο

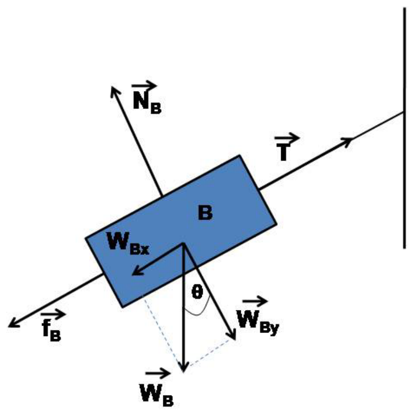
β) η τάση του νήματος που συγκρατεί το σώμα B

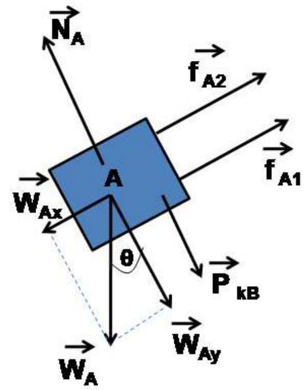
Να θεωρηθεί ότι τα σώματα και το κεκλιμένο επίπεδο αποτελούνται από το ίδιο υλικό.



Λύση

Σχεδιάζουμε και αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε κάθε σώμα (βλ. σχήμα).





Για το σώμα Α εφόσον κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ισχύουν οι σχέσεις:

$$N_A - W_{Ay} - P_{kB} = 0 \Rightarrow N_A = W_{Ay} + P_{kB} = W\cos\theta + P_{kB} \qquad (1)$$

$$f_{A1} + f_{A2} - W_{Ax} = 0 \Rightarrow W_{Ax} = f_{A1} + f_{A2} \qquad (2)$$

Για τις δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα Β ισχύουν οι σχέσεις:

$$N_B - W_{By} = 0 \Rightarrow N_B = W_{By} \Rightarrow N_B = W_B \cdot \cos\theta = 2W \cdot \cos\theta \qquad (3)$$

$$T - f_B - W_{Bx} = 0 \Rightarrow T = W_{Bx} + f_B \Rightarrow T = W_B \cdot \sin\theta + f_B \qquad (4)$$

Αλλά από το τρίτο αξίωμα του Νεύτωνα ισχύει:

$$P_{kB} = N_B \qquad (5)$$

και λόγω της (3):

$$P_{kB} = 2W\cos\theta \qquad (5)$$

Με χρήση της τελευταίας σχέσης η σχέση (1) γίνεται:

$$N_A = W\cos\theta + P_{kB} = W\cos\theta + 2W\cos\theta = 3W\cos\theta \qquad (6)$$

Για τις δυνάμεις τριβής ισχύουν οι σχέσεις :

$$f_{A1} = \mu_k N_A$$

$$f_{A2} = \mu_k P_{kB} \qquad (7)$$

και λόγω της (5)

$$f_{A2} = 2\mu_k W \cos\theta \qquad (8)$$

Η σχέση (2) με χρήση των (5), (6), (7) και (8) γίνεται:

$$W_{Ax} = f_{A1} + f_{A2} = \mu_k N_A + \mu_k P_{kB} = \mu_k 3W \cos\theta + \mu_k 2W \cos\theta = 5\mu_k W \cos\theta$$

ήτοι:

$$W \sin\theta = 5\mu_k W \cos\theta \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{5}\tan\theta = \frac{1}{5}\tan 37^0 = 0.15$$

β)

Ο υπολογισμός της τάσης του νήματος γίνεται με χρήση της σχέσης (4):

$$T = W_B \cdot \sin\theta + f_B = 2W \cdot \sin\theta + f_B \qquad (9)$$

Αλλά:

$$f_B = \mu_k N_B \longrightarrow f_B = \mu_k W_B \cos\theta = 2\mu_k W \cos\theta$$

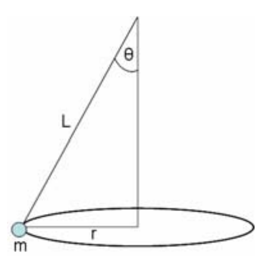
Οπότε η σχέση (9) γίνεται:

$$T = W_B \cdot \sin\theta + f_B = 2W \cdot \sin\theta + 2\mu_k W \cos\theta = 2W\left(\sin\theta + \mu_k \cos\theta\right) = 2W\left(0.6 + 0.15 \cdot 0.8\right) = 1.44W$$

Άσκηση 6

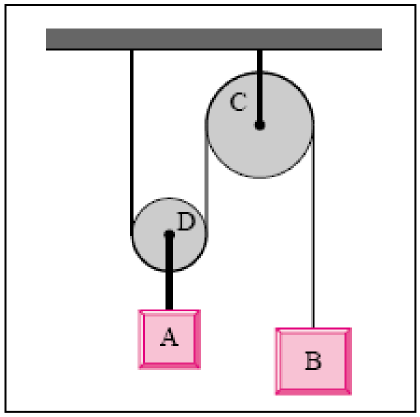
A) Μάζα m είναι στερεωμένη στο άκρο νήματος αμελητέας μάζας του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο. Η μάζα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r. Το σύστημα αυτό ονομάζεται κωνικό εκκρεμές. Θεωρείστε κωνικό εκκρεμές μήκους $L = 1.2m$ το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 0.2m$. Να υπολογιστεί η περίοδος του εκκρεμούς. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $9.8 m/s^2$

(Υπόδειξη: θεωρείστε τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κάθετο ίση με θ)



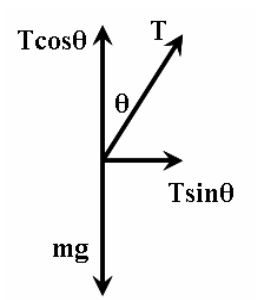
B)

Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος A ως συνάρτηση της επιτάχυνσης του σώματος B στο σύστημα τροχαλιών του σχήματος. Το σχοινί που συνδέει τα σώματα θεωρείται μη εκτατό και χωρίς μάζα και οι τροχαλίες χωρίς μάζα και χωρίς τριβές.



Λύση

Α) Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για τη μάζα του εκκρεμούς φαίνεται στο σχήμα:



Ισχύει:

$$T\cos\theta = mg$$

Η οριζόντια συνιστώσα της τάσης παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:

$$T\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{r}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται τα T και m, οπότε έχουμε

$$\tan\theta = \frac{\upsilon^2}{rg} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Για τη γωνία θ ισχύει $\tan\theta = \dfrac{r}{L}$ και $\tan\theta = 0.17$, οπότε

$$\upsilon = \sqrt{rg\tan\theta} = \sqrt{0.2 \cdot 9.8 \cdot 0.17} = 0.58 m/s$$

(Σύμφωνα με το σχήμα, είναι $\sin\theta = \frac{r}{L}$, αλλά επειδή η γωνία είναι μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\sin\theta = \tan\theta$)

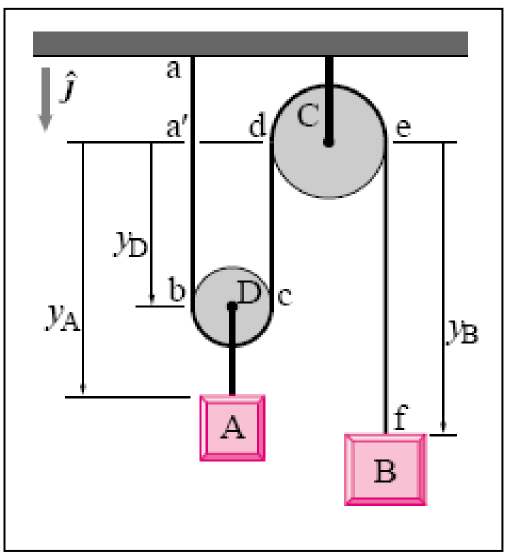
Από τη σχέση $T = \frac{2\pi r}{\upsilon}$, η περίοδος της κυκλικής κίνησης είναι:

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{2\pi 0.20}{0.57} = 2.2s$$

B)

Θεωρούμε ως αρχή των αξόνων y το επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της σταθερής τροχαλίας C. Τα διανύσματα θέσης των A και B είναι:

$$\vec{r}_A = y_A \hat{j}, \qquad \vec{r}_B = y_B \hat{j} \qquad (1)$$



Επομένως οι ταχύτητες και επιταχύνσεις των A και B θα είναι:

$$\vec{\upsilon}_A = \dot{y}_A \hat{j}, \qquad \vec{\upsilon}_B = \dot{y}_B \hat{j} \qquad (2)$$

$$\vec{\alpha}_A = \ddot{y}_A \hat{j}, \qquad \vec{\alpha}_B = \ddot{y}_B \hat{j} \qquad (3)$$

Το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο οπότε απλοποιούμε τις εκφράσεις εγκαταλείποντας (αλλά εννοώντας ότι υπάρχει) το μοναδιαίο άνυσμα **j**.

Το μήκος του σχοινιού είναι μια σταθερά του προβλήματος και (όπως φαίνεται από το σχήμα) ισούται με:

$$l_{tot} = ab + bc + cd + de + ef = σταθερό \qquad (4)$$

ή

$$l_{tot} = aa' + y_D + bc + y_D + de + y_B$$

Αλλά τα aa', bc, de σε όλη τη διάρκεια της κίνησης έχουν αμετάβλητο μήκος, οπότε :

$$\frac{dl_{tot}}{dt} = 2\dot{y}_D + \dot{y}_B = 0$$

Επειδή όμως η απόσταση DA είναι σταθερή και $y_A = y_D + AD \Rightarrow \dot{y}_A = \dot{y}_D$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{dl_{tot}}{dt} = 2\dot{y}_A + \dot{y}_B = 0 \qquad (5)$$

Ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\frac{dl^2{}_{tot}}{dt^2} = 2\ddot{y}_A + \ddot{y}_B = 0 \qquad (6)$$

Από τη σχέση (6) συνεπάγεται ότι:

$$\ddot{y}_A = -\frac{\ddot{y}_B}{2} \qquad (7)$$

2ος τρόπος:

Όταν το σώμα B μετατοπίζεται κατά Δy_B, το σώμα A μετατοπίζεται κατά $\Delta y_A = -\frac{\Delta y_B}{2}$, επομένως:

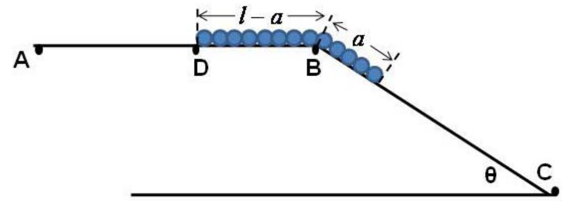
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y_A}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y_B}{\Delta t} \Rightarrow \dot{y}_A = -\frac{\dot{y}_B}{2}$$

Παραγωγίζοντας την παραράπανω σχέση έπεται ότι:

$$\ddot{y}_A = -\frac{\ddot{y}_B}{2}$$

Άσκηση 7

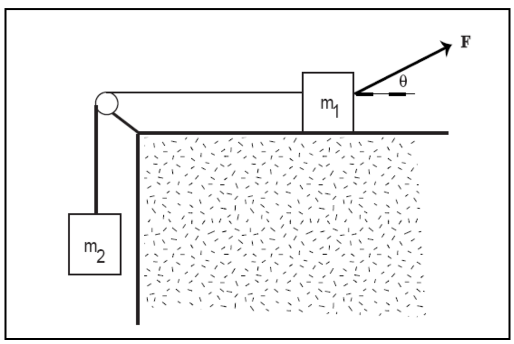
A) Μια εύκαμπτη αλυσίδα μήκους l και βάρους W τοποθετείται αρχικά ακίνητη σε λεία επιφάνεια ABC με το ένα άκρο της D σε απόσταση $l-a$ από το σημείο B, όπως στο σχήμα. Αποδείξτε ότι όταν η άκρη D φτάσει στο σημείο B, η ταχύτητα της αλυσίδας θα είναι:



$$u=\sqrt{\frac{g}{l}\sin\theta\left(l^2-a^2\right)}$$

B)

Ένα τούβλο μάζας m_1 βρίσκεται σε αδρή οριζόντια επιφάνεια και είναι συνδεδεμένο με ένα δεύτερο τούβλο, μάζας m_2, μέσω ενός αβαρούς και μη εκτατού σχοινιού, το οποίο διέρχεται από τροχαλία (μηδενικής μάζας) όπως στο σχήμα. Δύναμη $\vec{F}$ εφαρμόζεται στο τούβλο μάζας m_1, που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, και το κινεί προς τα δεξιά. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του τούβλου μάζας m_1 και του επιπέδου είναι μ. Βρείτε την έκφραση για την επιτάχυνση των τούβλων.

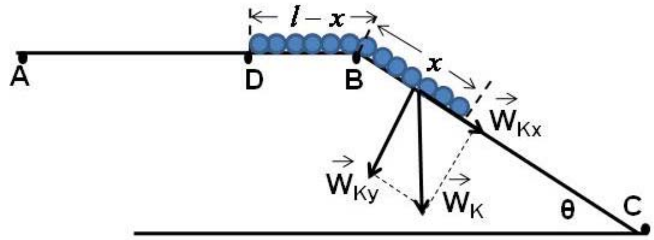


Λύση:

A)

Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης το ανά μονάδα μήκους βάρος της αλυσίδας είναι $\frac{W}{l}$, άρα για μια τυχαία θέση της αλυσίδας (βλ. σχήμα), το βάρος τυχαίου τμήματος x της αλυσίδας είναι:

$$W_K=\frac{W}{l}\cdot x \qquad (1)$$



Συνεπώς η δύναμη που κινεί την αλυσίδα είναι:

$$W_{Kx} = \frac{W}{l} \cdot x \cdot \sin\theta \qquad (2)$$

Άρα σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, κατά τη διεύθυνσης της κίνησης ισχύει:

$$ma = \frac{W}{l} \cdot x \cdot \sin\theta \Rightarrow \frac{W}{g} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{W}{l} \cdot x \cdot \sin\theta \qquad (3)$$

(όπου u η ταχύτητα)

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{du}{dt} = \frac{g}{l} \cdot x \cdot \sin\theta$$

ή

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{g}{l} \cdot x \cdot \sin\theta \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot u = \frac{g}{l} \cdot x \cdot \sin\theta \Rightarrow udu = \frac{g}{l} \cdot x \cdot \sin\theta \cdot dx$$

Με ολοκλήρωση της προηγούμενης σχέσης:

$$\int_0^u udu = \frac{g}{l}\sin\theta \int_a^l xdx \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{g}{l}\sin\theta \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^l$$
$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{g}{l}\sin\theta\left(l^2 - a^2\right)}$$

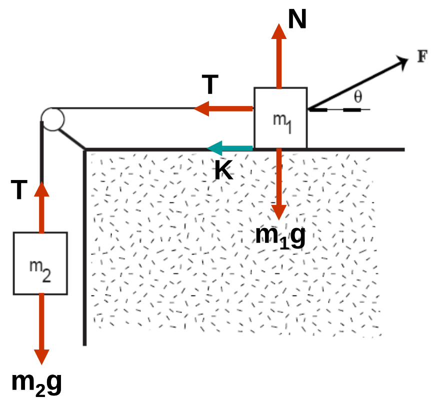
B)

Εάν η επιτάχυνση των δύο μαζών είναι α, τότε για τη μάζα m_2 ισχύει:

$$T - B_2 = m_2\alpha \qquad (1)$$

ή

$$T = m_2\alpha + m_2 g \qquad (2)$$



Για την μάζα m_1 ισχύει:

$$\sum F_x = m_1\alpha \qquad (3)$$

ή

$$F\cos\theta - T - K = m_1\alpha \Rightarrow F\cos\theta - T - \mu N = m_1\alpha \qquad (4)$$

όπου Κ η κινητική τριβή και:

$$\sum F_y = 0 \qquad (5)$$

ή

$$N + F\sin\theta - B_1 = 0 \Rightarrow N = m_1 g - F\sin\theta \qquad (6)$$

Αντικαθιστούμε τα Τ και Ν από τις (2) και (6) στην (4) οπότε:

$$F\cos\theta - m_2\alpha - m_2 g - \mu m_1 g + \mu F\sin\theta = m_1\alpha$$

ή:

$$F(\cos\theta + \mu\sin\theta) - g(m_2 + \mu m_1) = (m_1 + m_2)\alpha$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ζητούμενη επιτάχυνση είναι:

$$\alpha = \frac{F(\cos\theta + \mu\sin\theta) - g(m_2 + \mu m_1)}{(m_1 + m_2)}$$

Άσκηση 8

Σωματίδιο κινείται στον τρισδιάστατο χώρο κατά τέτοιο τρόπο ώστε η επιτάχυνση του να παραμένει σταθερή και ίση με $\vec{a} = -\hat{k}$ (όπου $\hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{j}}, \hat{\mathrm{k}}$) είναι τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς ($\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$). Η θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει συντεταγμένες $(0, 0, 1)$ ενώ η ταχύτητά του την ίδια χρονική στιγμή έχει συνιστώσες (1,1,0). Υπολογίστε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σωματίδιο θα περάσει κάτω από το επίπεδο $z = 0$ καθώς και τις συντεταγμένες της θέσης του τη στιγμή αυτή. Δώστε μια περιγραφή του είδους της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο. (Θεωρείστε μόνο θετικούς χρόνους $t \geq 0$)

Λύση :

Έστω $x(t), y(t), z(t)$ οι συντεταγμένες θέσης του σωματιδίου καθώς αυτό κινείται στο χώρο. Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι $\vec{\upsilon}(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$ και της επιτάχυνσης $\vec{a}(t) = x''(t)\hat{i} + y''(t)\hat{j} + z''(t)\hat{k}$. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε όμως :

$$\left.\begin{aligned} x''(t) &\equiv a_x = 0 \\ y''(t) &\equiv a_y = 0 \\ z''(t) &\equiv a_z = -1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει με ολοκλήρωση ότι:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= c_1 \\ y'(t) &= c_2 \\ z'(t) &= -t + c_3 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Από τις αρχικές συνθήκες της ταχύτητας για $t = 0$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} x'(0) &\equiv \upsilon_x = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ y'(0) &\equiv \upsilon_y = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \\ z'(0) &\equiv \upsilon_z = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Οπότε η ταχύτητα έχει τη διανυσματική μορφή $\vec{\upsilon} = \hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$ και συντεταγμένες

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= 1 \\ y'(t) &= 1 \\ z'(t) &= -t \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (5) προκύπτει μετά από ολοκλήρωση:

$$
\left.\begin{aligned}
x(t) &= t + c_4 \\
y(t) &= t + c_5 \\
z(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + c_6
\end{aligned}\right\} \qquad (6)
$$

Από τις αρχικές συνθήκες της θέσης για $t = 0$ έχουμε ότι

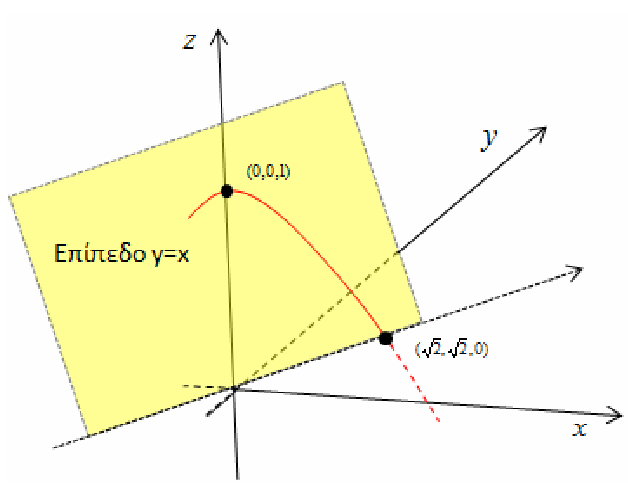
$$
\left.\begin{aligned}
x(0) = 0 &\Rightarrow c_4 = 0 \\
y(0) = 0 &\Rightarrow c_5 = 0 \\
z(0) = 1 &\Rightarrow c_6 = 1
\end{aligned}\right\} \qquad (7)
$$

Οπότε το διάνυσμα θέσης έχει τη μορφή $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t\hat{j} + (1 - \frac{1}{2}t^2)\hat{k}$.

Το σωματίδιο θα περάσει κάτω από το επίπεδο z=0 όταν $1 - \frac{1}{2}t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2}$ (η αρνητική ρίζα απορρίπτεται αφού αναφερόμαστε σε θετικούς χρόνους). Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του χρόνου στα $x(t), y(t)$ βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες θέσης του σωματιδίου τη στιγμή που αυτό διέρχεται το επίπεδο z=0 είναι :

$$
\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)
$$

Από το διάνυσμα θέσης διαπιστώνουμε ότι για κάθε χρονική στιγμή οι συντεταγμένες θέσης $x(t), y(t)$ του σωματιδίου είναι ίσες. Άρα το σωματίδιο κινείται πάνω σε επίπεδο που είναι κάθετο στο επίπεδο z=0 και διέρχεται από την ευθεία $y = x$. Η μορφή της τροχιάς πάνω στο επίπεδο αυτό είναι παραβολική με εξίσωση $z = 1 - \frac{1}{2}x^2$.



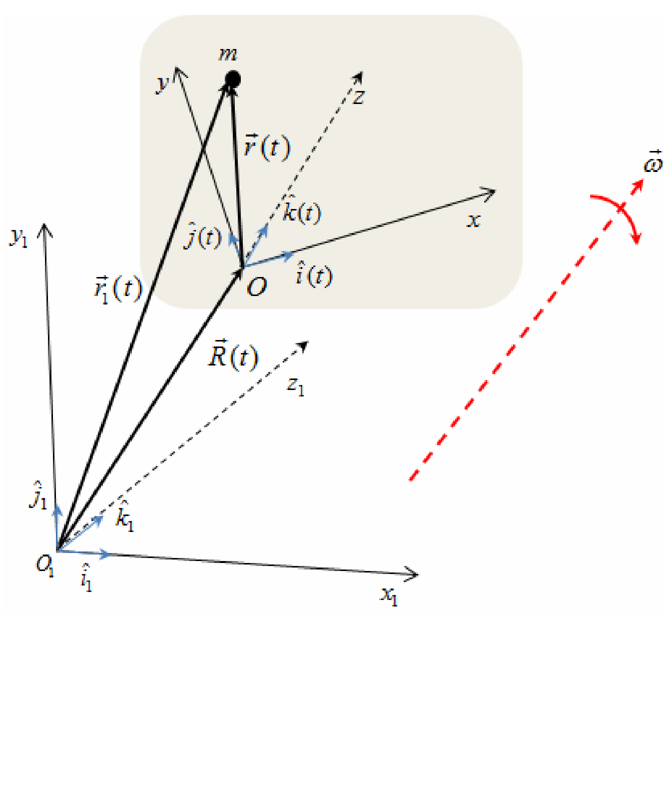
Άσκηση : 9

Θεωρείστε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς O_1 με μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1$ και ένα δεύτερο, μη αδρανειακό σύστημα O, η αρχή του οποίου έχει τυχαία γραμμική επιτάχυνση ως προς το O_1, ενώ το σύστημα αξόνων του περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ως προς το O_1. Θεωρείστε στοιχειώδη μάζα m στο χώρο επί της οποίας δρα δύναμη $\vec{F}(t)$ ($\vec{F}(t) = m\vec{\gamma}(t)$, όπως μετράται στο αδρανειακό σύστημα O_1). Ας υποθέσουμε ότι ένας παρατηρητής είναι καθηλωμένος στο εσωτερικό του O και μετρά τις συντεταγμένες του διανύσματος θέσης $\vec{r}(t)$ του m, καθώς και την ταχύτητά του $\vec{\upsilon}(t)$ και την επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ από τις μεταβολές συντεταγμένων στο σύστημα αξόνων του O, χωρίς να τον απασχολεί τι συμβαίνει στον εξωτερικό κόσμο.

1. Δείξτε ότι οι δύο επιταχύνσεις συνδέονται με την ακόλουθη σχέση.

$$\vec{a}(t) - \vec{\gamma}(t) = -\ddot{\vec{R}}(t) - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}(t)\right) - 2\left(\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}(t)\right)$$

2. Βρείτε τη μορφή του δεύτερου μέλους της παραπάνω σχέσης στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   Α. Σωμάτιο εντός τραίνου που επιταχύνεται γραμμικά με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\kappa}$ (ως προς το αδρανειακό σύστημα O_1)
   Β. Σωμάτιο ακίνητο σε απόσταση r από το κέντρο κυκλικού τροχού που περιστρέφεται στο επίπεδο $x - y$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ (ως προς το αδρανειακό σύστημα O_1 και χωρίς να μετατοπίζεται ως προς το O_1)
   Γ. Σωμάτιο που μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα υ προς το κέντρο κυκλικού τροχού που περιστρέφεται στο επίπεδο x-y με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$.



Υπόδειξη :

α. Τα μοναδιαία διανύσματα του O, όπως φαίνονται από το O_1 ενώ έχουν σταθερό μήκος μεταβάλλουν τη διεύθυνσή τους λόγω της περιστροφής. Έτσι το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ για έναν παρατηρητή στο O_1 έχει τη μορφή $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}(t) + y(t)\hat{j}(t) + z(t)\hat{k}(t)$

β. Η χρονική παράγωγος διανύσματος $\vec{A}$,σταθερού μήκους, που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, είναι $\dot{\vec{A}}(t) = \vec{\omega}\times\vec{A}$.

Λύση:

1)

Υπενθυμίζουμε ότι τα διανύσματα ορίζονται χωρίς αναφορά σε ιδιαίτερο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό που μας ενδιαφέρει στην προκειμένη περίπτωση είναι να βρούμε την έκφραση του $\ddot{\vec{r}}(t)$ αποκλειστικά σε συντεταγμένες του O χωρίς να αναφερόμαστε σε συσχετισμό με τις αντίστοιχες συντεταγμένες στο O_1. Έστω $\vec{r}_1(t)$ το διάνυσμα θέσης του m ως προς το σύστημα αναφοράς O_1 και $\vec{R}(t)$ το διάνυσμα θέσης της αρχής των αξόνων του O, ως προς την αρχή αξόνων του αδρανειακού συστήματος O_1. Τα τρία διανύσματα $\vec{r}(t), \vec{R}(t), \vec{r}_1(t)$ συνδέονται με τη γενική σχέση :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{R}(t) \qquad (1)$$

Η σχέση αυτή μας δίνει την έκφραση *του* $\vec{r}(t)$ *στο* O_1. Με παραγώγιση δεύτερης τάξης παίρνουμε :

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}_1(t) - \ddot{\vec{R}}(t) = \vec{\gamma}(t) - \ddot{\vec{R}}(t) \qquad (2)$$

Από την έκφραση του $\vec{r}(t)$ στο O παίρνουμε με παραγώγιση :

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\dot{x}(t)\hat{i}(t) + \dot{y}(t)\hat{j}(t) + \dot{z}(t)\hat{k}(t)\right) + \left(x(t)\dot{\hat{i}}(t) + y(t)\dot{\hat{j}}(t) + z(t)\dot{\hat{k}}(t)\right) \qquad (3)$$

Ο πρώτος όρος της (3) είναι η ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)$ που μετρά παρατηρητής καθηλωμένος στο εσωτερικό του Ο και δεν αντιλαμβάνεται την περιστροφή και μετατόπιση των αξόνων του.

Ο δεύτερος όρος, σύμφωνα με την υπόδειξη μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή :

$$x(t)\dot{\hat{i}}(t) + y(t)\dot{\hat{j}}(t) + z(t)\dot{\hat{k}}(t) = x(t)\left(\vec{\omega}\times\hat{i}(t)\right) + y(t)\left(\vec{\omega}\times\hat{j}(t)\right) + z(t)\left(\vec{\omega}\times\hat{k}(t)\right)$$
$$= \vec{\omega}\times\left(x(t)\hat{i}(t) + y(t)\hat{j}(t) + z(t)\hat{k}(t)\right) = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Έτσι η (3) παίρνει τη μορφή :

$$\dot{\vec{r}}(t)=\vec{\upsilon}(t)+\vec{\omega}\times\vec{r}(t) \qquad (4)$$

Επειδή όμως και η ταχύτητα έχει τη μορφή $\vec{\upsilon}(t)=\upsilon_x(t)\hat{i}(t)+\upsilon_y(t)\hat{j}(t)+\upsilon_z(t)\hat{k}(t)$ στο Ο ισχύει αντίστοιχα με την (4) ότι :

$$\dot{\vec{\upsilon}}(t)=\vec{a}(t)+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}(t) \qquad (4\alpha)$$

Παραγωγίζοντας την (4), και λαμβάνοντας υπόψη ότι το $\vec{\omega}(t)$ είναι σταθερό, (και άρα $\dot{\vec{\omega}}(t)=0$) λαμβάνουμε:

$$\ddot{\vec{r}}(t)=\dot{\vec{\upsilon}}(t)+\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}(t) \qquad (5)$$

Με αντικατάσταση των $\dot{\vec{r}}(t),\dot{\vec{\upsilon}}(t)$ από τις σχέσεις (4),(4α) στην (5) λαμβάνουμε :

$$\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{a}(t)+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}(t)+\vec{\omega}\times\left(\vec{\upsilon}(t)+\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right)=\vec{a}(t)+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right)+2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}(t) \qquad (6)$$

Από τις ισότητες (2),(6) λαμβάνουμε τελικά :

$$\vec{a}(t)-\vec{\gamma}(t)=-\ddot{\vec{R}}(t)-\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right)-2\left(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}(t)\right) \qquad (7)$$

Η σχέση αυτή συνδέει τις ποσότητες $\vec{r}(t)$ και $\vec{\upsilon}(t)$ που σχετίζονται με την κίνηση της μάζας m στο εσωτερικό του επιταχυνόμενου συστήματος Ο με τις ποσότητες $\ddot{\vec{R}}(t)$ και $\vec{\omega}(t)$ που είναι ιδιότητες του Ο αυτού καθ' εαυτού τις οποίες, στη γενική περίπτωση, ο παρατηρητής εντός του Ο θα πρέπει να γνωρίζει προκειμένου να κάνει ορθούς υπολογισμούς.

2)

Α) Σύστημα αναφοράς συνδεδεμένο με το τραίνο έχει μόνο μεταφορική κίνηση χωρίς περιστροφή. Η σχέση (7) παίρνει τη μορφή:

$$\vec{a}(t)-\vec{\gamma}(t)=-\vec{\kappa} \qquad (8)$$

Β) Σύστημα αναφοράς συνδεδεμένο με το κέντρο του τροχού έχει μόνο περιστροφική κίνηση, ενώ το σωμάτιο παραμένει ακίνητο σ' αυτό το σύστημα. Έτσι ο πρώτος και ο τρίτος όρος του δεύτερου μέλους της σχέσης (7) είναι μηδενικοί οπότε η (7) παίρνει τη μορφή :

$$\vec{a}(t)-\vec{\gamma}(t)=-\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right)=r\omega^2\hat{r}=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \qquad (9)$$

Η επιτάχυνση έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά της κεντρομόλου επιτάχυνσης και ονομάζεται συνήθως φυγόκεντρος επιτάχυνση.

Γ) Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να προσθέσουμε στην (9) την επίδραση της ταχύτητας και να λάβουμε υπόψη ότι η επιβατική ακτίνα $\vec{r}(t)$ είναι μεταβαλλόμενη.

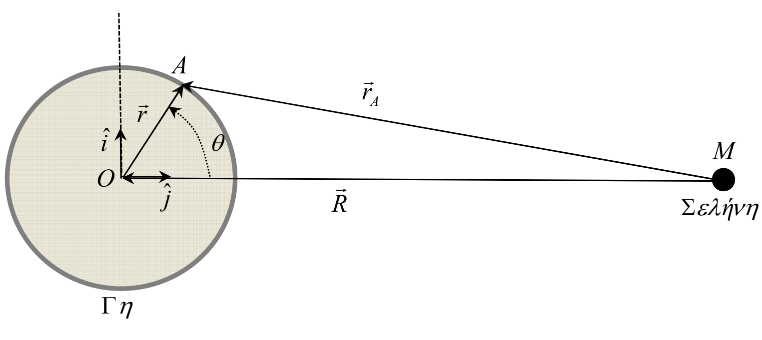
$$\vec{a}(t)-\vec{\gamma}(t)=-\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right)-2\left(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}(t)\right)=r(t)\omega^2\hat{r}+2\omega\upsilon\hat{u}_\theta \qquad (10)$$

Όπου $\hat{u}(\theta)$ είναι εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση περιστροφής. Ο δεύτερος όρος της (10) περιγράφεται στη βιβλιογραφία ως δύναμη Coriolis.

Άσκηση 10

Η παλιρροιακή δύναμη σε κάποιο σημείο Α της επιφάνειας της Γης υπολογίζεται από τη διανυσματική διαφορά της βαρυτικής έλξης την οποία ασκεί η Σελήνη σε μια στοιχειώδη μάζα m στο εν λόγω σημείο, και της βαρυτικής έλξης που θα ασκούσε στην ίδια μάζα εάν αυτή βρισκόταν στο κέντρο της Γης.

Σύντομη ερμηνεία: Δεδομένου ότι ο άξονας περιστροφής της Γης δείχνει σε σταθερή διεύθυνση σε σχέση με τα άστρα, μπορούμε να αναφερθούμε σε ένα σύστημα αναφοράς Ο πακτωμένο στο κέντρο της Γη , που εκτελεί μεταφορική κίνηση μαζί της γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος Γη-Σελήνη αλλά δεν περιστρέφεται. Σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα στο διάστημα όλα τα σημεία του Ο κινούνται με την ίδια επιτάχυνση. Κάθε σώμα στο σύστημα αναφοράς Ο υφίσταται μια δύναμη που είναι ανεξάρτητη από τη θέση του. Για υπολογισμούς πάνω στο ίδιο το Ο η δύναμη αυτή θα πρέπει να αφαιρεθεί διανυσματικά από τη δύναμη βαρύτητας. (Για τους υπολογισμούς σας θεωρείστε τη Σελήνη σημειακή. Ο λόγος της ακτίνας της Γης προς την απόσταση του κέντρου της από τη Σελήνη είναι $\frac{r}{R}\approx 1,6\times10^{-2}$. *Όπου χρειαστεί χρησιμοποιείστε την προσέγγιση του διωνυμικού αναπτύγματος:* $(1+x)^n \approx 1+nx$ *για* $|x|<<1,\ n\equiv σταθερά$*)*

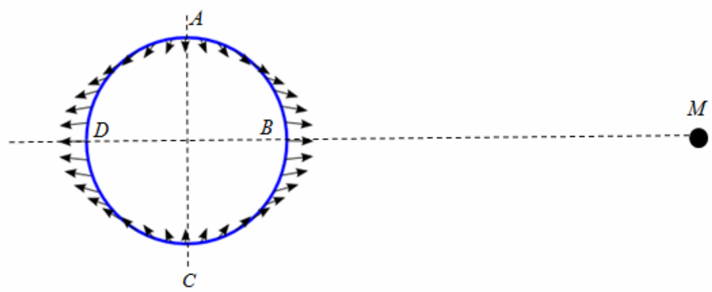


α) Δείξτε ότι η δύναμη παλίρροιας $\vec{F}_{\pi\alpha\lambda}$ την οποία νοιώθει στοιχειώδης μάζα m στο σημείο Α δίνεται, σε πρώτη προσέγγιση, από τη σχέση

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda}\approx -G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r}-3\vec{R}\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right]$$

β) Η άποψη που αποδίδει τα παλιρροιακά φαινόμενα στην απλή βαρυτική έλξη της Σελήνης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όταν στην πλησιέστερη προς τη Σελήνη πλευρά, πάνω στην ευθεία που τη συνδέει με το κέντρο της Γης, έχουμε άμπωτη τότε στο αντιδιαμετρικό σημείο θα έχουμε πλημμυρίδα. Στην πράξη όμως παρατηρούμε και στα δύο σημεία ταυτόχρονα άμπωτη όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

Εξηγείστε το φαινόμενο, υπολογίζοντας τις δυνάμεις στα σημεία A,B,C,D στο ακόλουθο σχήμα, με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος α.



Λύση:

α) Σύμφωνα με την εκφώνηση η δύναμη παλίρροιας σε στοιχειώδη μάζα m στο σημείο A θα ισούται με:

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda} = -G\frac{mM}{r_A^{\ 3}}\vec{r}_A + G\frac{mM}{R^3}\vec{R} \quad (1)$$

Εκφράζουμε το διάνυσμα $\vec{r}_A$ ως συνδυασμό των $\vec{r},\vec{R}$:

$$\vec{r}_A = \vec{R} + \vec{r} \quad (2)$$

$$\vec{r}_A \cdot \vec{r}_A = \left(\vec{R}+\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{R}+\vec{r}\right) \Rightarrow r_A^2 = R^2 + r^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{r} \Rightarrow$$

$$r_A^2 = R^2\left(1 + \cancel{\frac{r^2}{R^2}} + 2\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right) \quad (3)$$

Επειδή $\dfrac{r^2}{R^2} = 2,56\times10^{-4}$ μπορούμε να παραλείψουμε το δεύτερο όρο στο δεύτερο τμήμα της ισότητας (3). Από τη σχέση (3), υψώνοντας στη δύναμη -3/2, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα για το δεύτερο μέλος και κρατώντας τους όρους πρώτης τάξης έχουμε :

$$r_A^{-3} \equiv \left(r_A^2\right)^{-3/2} = R^{-3}\left(1 - 3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right) \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (4) στην (1) λαμβάνουμε :

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda} = -GmM\left[\frac{1}{R^3}\left(\vec{R}+\vec{r}\right)\left(1-3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right) - \frac{\vec{R}}{R^3}\right] \quad (5)$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της (5) λαμβάνουμε:

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda} = -\frac{GmM}{R^3}\left[\cancel{+\vec{R}} + \vec{r} - 3\vec{R}\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2} - 3\vec{r}\,\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\cancel{-\vec{R}}\right] =$$

$$= -\frac{GmM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{R}\cdot\vec{r}\left(\frac{\vec{R}+\vec{r}}{R^2}\right)\right] \quad (6)$$

Ο όρος στο εσωτερικό της παρένθεσης της (6) απλοποιείται ως ακολούθως

$$\frac{\vec{R}+\vec{r}}{R^2} = \frac{1}{R}\left(\hat{R} + \frac{r}{R}\hat{r}\right) \approx \frac{\vec{R}}{R^2} \quad (7)$$

Δεδομένου ότι r<<R, το δεύτερο διάνυσμα της παρένθεσης σε πρώτη προσέγγιση δεν αλλοιώνει τη διεύθυνση και το μήκος του διανύσματος $\vec{R}$. Έτσι με αντικατάσταση της (7) στην (6) καταλήγουμε στην τελική σχέση:

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda} \approx -G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{R}\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right]$$

β) Για τα σημεία A και C ισχύει $\vec{R}\bullet\vec{r} = 0$ οπότε η δύναμη έχει φορά αντίθετη του $\vec{r}$, δηλαδή κάθετα και προς το εσωτερικό της Γης

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda} \approx -G\frac{mM}{R^3}\vec{r}$$

και μέτρο $GmM(r/R^3)$

Για το B έχουμε :

$$\vec{F}^{B}_{\pi\alpha\lambda} \approx -G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{R}\frac{Rr\cos(\pi)}{R^2}\right] =$$

$$-G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} + 3\vec{R}\frac{r}{R}\right] = -G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{r}\right] = 2G\frac{mM}{R^3}\vec{r}$$

Ενώ για το D :

$$\vec{F}^{D}_{\pi\alpha\lambda} \approx -G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{R}\frac{Rr\cos(0)}{R^2}\right] =$$

$$-G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{R}\frac{r}{R}\right] = -G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{r}\right] = 2G\frac{mM}{R^3}\vec{r}$$

Έτσι στα B και D η δύναμη έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα $\vec{r}$, κάθετα δηλ. και προς το εξωτερικό της Γης. Το μέτρο της δύναμης στα B,D είναι: $2GmM\left(r/R^3\right)$.