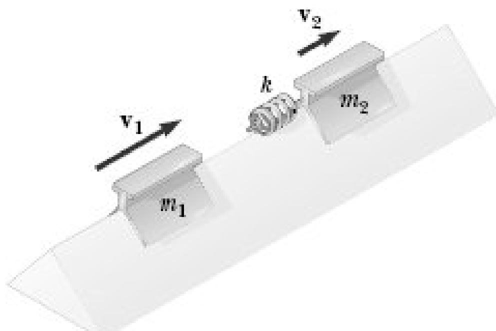
ΕΡΓΑΣΙΑ 4η

Παράδοση 16-3-2009

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

Άσκηση 1



Δύο σώματα m_1 και m_2 κινούνται χωρίς τριβές στην τροχιά που φαίνεται στο σχήμα με ταχύτητες $\vec{V}_1$ και $\vec{V}_2$ αντίστοιχα, $|V_1| \succ |V_2|$. Ελατήριο σταθεράς k και αμελητέας μάζας προσαρμόζεται στο ένα εξ αυτών. Να βρεθούν (α) οι διανυσματικές ταχύτητες των σωμάτων την στιγμή που η συσπείρωση του ελατηρίου είναι μέγιστη, (β) η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, (γ) η διανυσματική ταχύτητα κάθε σώματος μετά την απώλεια της επαφής του σώματος m_1 από το ελατήριο και (δ) το έργο της δύναμης του ελατηρίου μέχρι την στιγμή που η παραμόρφωση του θα είναι η μισή της μέγιστης.

.

Λύση

(a) Επειδή ($|V_1| \succ |V_2|$), το σώμα m_1 προσπίπτει στο ελατήριο και το ελατήριο θα αρχίσει να συμπιέζεται έως ότου αυτό αποκτήσει την μέγιστη συμπίεση. Τότε ακριβώς τα δύο σώματα θα έχουν κοινή ταχύτητα **V**. Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

(β) Επειδή οι δυνάμεις που επιδρούν είναι συντηρητικές θα ισχύει $\Delta E = 0$ και άρα

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)V^2 + \frac{1}{2}kx_m^2 \qquad (2)$$

Αντικαθιστούμε το μέτρο της V από την σχέση (1) και λύνουμε ως προς x_m :

$$x_m = \left(V_1 - V_2\right)\sqrt{\frac{m_1m_2}{k\left(m_1 + m_2\right)}} \qquad (3)$$

(γ) Αρχικά εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης Ορμής και παίρνουμε:

$$m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2 = m_1\mathbf{V}_{1f} + m_2\mathbf{V}_{2f} \rightarrow m_1\left(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{1f}\right) = -m_2\left(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2f}\right) \qquad (4)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε τώρα:

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2 \qquad (5)$$

η οποία απλοποιείται και γίνεται:

$$m_1\left(V_1^2 - V_{1f}^2\right) = -m_2\left(V_2^2 - V_{2f}^2\right)$$
(6)

Με την βοήθεια της σχέσης (4) η (6) παίρνει την μορφή:

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_{1f} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{2f} \rightarrow \mathbf{V}_{1f} = \mathbf{V}_{2f} + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 \quad (7)$$

Με αντικατάσταση της (7) στην (4) παίρνουμε:

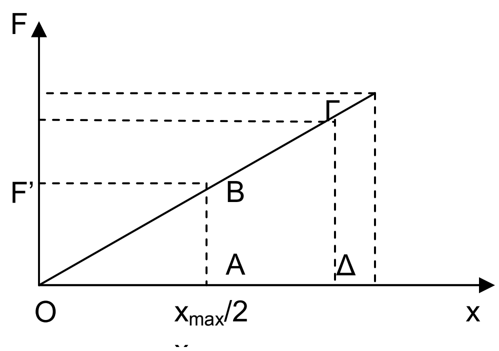
$$\mathbf{V}_{2f} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{V}_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\mathbf{V}_2 \text{ και } \mathbf{V}_{1f} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\mathbf{V}_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\mathbf{V}_2$$

(δ) Η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι $x = x_m/2$ δύο φορές. Η πρώτη όταν το σώμα m_1 πλησιάζει το m_2 και η δεύτερη όταν απομακρύνεται. Το ζητούμενο έργο της δύναμης του ελατηρίου θα είναι

$$W = -\frac{1}{2}k\frac{x_m^2}{4} = -\frac{1}{8}\left(V_1 - V_2\right)^2 \frac{m_1 m_2}{\left(m_1+m_2\right)}$$

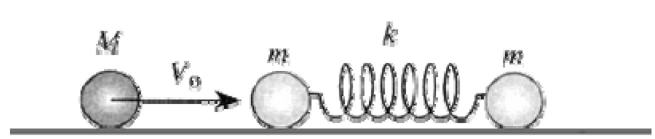
Μπορεί να υπολογιστεί και από το εμβαδόν του τριγώνου $E_{OAB} = \frac{1}{2}(OA)\,(OB) = \frac{1}{2}F'\left(\frac{x_{max}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-k\frac{x_{max}}{2}\right)\left(\frac{x_{max}}{2}\right) = -\frac{1}{2}k\left(\frac{x_{max}}{2}\right)^2$

Όταν το σώμα απομακρύνεται το ζητούμενο έργο δίνεται από το εμβαδόν $E_{OΓΔ} - E_{ABΓΔ} = E_{OAB}$



Άσκηση 2

Α.



Δύο σώματα με μάζες $m_1 = m_2 = m$ συνδέονται με ελατήριο σταθεράς k αμελητέας μάζας και μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα των δύο μαζών αρχικά είναι ακίνητο, ενώ μια μάζα M κινούμενη με ταχύτητα V_0 συγκρούεται ελαστικά με την μάζα m_1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθούν

1. η ταχύτητα που θα αποκτήσει η κάθε μάζα αμέσως μετά την κρούση
2. Να γραφεί η συνάρτηση της απόστασης, d, του κέντρου μάζας του συστήματος

ελατήριο/m_1, m_2 από την μάζα M ως προς τον χρόνο, αν $t = 0$ είναι η στιγμή αμέσως μετά την κρούση.

3. Ποια είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου;
4. Να περιγραφεί ποιοτικά η κίνηση του συστήματος ελατήριο/m_1,m_2 αμέσως μετά την κρούση.

Λύση

1. Μετά την σύγκρουση η μπάλα Μ θα κινείται με ταχύτητα V_1, ενώ η μάζα m_1 αποκτά ταχύτητα V_2. Εφαρμόζοντας της αρχές διατήρησης της ενέργειας και ορμής έχουμε:

$$\frac{MV_0^2}{2} = \frac{MV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2}$$

$$MV_0 = MV_1 + mV_2$$

Οπότε οι ταχύτητες υπολογίζονται και δίνονται από τις σχέσεις (βλ. Θεωρία);

$$V_1 = \frac{M-m}{M+m}V_0 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}V_0$$

$$V_2 = \frac{2M}{M+m}V_0 = \frac{2}{1+\gamma}V_0$$

όπου

$$\gamma \equiv \frac{m}{M}$$

2. Έτσι μετά την κρούση η θέση της μπάλας Μ θα δίνεται από την σχέση

$$x = V_1 t = \frac{V_0\left(1-\gamma\right)}{\left(1+\gamma\right)} \cdot t$$

Επειδή οι μάζες m_1,m_2 είναι ίσες το κέντρο μάζας του συστήματος ελατήριο/m_1,m_2 θα κινείται με ταχύτητα $V_2/2$ και η θέση του θα δίνεται από την σχέση

$$x_c = \frac{x_o}{2} + \frac{V_2}{2} \cdot t = \frac{x_o}{2} + \frac{V_0}{1+\gamma} \cdot t$$

όπου x_o η το φυσικό μήκος του ελατηρίου

Επομένως η απόσταση κέντρου μάζας του συστήματος και σώματος Μ και θα δίνεται από την σχέση

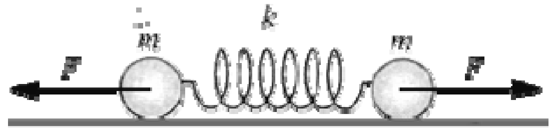
$$d = x_c - x = \frac{x_o}{2} - \frac{V_0 \gamma t}{\left(1+\gamma\right)}$$

3. Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου επιτυγχάνεται την στιγμή που οι μάζες m_1,m_2 αποκτήσουν κοινή ταχύτητα ίση με αυτήν του κέντρου μάζας τους $V_2/2$. Τότε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{V_2}{2}\right)^2 \to \ldots \to \boxed{x_{\max} = 2\sqrt{\frac{m}{2k}}\frac{V_0}{1+\gamma}}$$

4. Από την στιγμή της κρούσης και μετά, η μάζα M κινείται με σταθερή ταχύτητα V_1, όπως επίσης και το κέντρο μάζας του συστήματος ελατήριο/m_1,m_2. Αμέσως μετά την κρούση, η μάζα m_1 αρχίζει να κινείται με ταχύτητα V_2 ενώ ταυτόχρονα το ελατήριο ασκεί δύναμη $F = -kx$, όπου x η παραμόρφωση του ελατηρίου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, που

αντιστοιχεί σε τυχαία χρονική στιγμή.



Έτσι η m_1 επιβραδύνεται και η m_2 επιταχύνεται. Η μέγιστη παραμόρφωση θα επιτυγχάνεται κάθε φορά που οι ταχύτητες των σωμάτων γίνονται ίδιες. Παρόλα αυτά το κέντρο μάζας τους θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αυτή η κίνηση θα συνεχίζεται και έτσι οι μάζες θα εκτελούν ταλάντωση ως προς το κέντρο μάζας τους.

Β. Σώμα μάζας *m* αφήνεται ελεύθερο σε ύψος *h* πάνω από την επιφάνεια της γης. (α) Να βρεθεί η ταχύτητα που αποκτά το σώμα σε απόσταση *r* από το κέντρο της γης (β) Αν υποτεθεί ότι το ύψος στο οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα είναι 500 km, να βρεθεί ο χρόνος πτώσης του σώματος ως προς την επιφάνεια της γης.

Όπου απαιτείται, να γίνει χρήση του ολοκληρώματος

$$\int_{6.37}^{6.87}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6.87}\right)^{-\frac{1}{2}}dx = 9.596$$

και του μετασχηματισμού $u=\dfrac{r}{10^6}$

Δίνονται:Η ακτίνα της γης, $R_E = 6.37x10^6$ m, η μάζα της γης, $M_E = 5.98x10^{24}$ kg και η σταθερά παγκόσμιας έλξης, $G = 6.67x10^{-11}Nm^2/kg^2$.

***Σημείωση**: Στην άσκηση αυτή δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις αριθμητικές πράξεις υπολογισμού του χρόνου, όπως προκύπτει από το ερώτημα (β). Έτσι πρέπει να εξηγηθεί πλήρως ο τρόπος υπολογισμού του. Στο ερώτημα (α) δεν απαιτείται η εύρεση της αριθμητικής τιμής της ταχύτητας.*

Λύση

(α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα σώμα-Γη από την θέση όπου αφέθηκε ελεύθερο ως την θέση r και έχουμε:

$$\left(K+U\right)_h=\left(K+U\right)_r \to 0-\frac{GM_Em}{R_E+h}=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{GM_Em}{r}\to$$

$$\upsilon=\left(2GM_E\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_E+h}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{dr}{dt}$$

(β)

$$\int_i^f dt=\int_i^f -\frac{dr}{\upsilon}=\int_f^i\frac{dr}{\upsilon}\to\Delta t=\int_{R_E}^{R_E+h}\left(2GM_E\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_E+h}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}dr\to$$

$$\Delta t=\int_{6.37x10^6}^{6.87x10^6}\left(2\cdot 6.67x10^{-11}\cdot 5.98x10^{24}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{6.87x10^6}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}dr \qquad (I)$$

Η σχέση (Ι) μπορεί να απλοποιηθεί μέσω του μετασχηματισμού $u = \frac{r}{10^6}$ ως εξής:

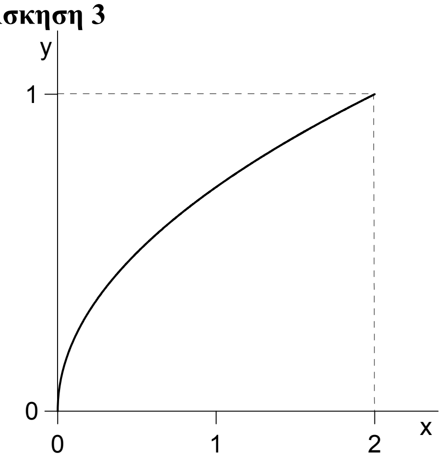
$$\Delta t = \left(7.977x10^{14}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{6.37}^{6.87} \left(\frac{1}{10^6 u} - \frac{1}{6.87x10^6}\right)^{-\frac{1}{2}} 10^6\, du = 35.41 \cdot \int_{6.37}^{6.87} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{6.87}\right)^{-\frac{1}{2}} du\,.$$

Κάνοντας χρήση του ολοκληρώματος που δίνεται, ο χρόνος καθόδου υπολογίζεται ως

$$\boxed{\Delta t = 339.8\text{ s}}$$

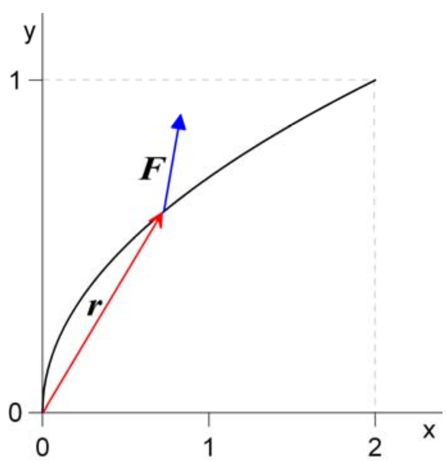
Άσκηση 3

Α.



Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \left(xy, -y^2\right)$ που δρά σε σώμα μάζας m, όταν το σώμα μετατοπίζεται πάνω στο επίπεδο *(x,y)* κατά μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}$, από το σημείο Α(0,0) εως το σημείο Β(2,1), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Λύση



Από τον ορισμό του έργου έχουμε
Από τον ορισμό του έργου δύναμης έχουμε:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(xy\vec{i} - y^2\vec{j}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = xy\, dx - y^2\, dy$$

Οπότε

$$W = \int_0^2 xy\, dx - \int_0^1 y^2\, dy = \int_0^2 x\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dx - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{5}2^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{8}{5} - \frac{1}{3} = \frac{19}{15}$$

Β. Ένας άνθρωπος μάζας 60 kg τρέχει με αρχική ταχύτητα 4 m/s και πηδάει πάνω σε κιβώτιο μάζας 120 kg που αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία. Ο άνθρωπος ολισθαίνει στην επιφάνεια του κιβωτίου και τελικά ηρεμεί στο σύστημα αναφοράς του κιβωτίου. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του ανθρώπου και του κιβωτίου είναι 0.4. Η τριβή μεταξύ του κιβωτίου και του εδάφους θεωρείται αμελητέα. Να βρεθεί

a) η τελική ταχύτητα του ανθρώπου και του κιβωτίου ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος
b) η τριβή ολίσθησης που ασκείται στον άνθρωπο κατά την πορεία του πάνω στο κιβώτιο. Για πόσο

χρόνο ασκείται;

c) η μεταβολή ορμής i) του ανθρώπου και ii) του κιβωτίου

d) η μεταβολή της κινητικής ενέργειας i) του ανθρώπου και ii) του κιβωτίου. Σχολιάστε το αποτέλεσμά σας. Πού οφείλεται η απώλεια της μηχανικής ενέργειας;

e) η μετατόπιση του ανθρώπου πάνω στο κιβώτιο ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος

f) η μετατόπιση του κιβωτίου κατά τη κίνηση του ανθρώπου ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος

Λύση

a) Στο σύστημα άνθρωπος-κιβώτιο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις άρα η συνολική ορμή διατηρείται. Η τελική ταχύτητα του συστήματος θα είναι

$$60kg\ 4m/s = (120+60)kg\,\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = 1.33m/s$$

β)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \mathrm{N} - W_\alpha = 0 \Rightarrow \mathrm{N} = 60kg\ 9.8m/s^2 = 588\mathrm{N}$$

$$f_\kappa = \mu_\kappa \mathrm{N} = 0.4 588\mathrm{N} = 235\mathrm{N}$$

$$\vec{f}_\kappa = -235\mathrm{N}\hat{i}$$

$$p_{a,\alpha\rho\chi} + F\Delta t = p_{a,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon_{a,\alpha\rho\chi} + F\Delta t = m\upsilon_{a,\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\Delta t = \frac{m(\upsilon_{a,\alpha\rho\chi} - \upsilon_{a,\tau\varepsilon\lambda})}{F} = \frac{60kg(4-1.33)m/s}{235N} = 0.68s$$

γ) Για τον άνθρωπο $\Delta\vec{p}_a = 60kg(1.33-4)m/s = -160Ns\hat{i}$

Για το κιβώτιο $\Delta\vec{p}_\kappa = 120kg1.33m/s - 0 = 160Ns\hat{i}$

δ) $\Delta\mathrm{K}_\alpha = \frac{1}{2}m\upsilon^2{}_{a,\tau\varepsilon\lambda} - \frac{1}{2}m\upsilon^2{}_{a,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}60kg(1.33m/s)^2 - \frac{1}{2}60kg(4m/s)^2 = -427J$

$$\Delta\mathrm{K}_\kappa = \frac{1}{2}m\upsilon^2{}_{\kappa,\tau\varepsilon\lambda} - \frac{1}{2}m\upsilon^2{}_{\kappa,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}120kg(1.33m/s)^2 = 107J$$

Η δύναμη που ασκείται από τον άνθρωπο στο κιβώτιο πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκείται από το κιβώτιο στον άνθρωπο. Η απόσταση που διανύει το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει είναι διαφορετική από την απόσταση κατά την οποία μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της δύναμης τριβής στο κιβώτιο. Η κρούση είναι ανελαστική και η συνολική μεταβολή της ενέργειας και των δύο σωμάτων είναι -320 J πηγαίνει στην αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος.

ε) Η απόσταση που διανύει ο άνθρωπος μέχρι να σταματήσει θα είναι ίση με το έργο της τριβής δηλαδή με την απώλεια της ενέργειάς του $\Delta x = \frac{\Delta K_a}{f_\kappa} = \frac{427J}{235N} = 1.81m$

ζ) Η απόσταση που διανύει το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει ο άνθρωπος θα είναι ίση με το έργο της τριβής δηλαδή με την απώλεια της ενέργειάς του $\Delta x = \frac{\Delta K_\kappa}{f_\kappa} = \frac{107J}{235N} = 0.45m$

Άσκηση 4

A Θεωρείστε τον Ήλιο και τη Γη να περιφέρεται γύρω από αυτόν σε κυκλική τροχιά. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ταχύτητας του Ήλιου ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος Ήλιος-Γη σε χρονική περίοδο 6 μηνών. Η επίδραση άλλων ουράνιων σωμάτων θεωρείται αμελητέα.

Δίνονται: απόσταση Γης-Ηλίου $r_{\Gamma-H}=1.496\,x10^{11}m$ (1 Αστρονομική Μονάδα), $m_\Gamma = 5.98x10^{24}kg$, $M_H = 1.991x10^{30}kg$. Θεωρείστε ότι $m_\Gamma << M_H$.

Β Δύο σώματα με μάζες M_1 και M_2 είναι δεμένα μεταξύ τους με νήμα μήκους l . Το σύστημα κινείται σε λεία οριζόντια επιφάνεια έτσι ώστε το νήμα να είναι πάντα τεντωμένο. Κάποια στιγμή διαπιστώνεται ότι το M_1 είναι ακίνητο ενώ το M_2 κινείται με ταχύτητα υ, η οποία είναι κάθετη στο νήμα. Υπολογίστε την τάση του νήματος.

Λύση

Α) Το κέντρο μάζας του συστήματος ‘Ηλιος-Γη βρίσκεται από τη σχέση (κεφ. 3.1.1 Σελ. 16 Τόμος Β)

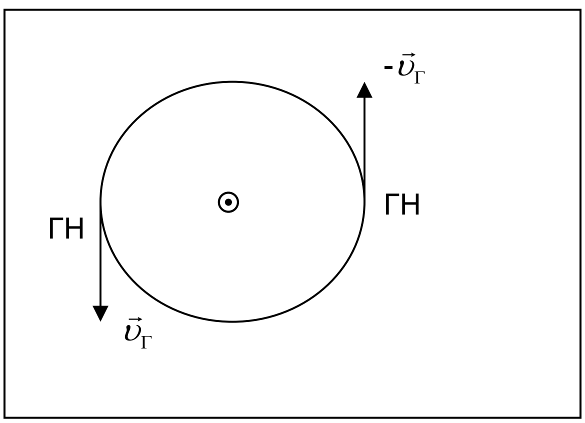
$\vec{R} = \dfrac{m\vec{r}_{\Gamma-H}}{m+\mathrm{M}} \sim 449km$ άρα βρίσκεται κυριολεκτικά κοντά στον Ήλιο αφού η ακτίνα του Ήλιου είναι 695500km οπότε πρακτικά η Γ περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι

$\vec{\upsilon}_{\kappa\mu} = \dfrac{m\vec{\upsilon}_\Gamma + \mathrm{M}\vec{\upsilon}_\mathrm{H}}{m+\mathrm{M}}$ οπότε

$$\mathrm{M}\left(\vec{\upsilon}_\mathrm{H} - \vec{\upsilon}_{\kappa\mu}\right) = -m\left(\vec{\upsilon}_\Gamma - \vec{\upsilon}_{\kappa\mu}\right) \Rightarrow \vec{\upsilon}_{\mathrm{H},\sigma\chi} = -\frac{m}{M}\vec{\upsilon}_{\Gamma,\sigma\chi} \Rightarrow \Delta\vec{\upsilon}_{\mathrm{H},\sigma\chi} = -\frac{m}{M}\Delta\vec{\upsilon}_{\Gamma,\sigma\chi} \Rightarrow$$

$$\left|\Delta\vec{\upsilon}_{\mathrm{H},\sigma\chi}\right| = \frac{m}{M}\left|\Delta\vec{\upsilon}_{\Gamma,\sigma\chi}\right| \qquad (1)$$



Η τροχιακή ταχύτητα της Γης με την προσέγγιση είναι εκτελεί κυκλική κίνηση είναι

$$\upsilon_\Gamma = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi 1.496\,x10^{11}m}{3.156\,x10^7 s} = 2.98\,x10^4 m/s$$

Λόγω περιστροφής της Γης σε 6 μήνες η ταχύτητα της Γης θα είναι ίση και αντίθετη (βλ. σχήμα) δηλαδή

$$\left|\Delta\vec{\upsilon}_{\Gamma,\sigma\chi}\right| = \vec{\upsilon}_\Gamma - \left(-\vec{\upsilon}_\Gamma\right) = 2\vec{\upsilon}_\Gamma = 5.96\,10^4 m/s$$

κι άρα από την (1)

$$\left|\Delta\vec{\upsilon}_{H,\sigma\chi}\right| = \frac{5.98 \quad 10^{24}}{1.991 \quad 10^{30}}5.96 \quad 10^4 = 0.18m/s$$

Πολύ μικρή όπως αναμενόταν αφού το κ.μ είναι πολύ κοντά στον Ήλιο.

B) Στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Από τον ορισμό του κ.μ υπολογίζουμε την ταχύτητά του

$$(m_1 + m_2)\,\upsilon_c = m_1 0 + m_2\vec{\upsilon} \Rightarrow \upsilon_c = \frac{m_2\vec{\upsilon}}{m_1 + m_2}$$

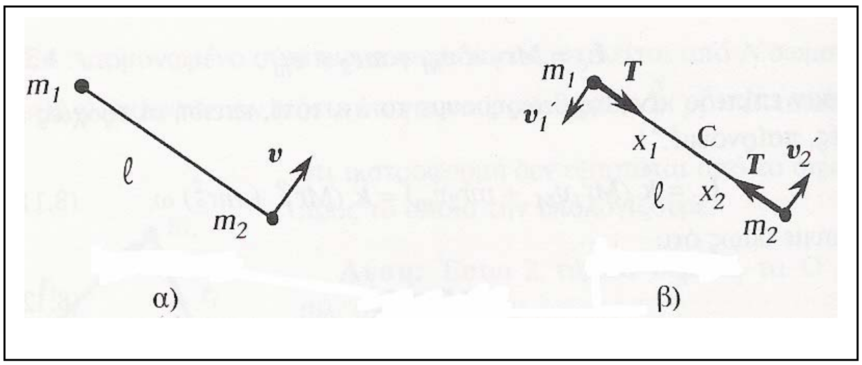
Άρα η ταχύτητα του κ.μ είναι σταθερή και κάθετη στο νήμα. Στο σύστημα του κέντρου μάζας (σχήμα β) τα σωματίδια θα έχουν ταχύτητες

$$\vec{\upsilon}_1' = 0 - \vec{\upsilon}_c = -\vec{\upsilon}_c = -\frac{m_2\vec{\upsilon}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon} - \upsilon_c = \vec{\upsilon} - \frac{m_2\vec{\upsilon}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{\upsilon}}{m_1 + m_2}$$

Άρα οι

υ_1' και υ_2' είναι κάθετες στο νήμα και έχουν φορά που φαίνεται στο σχήμα β



Δηλαδή τα σωματίδια περιστρέφονται γύρω από το κ.μ με γραμμικές ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$, $\vec{\upsilon}_2'$ οπότε η τάση T παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δηλαδή

$\mathrm{T} = \dfrac{m_1\upsilon_1^{2\prime}}{x_1} = \dfrac{m_2\upsilon_2^{2\prime}}{x_2}$ όπου τα x_1 και x_2 υπολογίζονται από τον ορισμό του κ.μ

$x_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}l \quad x_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}l$ οπότε

$$\mathrm{T} = \frac{m_1\upsilon_1^{2\prime}}{x_1} = \frac{m_2\upsilon_2^{2\prime}}{x_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{\upsilon^2}{l}$$

Άσκηση 5

A Σταγόνα βροχής που αρχικά έχει μάζα M και ταχύτητα u, πέφτει και πάνω της επικάθεται σκόνη, η ταχύτητα της οποίας ως προς τη Γη είναι υ_o, με ρυθμό λ gr/s. Υπολογίστε την ταχύτητα της σταγόνας ως συνάρτηση του χρόνου. Αγνοείστε την αντίσταση του αέρα.

B Μία σφαίρα μάζας m_1= 0.5kg κινείται με ταχύτητα $(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$ m/s χτυπά μια άλλη μάζας m_2=1.5 kg που κινείται με ταχύτητα $(-1\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{k})$m/s.α) Εάν η ταχύτητα της σφαίρας m_1 μετά τη σύγκρουση είναι

$(-0.25\hat{i}+0.75\hat{j}+2\hat{k})$ m/s βρείτε την ταχύτητα της σφαίρας m_2 μετά την κρούση και συμπεράνετε το είδος της κρούσης β) εάν η ταχύτητα της σφαίρας m_1 μετά τη σύγκρουση είναι $(-1\hat{i}+3\hat{j}+a\hat{k})$ m/s , όπου α =σταθερά, υπολογίστε την τιμή του α και την ταχύτητα της σφαίρας m_2 μετά από μία ελαστική κρούση.

Λύση

A) Έστω ότι τη χρονική στιγμή t έχει επικαθήσει πάνω στη σταγόνα, σκόνη μάζας m και τη χρονική στιγμή *t+dt,* σκόνη μάζας *m+dm.* Τότε η ορμή του συστήματος σταγόνα-σκόνη στις χρονικές στιγμές t και t+dt θα είναι αντίστοιχα:

$$\vec{p}(t)=(M+m)\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}_o\,dm$$

$$\vec{p}(t+dt)=(M+m+dm)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})$$

Άρα $d\vec{p}=(M+m)d\vec{\upsilon}+(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_o)dm$

$$(M+m)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_o)\frac{dm}{dt}=(M+m)\vec{g} \qquad (1)$$

Από την εκφώνηση

$$\frac{dm}{dt}=\lambda\Rightarrow dm=\lambda dt\Rightarrow m=\lambda t$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με dt προκύπτει

$$(M+m)d\vec{\upsilon}+(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_o)dm=(M+m)\vec{g}dt \qquad (2)$$

Το πρώτο μέλος γράφεται

$$(M+m)d\vec{\upsilon}+(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_o)dm=d\left[(M+m)(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_o)\right]$$

Το δεύτερο μέλος γράφεται

$$(M+m)\vec{g}dt=(M+\lambda t)\vec{g}dt=d\left[\left(Mt+\frac{\lambda t^2}{2}\right)\vec{g}\right]$$

Οπότε η (2) γράφεται

$$d\left[(M+\lambda t)(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_o)\right]=d\left[\left(Mt+\frac{\lambda t^2}{2}\right)\vec{g}\right]$$

οπότε $(M+\lambda t)(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_o)=\left(Mt+\frac{\lambda t^2}{2}\right)\vec{g}+c$ (3)

Για *t=0 , υ=u* άρα $M(\vec{u}-\vec{\upsilon}_o)=c$

Αντικαθιστώντας στην (3)

$$(M+\lambda t)(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_o)=\left(Mt+\frac{\lambda t^2}{2}\right)\vec{g}+M(\vec{u}-\vec{\upsilon}_o)$$

Και άρα $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_o+\frac{Mt+\lambda t^2/2}{M+\lambda t}\vec{g}+\frac{M(\vec{u}-\vec{\upsilon}_o)}{M+\lambda t}$

B) Από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος των δύο σφαιρών η ταχύτητα της σφαίρας 2 μετά τη σύγκρουση θα είναι

α)

$$m_1\vec{\upsilon}_{1,\alpha} + m_2\vec{\upsilon}_{2,\alpha} = m_1\vec{\upsilon}_{1,\tau} + m_2\vec{\upsilon}_{2,\tau} \Rightarrow$$

$$0.5(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) + 1.5(-1\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{k}) = 0.5(-0.25\hat{i} + 0.75\hat{j} + 2\hat{k})m/s + 1.5\vec{\upsilon}_{2,\tau}$$

$$\vec{\upsilon}_{2,\tau} = \left(-0.25\hat{i} + 1.75\hat{j} - 8.33\hat{k}\right)m/s$$

$$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}0.5\left(2^2 + 3^2 + 1^2\right) + \frac{1}{2}1.5\left(1^2 + 3^2 + 8^2\right) = 59 \quad \text{(1) και}$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_{1,\tau}^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{2,\tau}^2$$

$$\left|\upsilon_{1,\tau}\right| = \sqrt{(-0.25)^2 + (0.75)^2 + (2)^2} = \sqrt{0.0625 + 1.5 + 4} = \sqrt{5.5625}$$

$$\left|\upsilon_{2,\tau}\right| = \sqrt{(-0.25)^2 + (1.75)^2 + (-8.33)^2} = \sqrt{0.0625 + 3.0625 + 69.3889} = \sqrt{72.5139}\ .$$

άρα $K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}0.5\cdot 5.5625 + \frac{1}{2}1.5\cdot 72.5139 = 55.8J$

Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια μειώνεται. Άρα, μέρος της αρχικής ενέργειας του σώματος μετατρέπεται σε άλλη μορφή. Άρα η σύγκρουση είναι ανελαστική.

β) όπως παραπάνω υπολογίζουμε ότι

$$0.5(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) + 1.5(-1\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{k}) = 0.5(-1\hat{i} + 3\hat{j} + a\hat{k}) + 1.5\vec{\upsilon}_{2,\tau} \Rightarrow$$

$$\hat{i} - \frac{3}{2}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k} - 1.5\hat{i} + 4.5\hat{j} - 12\hat{k} = -0.5\hat{i} + 1.5\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k} + 1.5\vec{\upsilon}_{2,\tau} \Rightarrow$$

$$-0.5\hat{i} + 3\hat{j} - 11.5\hat{k} = -0.5\hat{i} + 1.5\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k} + 1.5\vec{\upsilon}_{2,\tau} \Rightarrow 1.5\hat{j} - \left(11.5 + \frac{a}{2}\right)\hat{k} = 1.5\vec{\upsilon}_{2,\tau} \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon}_{2,\tau} = \hat{j} - \left(7.67 + 0.33a\right)\hat{k}$$

Σημείωση. Εάν χρησιμοποιηθεί στην πρώτη ισότητα η σχέση των μαζών 0.5/1.5 ~0.33 καταλήγουμε στη σχέση $\vec{\upsilon}_{2,\tau} = -0.01\hat{i} + 1.02\hat{j} - (7.67 + 0.333a)\hat{k}\ m/s$ η οποία είναι λανθασμένη γιατί χρησιμοποιήσαμε προσέγγιση

Σύμφωνα με τη διατήρηση της ενέργειας $K_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}0.5\left(1^2 + 3^2 + a^2\right) + \frac{1}{2}1.5\left(1^2 + \left(7.67 + \frac{a}{3}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(10 + \alpha^2\right) + \frac{3}{4}\left(1 + 7.67^2 + \frac{\alpha^2}{9} + \frac{2\alpha}{3}7.67\right) = \frac{10}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3}{4} + 44.12 + \frac{\alpha^2}{12} + 3.835\alpha =$$

$$\frac{13}{4} + \frac{\alpha^2}{3} + 44.12 + 3.835\alpha \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{13}{4} + \frac{\alpha^2}{3} + 44.12 + 3.835\alpha = 59 \Rightarrow \alpha^2 + 11.505 - 34.89 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{-11.505 \pm \sqrt{11.505^2 - 4(-34.89)}}{2} = \frac{-11.505 \pm \sqrt{271.92}}{2} = \frac{-11.505 \pm 16.49}{2}$$

α = 2.49~2.5 ή α =-13.99 ~-14 οπότε η ταχύτητα προκύπτει

$\vec{\upsilon}_{2,\tau}$ =j-8.5 k ή $\vec{\upsilon}_{2,\tau}$ =j-3 k

Άσκηση 6

Πυραυλοκίνητο όχημα, μάζας (με τον αναβάτη) M = 2000kg, ξεκινά από την αφετηρία και διανύει απόσταση x σύμφωνα με την σχέση $x = (10 + 2t^2)t$, (μονάδες: 10 σε m/s και το 2 σε m/s^3). Αν ο πύραυλος λειτουργεί για 5s, υπολογίστε:

Α. την θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση και του οχήματος συναρτήσει του χρόνου και τις σχετικές τιμές 5s μετά από την εκκίνηση.

Β. Υπολογίστε την δύναμη που ασκείται, την κινητική ενέργεια και την ισχύ του οχήματος εκείνη την στιγμή.

Γ. Το συνολικό έργο που παρήχθει από τον πύραυλο του οχήματος στα τελευταία 2s λειτουργίας και την μέση ισχύ της μηχανής σε αυτό το διάστημα.

Λύση

Α. Αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση γίνεται στον άξονα του x, το μέτρο της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης θα δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$x = (10 + 2t^2)t = 10t + 2t^3$ (1)

$v = \frac{dx}{dt} = 10 + 6t^2$ (2) ,

$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 12t$ (3)

και συνεπώς η απόσταση από την αφετηρία για t=5s θα είναι (από την 1):

$x = 10t + 2 \cdot t^3 = (50 + 250)m = 300m$

Η ταχύτητα από την 2: $v = 10 + 6t^2 = (10 + 150)\ m/s = 160m/s$

Η επιτάχυνση από την 3: $a = 12t = 60m/s^2 \approx 6g$

Β. Η δύναμη θα ισούται με: $F = m \cdot a = 2000kg \cdot 60\frac{m}{s^2} = 120\ 000N$

Η κινητική ενέργεια θα ισούται με : $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2000kg \cdot 160^2\frac{m^2}{s^2} = 2.56x10^7 J$

Η ισχύς θα ισούται με: $P = F \cdot v = 1.2x10^5 N \cdot 1.6x10^2 m/s = 1.92x10^7 W$

Γ. Το συνολικό έργο υπολογίζεται από την σχέση:

$$W_{3s}^{5s} = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot a \cdot v \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot 12t \cdot (10 + 6t^2) \cdot dt =$$

$$= 24m \int_{t_1}^{t_2} (5t + 3t^3) \cdot dt = 24m \cdot \left(\int_{t_1}^{t_2} 5t \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} 3t^3 \cdot dt \right) =$$

$$= 24m \cdot \left(5 \cdot 0.5 \cdot [t^2]_{t_1}^{t_2} + 3/4 \cdot [t^4]_{t_1}^{t_2}\right) = 24m \cdot (2.5 \cdot (t_2^2 - t_1^2) + 0.75 \cdot (t_2^4 - t_1^4)) =$$

$$= 24 \cdot 2000kg \cdot (2.5 \cdot (5^2 - 3^2) + 0.75 \cdot (5^4 - 3^4))\frac{m^2}{s^2} = 24 \cdot 2000 \cdot (40 + 408)\ J$$

$$= 2.15x10^7 J$$

Μπορεί βέβαια να υπολογιστεί από τις ταχύτητες στο 3 και 5 δευτερόλεπτο.

Η μέση ισχύς στα τελευταία 2s θα ισούται με: $\bar{P} = \frac{W_{6s}^{8s}}{2s} = \frac{2.15x10^7 J}{2s} = 1.075x10^7 W$

Άσκηση 7

Ακίνητη οβίδα μάζας *M=17.0* kg εκρήγνυται. Κατά την έκρηξη της διασπάται σε τρία τεμάχια τα οποία κινούνται αρχικά μετά την έκρηξη σε ένα επίπεδο ως εξής: Το πρώτο, μάζας m_1*=5.0* kg κινείται στο άξονα x με ταχύτητα υ_{1x}*=6.0* m/s και το δεύτερο μάζας m_2*=8.4* kg κινείται στο άξονα y με ταχύτητα υ_{2y}*=4.0* m/s. Υπολογίστε την ταχύτητα του τρίτου και την ενέργεια που παρήχθει κατά την έκρηξη.

Λύση

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_3}$ του τρίτου τεμαχίου πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας υ_3 και την διεύθυνση κίνησης.
Κατ' αρχήν, το τρίτο τεμάχιο έχει μάζα $m_3 = M - m_1 - m_2 = 3.6$ kg
Από την εξίσωση διατήρησης της ορμής έχουμε:
$m_1 \boldsymbol{\upsilon_1} + m_2 \boldsymbol{\upsilon_2} + m_3 \boldsymbol{\upsilon_3} = 0$
Αναλύοντας στους άξονες X και Y, έχουμε:
$m_1 \upsilon_{1x} + m_3 \upsilon_{3x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_3 \upsilon_{3x} = - m_1 \upsilon_{1x} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{3x} = - \upsilon_{1x}\ m_1/(M-m_1-m_2)$
$m_2 \upsilon_{2y} + m_3 \upsilon_{3y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_3 \upsilon_{3y} = - m_2 \upsilon_{2y} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{3y} = - \upsilon_{2y}\ m_2/(M-m_1-m_2)$
Τελικά
$\boldsymbol{\upsilon_3} = \upsilon_{3x}\hat{i} + \upsilon_{3y}\hat{j} = - \upsilon_{1x}\ m_1/(M-m_1-m_2)\ \hat{i} - \upsilon_{2y}\ m_2/(M-m_1-m_2)\ \hat{j} =$
$= - 6.0\text{m/s} \cdot 5.0\text{kg}/((17-5-8.4)\text{kg})\ \hat{i} - 4.0\text{m/s} \cdot 8.4\text{kg}/((17-5-8.4)\text{kg})\ \hat{j} =$
$= - 30 / 3.6 \text{ m/s}\ \hat{i} - 33.6 / 3.6 \text{ m/s}\ \hat{j} = - 8.33 \text{ m/s}\ \hat{i} - 9.33 \text{ m/s}\ \hat{j} \equiv (- 8.33\ \hat{i} - 9.33\ \hat{j}) \text{ m/s}$
Το μέτρο της ταχύτητας του τρίτου τεμαχίου είναι:
$$\upsilon_3 = \sqrt{\upsilon_{3x}^2 + \upsilon_{3y}^2} = \sqrt{8.33^2 + 9.33^2} = 12.5 m/s$$
Και η γωνία με τον άξονα X:
Η εφαπτομένη της τροχιάς του τρίτου τεμαχίου υπολογίζεται από την σχέση:
$$\cancel{a}tan\varphi' = \cancel{a}tan\frac{\upsilon_{3y}}{\upsilon_{3x}} = \cancel{a}tan\frac{9.33}{8.33} = \cancel{a}tan\ 1.12 \rightarrow \varphi' = 48.2°$$
Επειδή δε τα υ_{3x} και υ_{3y} είναι αρνητικά, το τρίτο σώμα θα κινηθεί στο τρίτο τεταρτημόριο και η γωνία φ με τον άξονα X θα είναι:
$\varphi = 180.0° + 48.2° = 228.2°$
Για να υπολογίσουμε την ενέργεια που παράγεται από την έκρηξη αρκεί να προσθέσουμε τις κινητικές ενέργειες των τριών σωματιδίων:
$E = ½\, m_1 \upsilon_{1x}^2 + ½\, m_2 \upsilon_{2y}^2 + ½\, m_3 \upsilon_3^2 = ½\, (m_1 \upsilon_{1x}^2 + m_2 \upsilon_{2y}^2 + m_3 \upsilon_3^2) =$
$= ½\, (5.0 \cdot 6.0^2 + 8.4 \cdot 4.0^2 + 3.6 \cdot 12.5^2) \text{ kg} \cdot (\text{m/s})^2 = ½ \cdot 876.9 \text{ J} = 438.45 \text{ J}$

Άσκηση 8

Μεταφέροντας κρασί από μία δεξαμενή σταθερής παροχής, γεμίζουμε δοχείο το οποίο βρίσκεται πάνω σε ζυγό. Αν η δεξαμενή χωρητικότητας *250 kg* αδειάζει σε *18'* της ώρας και το στόμιο βρίσκεται σε ύψος *H = 1.5m* από τον ζυγό, υπολογίστε την ένδειξη του ζυγού την στιγμή που συμπληρωθούν *m = 2 kg* κρασιού στο δοχείο.

Λύση

Η συνολική δύναμη στον ζυγό θα ισούται με $F = F_1 + F_2$ όπου F_1 θα είναι η δύναμη που θα ασκείται στον ζυγό λόγω της μεταβολής της ορμής του κρασιού που θα κινητοποιείται πάνω στον ζυγό αφού πέσει από ύψος H και F_2 το βάρος του κρασιού που είναι ήδη στον ζυγό.

Θα είναι $F_1 = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt}$

Αλλά $v\frac{dm}{dt} \neq 0$ και $m\frac{dv}{dt} = 0$.

Το dm/dt = Π = 250kg/(18*60)s = 250/ 1080 kg/s = 0.231 kg/s.

Η ταχύτητα της μάζας dm μόλις πριν σταματήσει θα ισούται με $υ^2 = 2gH$

Τελικά $F_1 = Π \cdot (2gH)^{1/2}$

Αν η παροχή του κρασιού διαρκεί t, τότε η ποσότητα που θα είναι στον ζυγό θα έχει βάρος, δηλαδή $F_2 = Π \cdot g \cdot t$

Τελικά η συνολική δύναμη που θα μας δείχνει ο ζυγός υπολογίζεται από την σχέση :

$F = F_1 + F_2 = Π \cdot (2gH)^{1/2} + Π \cdot g \cdot t$

Για να συμπληρωθεί ποσότητα m στο δοχείο απαιτείται χρόνο t = m/Π

Τελικά η ένδειξη του ζυγού θα είναι

$F = Π \cdot (2gH)^{1/2} + Π \cdot g \cdot t = Π \cdot (2gH)^{1/2} + Π \cdot g \cdot m/Π =$

$= 0.231kg/s \cdot (2\cdot 9.81m/s^2 \cdot 1.5m)^{1/2} + 2kg \cdot 9.81m/s^2) = 20.87$ N

Εναλακτική

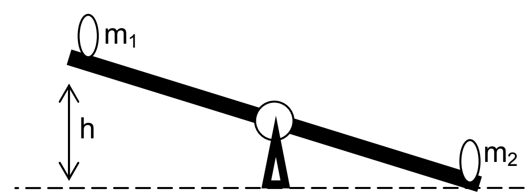
Η F_2 = m g οπότε η ένδειξη του ζυγού θα είναι

$F = Π \cdot (2gH)^{1/2} + m g = Π \cdot (2gH)^{1/2} + mg =$

$= 0.231kg/s\ (2\cdot 9.81m/s^2\ 1.5m)^{1/2} + 2kg \cdot 9.81m/s^2 = 20.87$ N

Άσκηση 9

Δύο παιδιά παίζουν τραμπάλα. Ακινητοποιούμε την τραμπάλα όταν το πρώτο παιδί, μάζας m_1= 40 kg βρίσκεται στο ανώτερο σημείο που απέχει h=1.5m από το έδαφος, ενώ το δεύτερο παιδί μάζας m_2 = 31kg βρίσκεται στο κατώτερο σημείο. Ακολούθως αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Υπολογίστε την ταχύτητα του δευτέρου παιδιού όταν φτάσει στο ανώτερο σημείο και το τελικό ύψος H στο οποίο θα αναπηδήσει. Θεωρούμε την τραμπάλα χωρίς τριβές



Λύση

Μόλις το πρώτο παιδί φτάσει στο έδαφος, τα δύο παιδιά θα κινούνται με ταχύτητα υ και το δεύτερο θα βρεθεί αρχικά σε ύψος h. Συνεπώς η δυναμική ενέργεια του πρώτου θα ισούται με την κινητική ενέργεια των δύο (που θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα) συν την δυναμική του δευτέρου, δηλαδή:

$m_1 \cdot g \cdot h = m_2 \cdot g \cdot h + ½ (m_1 + m_2) \cdot υ^2$

$$v = \sqrt{\frac{2\,(m_1 - m_2)\,g\,h}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{2\,(40-31)kg\,\frac{9.81m}{s^2}\,1.5m}{40+31}} =$$

$$= \sqrt{\frac{264.87\ kg\ m^2/s^2}{71kg}} = 1.93m/s$$

Λόγω της ταχύτητας αυτής το δεύτερο παιδί θα κινηθεί προς τα πάνω κατά Υ, τόσο ώστε:
$\frac{1}{2}\, m_2\, \upsilon^2 = m_2\, g\, Y$
$Y = \frac{1}{2}\, \upsilon^2/g = 1/2 \cdot (1.93m/s)^2 /(9.81\ m/s^2) = 0.19m$
Ή από την $\frac{1}{2}\, m_2\, \upsilon^2 = m_2\, g\, Y \Rightarrow \frac{1}{2}\ \frac{2\,(m_1-m_2)\,g\,h}{m_1+m_2} = g\, Y \Rightarrow$

$$Y = \frac{(m_1-m_2)\ h}{m_1+m_2} = \frac{(40-31)kg\ 1.5m}{(40+31)kg} = 0.19m$$

Συνεπώς το τελικό ύψος θα είναι H = 1.69m

Άσκηση 10.

A. Η δυναμική ενέργεια που «συγκρατεί» δύο άτομα σε ένα διατομικό μόριο δίνεται από την συνάρτηση $U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$, όπου *a* και *b* είναι θετικές σταθερές και x η απόσταση μεταξύ των ατόμων. Να βρεθούν:

1. Για ποια τιμή του x η η δυναμική ενέργεια είναι 0, εκτός από την προφανή λύση x=∞.
2. Για ποια τιμή του x η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη (θέση ισορροπίας).
3. Βρείτε την δύναμη *F(x)* ανάμεσα στα δύο άτομα.
4. Πόση ενέργεια απαιτείται για να διασπαστεί το μόριο στα δύο άτομα που το συγκροτούν; (Η ενέργεια διάσπασης προφανώς είναι η ενέργεια για x=∞ μείον την ελάχιστη ενέργεια).
5. Κάντε την γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας *U(x)* και της δύναμης *F(x)* και σημειώστε την θέση που x όπου η δύναμη *F(x)*=0.

Λύση

1. $$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0 \Rightarrow \frac{a}{x^6} - b = 0 \Rightarrow \frac{a}{x^6} = b \Rightarrow x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$$

2. Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή του U(x) θέτουμε την πρώτη παράγωγο ίση με 0:

$$\frac{d}{dx}U(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right) = \frac{-12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7} = 0 \Rightarrow x^6 = \frac{2a}{b} \Rightarrow x = \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{d^2}{dx}U(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7}\right) = \frac{156a}{x^{14}} - \frac{42b}{x^8} = \frac{6}{x^8}\left(\frac{26a}{x^6} - 7b\right)$$

Για $x = \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$ γίνεται $\frac{6}{\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}8}}\left(\frac{26a}{\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}6}} - 7b\right) = \frac{6b^{\frac{4}{3}}}{(2a)^{\frac{4}{3}}}(13b - 7b) = 14.4\frac{a^{4/3}}{b^{1/3}} > 0$

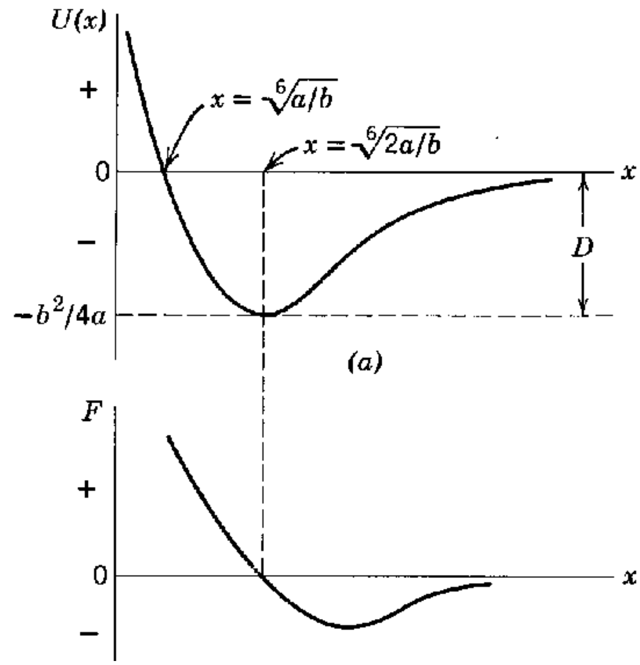
3. Η δύναμη υπολογίζεται από την παράγωγο της δυναμικής ενέργειας:

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}$$

4. $$U(x=\infty)-U\left(x=\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}\right)=0-\left(\frac{a}{\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}12}}-\frac{b}{\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}6}}\right)=0-\left(\frac{a}{4\frac{a^2}{b^2}}-\frac{b}{2\frac{a}{b}}\right)=\frac{b^2}{4a}$$

Αν η κινητική ενέργεια στην θέση ισορροπίας υπερβεί την ενέργεια διάσπασης, προφανώς το μόριο θα διασπασθεί στα δύο άτομα που το συγκροτούν.

5. Η γραφική παράσταση είναι:



B. Η δυναμική ενέργεια συστήματος δύο σωμάτων περιγράφεται από τη σχέση

$$U(r) = r^3-9r$$

όπου r η απόστασή τους. Να βρεθεί α) η δύναμη αλληλεπίδρασής τους β) οι θέσεις ισορροπίας γ) το είδος ισορροπίας. Να γίνει το διάγραμμα *U(r)*.

Λύση

Α) Είναι $F(r)=-\frac{dU}{dr}=-\frac{d(r^3-9r)}{dr}=-3r^2+9$

Β) Για να βρούμε τις θέσεις ισορροπίας πρέπει να βρούμε τις θέσεις στις οποίες η δυναμική ενέργεια
μηδενίζεται και να ελέγξουμε το πρόσημο της 2^{ης} παραγώγου.

Οι θέσεις αυτές είναι $\frac{dU(r)}{dr}=0\Rightarrow\frac{d(r^3-9r)}{dr}=0\Rightarrow 3r^2-9=0\Rightarrow r=\pm\sqrt{3}$

Η αρνητική απόσταση απορρίπτεται και ελέγχουμε τη δεύτερη παράγωγο στη θέση $r=\sqrt{3}$

Είναι $\left.\frac{d^2U(r)}{dr}\right|_{r=\sqrt{3}} = \left.\frac{d(3r^2-9)}{dr}\right|_{r=\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} > 0$ άρα στη θέση $r=\sqrt{3}$ έχει ελάχιστο και άρα η θέση $r=\sqrt{3}$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας .

Η γραφική παράσταση της U (r) δίνεται παρακάτω. Για $r=\sqrt{3}$ παίρνει την τιμή U ($\sqrt{3}$) =-6 $\sqrt{3}$