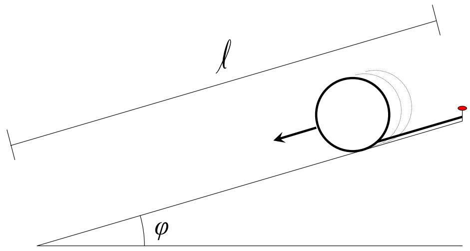
ΦΥΕ14 - 5^{η} Εργασία
Παράδοση 11.05.2009

Πρόβλημα 0.1 Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας M τυλιγμένος με λεπτό νήμα αφήνεται να κυλίσει από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου μήκους l και γωνίας ϕ (βλέπε σχήμα). Το ένα άκρο του νήματος είναι στερεωμένο. Πόσο χρόνο θα κάνει ο κύλινδρος να φτάσει στη βάση και με ποια ταχύτητα θα είναι εκεί;



Λύση:

Πρώτη λύση:
Θεωρούμε ότι η επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ που λόγω της περιστροφικής κίνησης μπορεί να αναλυθεί ως $a = R\alpha = R\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$, όπου ω, α είναι η γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση, αντίστοιχα. Επομένως, από το δεύτερο νόμο του Newton θα έχουμε

$$\left.\begin{aligned} M\overbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}^{a} &= B\sin\phi - T \\ TR = I\underbrace{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}_{\alpha} &= \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ Ma = Mg\sin\phi - \frac{1}{2}Ma \qquad \Rightarrow \frac{3}{2}a = g\sin\phi \Rightarrow a = \frac{2}{3}g\sin\phi$$

όπου T είναι η τάση του νήματος που ασκεί μια δύναμη στον κύλινδρο με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια ροπή $\tau = TR$.

$$l = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2l}{2g\sin\phi}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{3l}{g\sin\phi}}$$

$$v = at = \frac{2}{3}g\sin\phi\sqrt{\frac{3l}{g\sin\phi}} = \frac{2}{3}\sqrt{3gl\sin\phi}$$

Δεύτερη λύση: Εφαρμόζοντας διατήρηση ενέργειας, θα έχουμε

$$Mgl\sin\phi = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{2}MR^2}_{\text{ροπή αδρανείας}}\overbrace{\frac{v^2}{R^2}}^{\omega^2} = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{3}\sqrt{3gl\sin\phi}$$

Πρόβλημα 0.2 Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ αφήνονται ταυτόχρονα να ολισθήσει ένα παραλληλεπίπεδο και να κυλίσει ένα λεπτό δακτυλίδι. Ποιος πρέπει να είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κεκλιμένου επιπέδου και σωμάτων, ώστε αυτά να κινούνται έτσι ώστε να μην προσπερνά το ένα το άλλο; Ποια θα είναι η ταχύτητά τους στη βάση, αν αφεθούν από ύψος h;

Λύση:

Για το παραλληλεπίπεδο έχουμε

$$m_1 a_1 = m_1 g\sin\phi - \mu m_1 g\cos\phi \qquad \Rightarrow a_1 = g\sin\phi - \mu g\cos\phi$$

Για το δαχτυλίδι η ροπή δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της τριβής, T, θα είναι $\tau = I\alpha_2$

$$I\alpha_2 = I\frac{a_2}{R} = \underbrace{\overbrace{T}^{\text{δύναμη τριβής } T}\quad R}_{\text{ροπή δύναμης } \tau=TR} \qquad \Rightarrow a_2 = \frac{TR^2}{I} \tag{0.0.1}$$

όπου a_2 είναι η γραμμική επιτάχυνση και α_2 ($a_2 = \alpha_2 R$) είναι η κυκλική επιτάχυνση και η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \int_0^{m_2} R^2\,\mathrm{d}m = m_2 R^2 \tag{0.0.2}$$

Επίσης, από τη μεταφορική κίνηση θα ισχύει

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\phi - T \quad \Rightarrow a_2 = g\sin\phi - \frac{T}{m_2} \tag{0.0.3}$$

Συνδιάζοντας τις σχέσεις (0.0.1), (0.0.2), και (0.0.3), έπεται

$$a_2 = \frac{1}{2} g \sin\phi$$

Συνοψίζοντας, θα έχουμε για τα a_1 και a_2:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = g\sin\phi - \mu g\cos\phi \\ a_2 = \frac{1}{2} g\sin\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Αν θέλουμε να ισχύει } a_1 = a_2 \text{ τότε έπεται} \\ \Rightarrow\ g\sin\phi - \mu g\cos\phi = \frac{1}{2} g\sin\phi \quad \Rightarrow \end{array} \quad \mu = \frac{1}{2}\tan\phi$$

$$m_2 g h = \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{I}_{m_2 R^2}\omega^2 \Rightarrow m_2 g h = m_2 v^2 \Rightarrow v = \sqrt{gh}$$

Η γωνία ϕ είναι τόση ώστε ο συντελεστής τριβής κατά την κύλιση συμπίπτει με το συντελεστή τριβής ολίσθησης.

Πρόβλημα 0.3 Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους l μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά σε απόσταση a από το κέντρο μάζας της. Τι είδους κίνηση κάνει αν απομακρυνθεί κατά μικρή γωνία από τη θέση ισορροπίας και ποια είναι η περίοδος; Βρείτε την απόσταση a για την οποία η περίοδος γίνεται ελάχιστη και πόση είναι η περίοδος στη θέση αυτή. Υπολογίστε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της.

Λύση:

$$I_{\mathrm{CM}} = \int x^2\,\mathrm{d}m = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \rho S\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12} m l^2, \quad \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

όπου S είναι η επιφάνεια της τομής της ράβδου, και η ροπή αδρανείας ως προς ένα άξονα που περνά από ένα σημείο που απέχει μια απόσταση a από το κέντρο μάζας (με τη βοήθεια του θεωρήματος των παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα του Steiner)

$$I_a = \frac{1}{12} m l^2 + m a^2$$

$$I_a \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mga\sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{ga}{l^2/12 + a^2}\sin\theta = 0$$

για μικρές γωνίες ταλάντωσης ($\sin\theta \approx \theta$) θα έχουμε την εξίσωση του απλού εκκρεμούς

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{ga}{l^2/12 + a^2}}_{\omega^2}\theta = 0$$

και επομένως αναγνωρίζουμε ως κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi/T$ με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/12 + a^2}{ga}}$$

$$T_{\min} \Rightarrow A = \frac{l^2/12 + a^2}{a} = \text{ θα πρέπει να είναι ελάχιστο}$$

και επομένως η πρώτη παράγωγος του A ως προς το a θα πρέπει να μηδενίζεται και η δεύτερη παράγωγος να είναι θετική

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}a} = \frac{a(2a) - \left(\frac{l^2}{12} + a^2\right)}{a^2} = \frac{a^2 - l^2/12}{a^2} = 0 \qquad \Rightarrow a^2 = \frac{l^2}{12} \Rightarrow a = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

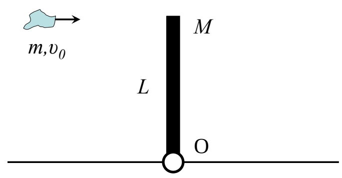
Παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο του A ως προς τη μεταβλητή a θα έχουμε

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=l/\sqrt{12}} = \left.\frac{l^2}{6a^3}\right|_{a=l/\sqrt{12}} > 0$$

και επομένως θα έχουμε ελάχιστο. Η περίοδος σε αυτή τη θέση θα έχει την τιμή

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{3^{1/4}}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Πρόβλημα 0.4 Μια ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L που είναι στερεωμένη με άρθρωση σε οριζόντιο άξονα O, είναι στην κατακόρυφη θέση και σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πλαστελίνη μάζας m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_0 κολλάει στο άκρο της ράβδου η οποία πέφτει. Υπολογίστε την ταχύτητα του Κ.Μ. του συστήματος τη στιγμή που χτυπά το δάπεδο. Τριβές δεν υπάρχουν. Για τη ράβδο, η ροπή αδρανείας είναι $I_{\mathrm{CM}} = ML^2/12$.



Λύση:

Από τη διατήρηση στροφορμής έχουμε

$$mv_0L = I\omega_0 \Rightarrow mv_0L = \left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{3mv_0}{(M+3m)L}$$

$$v_{\mathrm{CM}} = \omega\beta$$

όπου β είναι η θέση του νέου κέντρου μάζας του συστήματος ραβδου-πλαστελίνης το οποίο προσδιορίζεται από τον ορισμό του κέντρου μάζας

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{ML/2 + mL}{M+m}$$

όπου $x_1 = L/2,\ m_1 = M$ για τη ράβδο και $x_1 = L,\ m_1 = m$ για τη πλαστελίνη. Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{3}ML^2 + mL^2}_{I}\right)\omega_0^2 + \underbrace{(M+m)g\beta}_{\text{δυναμική ενέργεια}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega^2}_{\text{τελική κινητική ενέργεια}} \tag{0.0.4}$$

όπου ω είναι η κυκλική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που χτυπά το έδαφος. Από τη σχέση (0.0.4) παίρνουμε:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{(M+m)g\beta}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)g}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M + m\right)L}}$$

και επομένως η ταχύτητα του Κ.Μ. του συστήματος τη στιγμή που χτυπά το δάπεδο θα είναι

$$v_{\mathrm{CM}} = \omega\beta = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)g}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M + m\right)L}}\,\frac{ML/2 + mL}{M+m}$$

Πρόβλημα 0.5 Ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας M τοποθετείται σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Μικρό σώμα μάζας m, κινούμενο με ταχύτητα v_0 και κάθετο στη ράβδο χτυπάει ελαστικά στην άκρη της ράβδου. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά το χτύπημα. Να υποθέσετε ότι το μικρό σώμα δεν αποκλίνει από την αρχική του πορεία μετά την ελαστική κρούση με τη ράβδο.

Λύση:

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$mv_0 = mv + MV$$

$$\Rightarrow V = \frac{m(v_0 - v)}{M} \tag{0.0.5}$$

Επίσης, από τη διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \Rightarrow mv_0^2 = mv^2 + MV^2 + \frac{1}{12}Ml^2\omega^2 \tag{0.0.6}$$

Επιπλέον

$$mv_0\frac{l}{2} = I_c\omega + mv\frac{l}{2} \Rightarrow mv_0 = \frac{1}{6}Ml\omega + mv$$

$$\Rightarrow v = v_0 - \frac{M}{m}\frac{l}{6}\omega \tag{0.0.7}$$

Από τις σχέσεις (0.0.5) και (0.0.7) παίρνουμε

$$V = \frac{m(v_0 - v_0) + m\frac{M}{m}\frac{l}{6}\omega}{M} = \frac{l}{6}\omega \tag{0.0.8}$$

και από τις (0.0.6), (0.0.7) και (0.0.8) τελικά

$$mv_0^2 = m\left(v_0^2 + \frac{M^2}{m^2}\frac{l^2\omega^2}{36} - 2v_0\frac{Ml}{6m}\omega\right) + M\frac{4l^2}{36}\omega^2 \Rightarrow \omega = \frac{v_0 12m}{l(4m+M)}$$

Πρόβλημα 0.6 Μη ομογενής ράβδος μήκους L μπορεί να ταλαντώνεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στο άκρο της Ο. Αν η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα $\rho(x) = kx$, όπου k σταθερά και x η απόσταση από το άκρο Ο, βρείτε την εξίσωση της κίνησης και την περίοδο της ταλάντωσης για μικρές γωνίες ταλάντωσης όπου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $\sin\theta \approx \theta$.

Λύση:

$$I = \int_0^L x^2\,\mathrm{d}m = \int_0^L x^2 kx\,\mathrm{d}x = \frac{kL^4}{4}$$

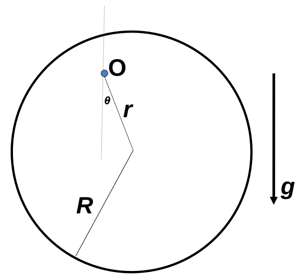
$$M = \int \rho\,\mathrm{d}x = \int_0^L kx\,\mathrm{d}x = \frac{kL^2}{2}$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{\int_0^L x\rho\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \rho\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^L xkx\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \rho\,\mathrm{d}x} = \frac{2kL^3\cdot}{3kL^2} = \frac{2}{3}L$$

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -Mgx_{\text{CM}}\sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4}{3}\frac{g}{L}\theta = 0$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4}\frac{L}{g}}$$

Πρόβλημα 0.7 Κυκλικός ομογενής δίσκος ακτίνας R ταλαντώνεται γύρω από άξονα κάθετο στο δίσκο (στο σημείο O) που περνά σε απόσταση r από το κέντρο του δίσκου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η εξίσωση της κίνησης και η περίοδος ταλάντωσης για μικρές γωνίες ταλάντωσης όπου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $\sin\theta \approx \theta$. Για ποια τιμή της απόστασης r ο δίσκος θα έχει τη μικρότερη περίοδο;



Λύση:

Η εξίσωση κίνησης, θεωρώντας τη ροπή δύναμης τ, θα είναι

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\tau \Rightarrow I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + Mgr\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Mgr}{I}\theta = 0$$

Η ροπή αδράνειας θα είναι

$$I = I_{\text{CM}} + Mr^2 = \frac{M(R^2+2r^2)}{2}, \quad \text{για} \quad I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

Από την εξίσωση κίνησης, αναγνωρίσουμε ως περίοδο ταλάντωσης, T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+2r^2}{2gr}}$$

$$\text{για να έχουμε } T_{\text{min}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}T^2}{\mathrm{d}r} = 0 \Rightarrow \frac{8gr^2 - 2R^2g - 4gr^2}{4g^2r^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{4gr^2 - 2R^2g}{4g^2r^2}}_{1/g - R^2/2gr^2} = 0$$

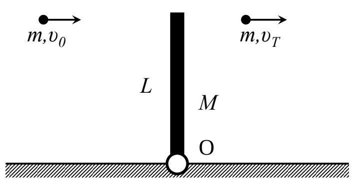
$$\Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Λαμβάνοντας τη δεύτερη παράγωγο του T έπεται

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2T^2}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=R/\sqrt{2}} = \left.\frac{R^2}{gr^3}\right|_{r=R/\sqrt{2}} > 0$$

δηλαδή θα έχουμε ένα ελάχιστο.

Πρόβλημα 0.8 Ράβδος μάζας M και μήκους L που είναι στερεωμένη με άρθρωση σε οριζόντιο άξονα O, είναι στην κατακόρυφη θέση και σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα v_0 και τρυπάει τη ράβδο ακαριαία στο άνω άκρο της (χωρίς να μεταβάλλει την κατανομή μάζας) και συνεχίζει την πορεία της με οριζόντια ταχύτητα v_T, ενώ η ράβδος πέφτει. Υπολογίστε την ταχύτητα του Κ.Μ. της ράβδου τη στιγμή που χτυπά το δάπεδο. Τριβές δεν υπάρχουν. Για τη ράβδο, η ροπή αδρανείας είναι $I_{\text{CM}} = ML^2/12$



Λύση:

Από τη διατήρηση τη στροφορμής θα έχουμε

$$mv_0L = mv_TL + I\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{mL(v_0-v_T)}{I} = \frac{3(v_0-v_T)m}{ML}$$

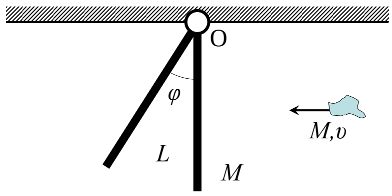
$$I = I_{\text{CM}} + \frac{ML^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2$$

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{6}ML^2\frac{9(v_0-v_T)^2m^2}{M^2L^2} + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}ML^2\omega^2$$

$$\frac{9}{6}\frac{m^2}{M}(v_0-v_T)^2 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{9m^2}{L^2M^2}(v_0-v_T)^2 + 3\frac{g}{L}$$

Επομένως η ταχύτητα του Κ.Μ. της ράβδου τη στιγμή που χτυπά το δάπεδο θα είναι

$$v_{\text{CM}} = \frac{L}{2}\omega = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{9m^2}{L^2M^2}(v_0-v_T)^2 + 3\frac{g}{L}}$$



Πρόβλημα 0.9 Ράβδος μήκους L κρέμεται κατακόρυφα στερεωμένη σε άρθρωση (βλ. σχήμα). Ένα κομμάτι πλαστελίνης ίδιας μάζας με τη ράβδο κινείται οριζόντια με ταχύτητα v, χτυπά τη ράβδο στο κέντρο της και κολλάει σε αυτήν. Κατά ποια γωνία θα αποκλίνει η ράβδος;

Λύση:

Από το θεώρημα της διατήρησης της στροφορμής θα έχουμε

$$Mv\frac{L}{2} = \left(\frac{ML^2}{3} + M\frac{L^2}{4}\right)\omega \Rightarrow \omega = \frac{6}{7}\frac{v}{L}$$

όπου $MvL/2$ είναι η ατροφορμή της πλαστελίνης ως προς τον κάθετο άξονα του επιπέδου που κινείται η ράβδος και περνά από το σημείο O. Από το θεώρημα της διατήρησης ενέργειας θα έχουμε

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = 2Mg\frac{L}{2}(1-\cos\phi) \Rightarrow \frac{7}{12}ML^2\omega^2 = 2MgL(1-\cos\phi)$$

$$\Rightarrow \cos\phi = 1 - \frac{3}{14}\frac{v^2}{Lg}$$

Πρόβλημα 0.10

Α) Σωματίδιο μάζας m κινείται με την επίδραση της δύναμης που έχει δυναμική ενέργεια

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2.$$

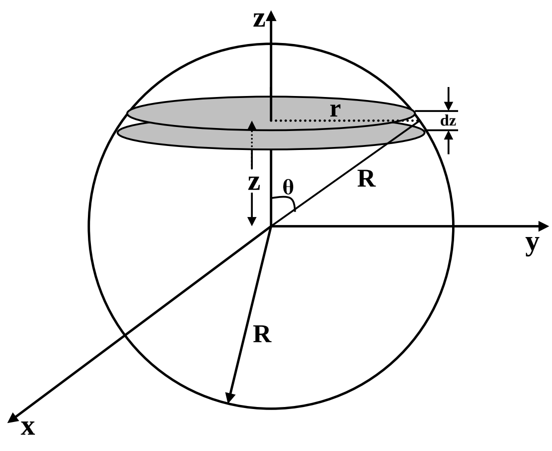
Να δείξετε ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα σ' ένα επίπεδο το οποίο καθορίζεται με βάση τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Αν κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ το σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ κάθετη προς το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_0$, να δείξετε ότι τούτο διαγράφει κάποια τροχιά που η πολική του ακτίνα κυμαίνεται μεταξύ των τιμών r_0 και v_0/ω:

$$r_0 \leq r \leq \frac{v_0}{\omega}.$$

Β) Να αποδειχθεί ότι η ροπή αδρανείας συμπαγούς σφαίρας ως προς ένα διαμετρικό άξονα είναι

$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

(Η απόδειξη γίνεται εύκολα, αν θεωρήσουμε ότι η σφαίρα αποτελείται από ένα σύνολο κυκλικών δίσκων απειροστού πάχους $\mathrm{d}z$, προσαρμοσμένους μέσα στη σφαιρική επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα.)



Σχήμα 1

Λύση:

Α) Από τη δυναμική ενέργεια, U θα έχουμε την δύναμη:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -m\omega^2 \mathbf{r}.$$

Αν $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ είναι η ορμή του σωματιδίου τότε το διάνυσμα $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ θα δώσει για την παράγωγο ως προς τον χρόνο:

$$\dot{\mathbf{N}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} - m\omega^2 \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0.$$

Άρα το διάνυσμα $\mathbf{N}$ παραμένει σταθερό με τον χρόνο. Εφ' όσον το $\mathbf{N}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα της θέσης,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = 0,$$

συνεπώς το $\mathbf{r}$ θα βρίσκεται στο επίπεδο το κάθετο στο $\mathbf{N}$ και δεν θα μεταβάλλεται με τον χρόνο. Επιπλέον και για το αρχικό διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_0$ θα ισχύει

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Το επίπεδο το κάθετο στο $\mathbf{N}$ θα καθοριστεί από τη σχέση που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τις σχέσεις:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = 0 \qquad \text{και} \qquad \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{N} = 0,$$

δηλαδή

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Η εξίσωση κίνησης για την ελκτική δύναμη $\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}$ θα είναι

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{r} = 0.$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τον αρμονικό ταλαντωτή, που έχει λύση της μορφής

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\sin(\omega t) + \mathbf{B}\cos(\omega t),$$

όπου οι σταθερές $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$ μπορούν να υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες. Για την αρχική συνθήκη $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ θα έχουμε

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{B},$$

και με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης $\mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$ θα έχουμε

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = \omega \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}$$

όπου η ταχύτητα είναι

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \omega \mathbf{A}\cos(\omega t) - \omega \mathbf{B}\sin(\omega t)$$

Με τον ανωτέρω προσδιορισμό των σταθερών $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ το διάνυσμα θέσης θα είναι

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}\sin(\omega t) + \mathbf{r}_0\cos(\omega t)$$

Το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{r}$ με τον εαυτό του θα είναι

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t) + r_0^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{\omega}\mathbf{v_0} \cdot \mathbf{r}_0 \sin(\omega t)\cos(\omega t).$$

Μας δίνεται ότι $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_0 = 0$ (εφ' όσον το σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ κάθετη προς το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_0$), άρα

$$r^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2 \omega t + r_0^2\cos^2 \omega t = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \sin^2 \omega t + r_0^2(1 - \sin^2 \omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 \omega t = \frac{r^2 - r_0^2}{(v_0/\omega)^2 - r_0^2},$$

αλλά για το ημίτονο ισχύει $0 \leq \sin^2 \omega t \leq 1$, συνεπώς

$$0 \leq \frac{r^2 - r_0^2}{(v_0/\omega)^2 - r_0^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad r_0^2 \leq r^2 \leq \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad r_0 \leq r \leq \frac{v_0}{\omega}.$$

B) Θεωρούμε ένα στοιχειώδη δίσκο ύψους dz και ακτίνας $r = R\sin\theta$ και μάζας, dm

$$dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dz = \rho\pi R^2 \sin^2\theta dz,$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας της σφαίρας.
Η στοιχειώδης ροπή αδρανείας, dI αυτού του δίσκου είναι

$$dI = \frac{1}{2} dmr^2 = \frac{1}{2} R^4 (\sin\theta)^4 \rho\pi R d(\cos\theta),$$

όπου $z = R\cos\theta \Rightarrow dz = Rd(\cos\theta)$. Άρα αφού ολοκληρώσουμε το dI θα έχουμε

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi R^5 \int_{\pi}^{0} \sin^4\theta d(\cos\theta) = \frac{1}{2}\rho\pi R^5 \int_{-1}^{+1} (1-\omega^2)^2 d\omega,$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει $\cos\theta = \omega$ και $\sin^4\theta = (\sin^2\theta)^2 = (1-\cos^2\theta)^2 = (1-\omega^2)^2$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{+1} (1-\omega^2)^2 d\omega = \frac{16}{15}.$$

Άρα η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \frac{8}{15}\rho\pi R^5,$$

και η πυκνότητα μάζας της σφαίρας είναι:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\pi R^3 = \frac{3M}{4}.$$

Άρα η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \frac{8}{15}\rho\pi R^5 = \frac{8}{15}\frac{3M}{4}R^2 = \frac{2}{5}MR^2.$$