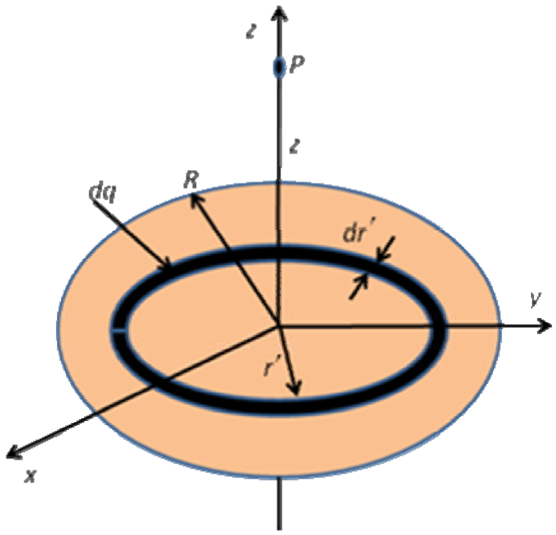
ΕΡΓΑΣΙΑ 6

Ημερομηνία Παράδοσης: 29/6/09

1. **Ένας ομογενώς φορτισμένος μονωτικός κυκλικός δίσκος ακτίνας *R* με συνολικό φορτίο *Q* τοποθετείται στο επίπεδο *xy*. Να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο *P* που βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας του δίσκου και σε απόσταση *z* από το κέντρο του (βλ. Σχήμα). Τι συμβαίνει όταν πάρουμε το όριο που η ακτίνα του δίσκου τείνει στο άπειρο; Πώς συγκρίνεται το αποτέλεσμα αυτό με το πεδίο επίπεδης ομογενούς κατανομής φορτίου επιφανειακής πυκνότητας σ απείρων διαστάσεων όπως υπολογίζεται από τον νόμο του Gauss; (Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε ως δεδομένη την ένταση του πεδίου σε σημείο του άξονα φορτισμένου δακτυλίου).**



Λύση:

Μεταχειριζόμαστε το δίσκο ως ένα σύνολο ομόκεντρων δακτυλίων απειροστού πάχους και ομογενώς φορτισμένων. Η πυκνότητα φορτίου του δίσκου είναι $\sigma = Q/\pi R^2$. Θεωρείστε έναν δακτύλιο ακτίνας r' και πάχους dr' όπως φαίνεται στο σχήμα. Το φορτίο που περιέχει αυτός ο δακτύλιος είναι $dq = \sigma(2\pi r'dr')$ και όπως γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στο δακτύλιο αυτό και στο σημείο *P* έχει μόνο συνιστώσα στην +*z* διεύθυνση και έχει μέτρο:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zdq}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z(2\pi\sigma r'dr')}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνοντας την έκφραση αυτή από $r'=0$ έως $r'=R$, βρίσκουμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο P :

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r'dr'}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left.\frac{u^{-1/2}}{(-1/2)}\right|_{z^2}^{R^2+z^2}$$

$$= -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \qquad z \succ 0$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \qquad z \prec 0$$

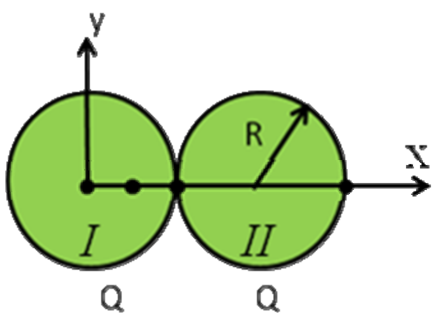
Στην περίπτωση που έχουμε ομογενή επίπεδη κατανομή φορτίου που εκτείνεται στο άπειρο το $R \to \infty$ τότε το πεδίο γίνεται:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-0] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad z \succ 0$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[-1-0] = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad z \prec 0$$

Αυτό είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που προκύπτει από το νόμο του Gauss για επίπεδη ομογενή κατανομή απείρων διαστάσεων.

2. Θετικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε κάθε μία από τις σφαίρες του σχήματος. Η ακτίνα κάθε σφαίρας είναι R και οι δύο σφαίρες εφάπτονται. Θεωρείστε το κέντρο της μιας ως αρχή των αξόνων και ως άξονα x την ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους. Να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του πεδίου που οφείλεται στις δυο σφαιρικές κατανομές στα εξής σημεία α) x= 0, b) x=R/2, c) x=R d) x=3R.



Λύση

Εφαρμόζουμε για κάθε περίπτωση την αρχή της επαλληλίας.

a) Στη θέση x=0 το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στη σφαίρα *I* είναι μηδέν, $\vec{E}_{\mathrm{I}} = 0$, διότι από το νόμο του Gauss προκύπτει:

$$\Phi = \oint \vec{E}_I \cdot d\vec{A} = E_I \left[4\pi r^2 \right] = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \qquad\qquad Q' = Q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q\frac{r^3}{R^3}$$

επομένως $E_I = \dfrac{Q\dfrac{r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$ που για r = 0 δίνει $\vec{E}_{\mathrm{I}} = 0$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο ίδιο σημείο λόγω της σφαίρας *II* θα υπολογιστεί από το νόμο του Gauss, χρησιμοποιώντας ως γκαουσιανή επιφάνεια σφαίρα ακτίνας 2R με κέντρο το κέντρο της σφαίρας II:

$$\Phi = \oint \vec{E}_{II} \cdot d\vec{A} = E_{II} \left[4\pi (2R)^2 \right] = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to E_{II} = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \text{ και } \vec{E}_{II} = -\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i} \text{ ,x=0}$$

οπότε:

$$\vec{E}_{o\lambda} = \vec{E}_I + \vec{E}_{II} = 0 - \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i} = -\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i} \quad \text{x=0}$$

b) Στη θέση x=R/2 το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στη σφαίρα *I* βρίσκεται από το νόμο του Gauss, χρησιμοποιώντας ως γκαουσιανή επιφάνεια σφαίρα ακτίνας R/2 με κέντρο το κέντρο της σφαίρας I:

$$\Phi = \oint \vec{E}_I \cdot d\vec{A} = E_I \left[4\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \text{όπου} \qquad Q' = Q\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{8} \qquad \text{επομένως:}$$

$$E_I = \frac{Q}{8\varepsilon_0 \left(\pi R\right)^2} \text{ και το διάνυσμα του πεδίου } \vec{E}_I = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i} \text{ , x=R/2}$$

Στη θέση x=R/2 το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στη σφαίρα *II* βρίσκεται από το νόμο του Gauss, χρησιμοποιώντας ως γκαουσιανή επιφάνεια σφαίρα ακτίνας 3R/2 με κέντρο το κέντρο της σφαίρας *II*:

$$\Phi = \oint \vec{E}_{II} \cdot d\vec{A} = E_{II} \left[4\pi \left(R + \frac{R}{2} \right)^2 \right] = E_{II}(9\pi R^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{επομένως} \qquad \vec{E}_{II} = -\frac{Q}{9\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i} \text{ ,}$$

x=R/2

οπότε:

$$\vec{E}_{o\lambda}=\vec{E}_I+\vec{E}_{II}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}-\frac{Q}{9\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}=\frac{Q}{72\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}\quad x=\frac{R}{2}$$

c) Στη θέση x=R το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στη σφαίρα *I* βρίσκεται από το νόμο του Gauss, χρησιμοποιώντας ως γκαουσιανή επιφάνεια σφαίρα ακτίνας R με κέντρο το κέντρο της σφαίρας *I*:

$$\Phi=\oint\vec{E}_I\cdot d\vec{A}=E_I\left[4\pi R^2\right]=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad\rightarrow\quad\vec{E}_I=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}\quad x=R$$

Παρομοίως για τη σφαίρα *II* :

$$\vec{E}_{II}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}\quad \text{Συνεπώς:}$$

$$\vec{E}_{o\lambda}=\vec{E}_I+\vec{E}_{II}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}=0\quad x=R$$

d) Στη θέση x=3R το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στη σφαίρα *I* βρίσκεται από το νόμο του Gauss, χρησιμοποιώντας ως γκαουσιανή επιφάνεια σφαίρα ακτίνας 3R με κέντρο το κέντρο της σφαίρας I:

$$\Phi=\oint\vec{E}_I\cdot d\vec{A}=E_I\left[4\pi\left(3R\right)^2\right]=\frac{Q}{\varepsilon_0}\ \text{επομένως}\ E_I=\frac{Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2}\ \text{και το διάνυσμα του πεδίου}$$

$$\vec{E}_I=\frac{Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}\ ,x=3R$$

Στη θέση x=3R το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στη σφαίρα *II* βρίσκεται από το νόμο του Gauss, χρησιμοποιώντας ως γκαουσιανή επιφάνεια σφαίρα ακτίνας R με κέντρο το κέντρο της σφαίρας *II*:

$$\Phi=\oint\vec{E}_{II}\cdot d\vec{A}=E_{II}\left[4\pi R^2\right]=\frac{Q}{\varepsilon_0}\ \text{επομένως}\ \vec{E}_{II}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}\ ,\ x=3R$$

οπότε $\vec{E}_{o\lambda}=\vec{E}_I+\vec{E}_{II}=\frac{Q}{36\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}=\frac{5Q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{i}\quad x=3R$

3. Το ηλεκτρικό δυναμικό V σε κάποια περιοχή του χώρου δίνεται από την συνάρτηση

$$V(x,y,z)=ax^2+ay^2-2az^2,$$

όπου a είναι σταθερά. a) Να βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ που να ισχύει για όλα τα σημεία σε αυτή την περιοχή. b) Αν το έργο που παράγεται από το πεδίο όταν το δοκιμαστικό φορτίο $2{,}00\mu C$ κινείται από το σημείο $(x,y,z)=(0,\ 0,\ 0{,}100m)$ μέχρι την αρχή των αξόνων είναι $-5{,}00\times10^{-5}J$, υπολογίστε την σταθερά a. c) Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο $(0,\ 0,\ 0{,}100m)$. d) Δείξτε ότι σε κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο xy οι ισοδυναμικές γραμμές είναι κύκλοι. e) Ποια είναι η ακτίνα της ισοδυναμικής γραμμής που αντιστοιχεί στο $V=5000\ V$ και $z=\sqrt{2}$ m ;

Λύση:

a) Το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό συνδέονται μέσω της διανυσματικής σχέσης:

$$\vec{E}=-gradV=-\nabla V=-\left(\hat{i}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

όπου $\hat{i},\ \hat{j},\ \hat{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις Ox, Oy και Oz. Από τη συνάρτηση του δυναμικού έχουμε,

$\frac{\partial V}{\partial x}=2ax,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=2ay$ και $\frac{\partial V}{\partial z}=-4az$, και το πεδίο είναι:

$$\vec{E}=\left(-2ax\hat{i}-2ay\hat{j}+4az\hat{k}\right) \qquad (1)$$

b) Το έργο που παράγεται θα είναι ίσο και αντίθετο προς τη διαφορά δυναμικής ενέργειας του φορτίου στις θέσεις $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_0$, δηλαδή

$$W=-q(V_0-V_1)=-q(-2az_1^2+2az_0^2)=2aq(z_1^2-z_0^2)\Rightarrow a=\frac{W}{2q(z_1^2-z_0^2)}$$

και αντικαθιστώντας ,

$$a=\frac{-5{,}00\times10^{-5}J}{2\left(2{,}00\times10^{-6}C\right)\left(-0{,}01m^2\right)}=1{,}25\times10^3\frac{V}{m^2}$$

Εναλλακτικά, επειδή το πεδίο είναι διατηρητικό το έργο είναι ανεξάρτητο του δρόμου και μπορούμε να το υπολογίσουμε ακολουθώντας διαδρομή πάνω στον άξονα z συνεπώς:

Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q είναι $\vec{F}=q\vec{E}$, και το έργο που παράγει η δύναμη για στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{r}$, είναι $dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}$. Το φορτίο κινείται από το $(0,\ 0,\ 0{,}100m)\rightarrow(0,\ 0,\ 0)$ άρα κατά τη διεύθυνση Oz, συνεπώς το $d\vec{r}=\hat{k}dz$. Υπολογίζοντας το στοιχειώδες έργο dW και ολοκληρώνοντας κατά μήκος του δρόμου βρίσκουμε το έργο,

$$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}=q\vec{E}\cdot\hat{k}dz=q\left(-2ax\hat{i}-2ay\hat{j}+4az\hat{k}\right)\cdot\hat{k}dz=4qazdz$$

και

$$W=\int_{z_0}^{z_1} 4qazdz = 2qaz^2\Big|_{z_0}^{z_1} = 2aq\left(z_1^2-z_0^2\right),\quad \text{όπου}\quad z_0=0{,}100m \text{ και } z_1=0m\,.$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς a έχουμε:

$$a=\frac{W}{2q\left(z_1^2-z_0^2\right)}$$

και αντικαθιστώντας ,

$$a=\frac{-5{,}00\times10^{-5}J}{2\left(2{,}00\times10^{-6}C\right)\left(-0{,}01m^2\right)}=1{,}25\times10^3\,\frac{V}{m^2}$$

c) Από την (1) αντικαθιστώντας την τιμή του a και τα x,y,z βρίσκουμε:

$$\vec{E}=500\frac{V}{m}\;\hat{k}$$

d) Σε κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο x,y το z παραμένει σταθερό. Έστω λοιπόν ότι για τυχαίο επίπεδο είναι $z=\beta$ και ότι $V=$ σταθερό τότε:

$$V=ax^2+ay^2-2a\beta^2 \quad \text{ή} \quad ax^2+ay^2=V+2a\beta^2\,.$$

Άρα

$$x^2+y^2=R^2,\quad \text{όπου}\quad R=\sqrt{\frac{V}{a}+2\beta^2} \qquad (2).$$

Επομένως η καμπύλη σταθερού δυναμικού, V, είναι κύκλος ακτίνας R.

e) Από την (2), λύνοντας ως προς R βρίσκουμε

$$R=\sqrt{\frac{V}{a}+2\beta^2}$$

και αντικαθιστώντας,

$$R=2{,}83m\,.$$

4. Δύο μεταλλικές σφαίρες διαφορετικού μεγέθους φορτίζονται έτσι ώστε το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια τους να είναι το ίδιο. Η σφαίρα Α έχει

ακτίνα τρεις φορές μεγαλύτερη εκείνης της B. Έστω Q_A και Q_B τα φορτία σε κάθε σφαίρα και E_A και E_B οι εντάσεις των ηλεκτρικών πεδίων στην επιφάνεια της κάθε σφαίρας. Πόσος είναι a) ο λόγος Q_B/Q_A· b) ο λόγος E_B/E_A;

Λύση

a) Έστω r_A και r_B οι ακτίνες των σφαιρών, τότε $r_A = 3r_B$. Το δυναμικό στις επιφάνειες των σφαιρών δίνεται από:

$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r_A}$ και $V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{r_B}$,όμως $V_A = V_B$ και

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r_A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{r_B} \to \frac{Q_A}{r_A} = \frac{Q_B}{r_B} \to \frac{Q_B}{Q_A} = \frac{r_B}{r_A} = \frac{1}{3}.$$

Ο λόγος των φορτίων ισούται προς το λόγο των ακτίνων.

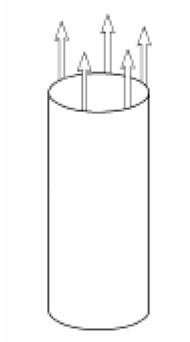
b) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια των σφαιρών είναι:

$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r_A^2}$ και $E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{r_B^2}$, συνεπώς:

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{Q_B}{r_B^2}\frac{r_A^2}{Q_A} = \frac{1}{3}\cdot 3^2 = 3$$

Ο λόγος των μέτρων των πεδίων είναι 3.

5. **Θεωρούμε ένα λεπτό φύλλο αλουμινίου τυλιγμένο έτσι ώστε να σχηματίζει άδεια όρθια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R. Αν I είναι η ένταση του ρεύματος ομοιόμορφα κατανεμημένου στην καμπύλη κυλινδρική επιφάνεια και με κατεύθυνση από κάτω προς τα επάνω, προσδιορίστε: (α) το μαγνητικό πεδίο ακριβώς μέσα από την κυλινδρική επιφάνεια, (β) ακριβώς έξω και (γ) την πίεση που υφίσταται η κυλινδρική επιφάνεια. (Θεωρείστε τον κύλινδρο απείρου μήκους)**



Λύση

(α) $r < R$

Εφαρμόζουμε το νόμο Ampère:

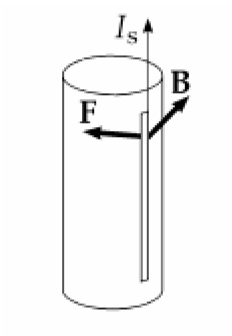
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow \oint B ds\cos(0^o) = \mu_0 I \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = 0 \text{ αφού } I=0$$

(β) r ≥ R (λίγο έξω από το R)

Εφαρμόζουμε το νόμο Ampère: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Οπότε για r = R $\quad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$

(γ) Θεωρούμε στενή λωρίδα της κυλινδρικής επιφάνειας μήκους l και πλάτους dx. (Το πλάτος



dx είναι τόσο μικρό σε σύγκριση με την περίμετρο του κυλίνδρου 2πR, ώστε το πεδίο σε αυτή τη θέση παραμένει αμετάβλητο αν το ρεύμα της λωρίδας (l, dx) στιγμιαία διακοπεί). Τότε το ρεύμα στη λωρίδα είναι: $I_s = \dfrac{I}{2\pi R}dx$ με κατεύθυνση προς τα επάνω. Άρα η λωρίδα (l, dx) μπορεί να θεωρηθεί ως ρευματοφόρος αγωγός ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I_s. Επομένως η δύναμη η οποία ασκείται στη λωρίδα θα είναι:

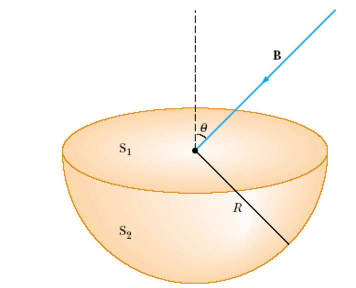
$$\vec{F} = I_s\,\vec{l}\times\vec{B} = \frac{I}{2\pi R}dx\left(l\,\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right)(-\hat{r}) = \frac{\mu_0 I^2 l dx}{4\pi^2 R^2}(-\hat{r})$$ (κατεύθυνση από την επιφάνεια, ακτινικά προς τα μέσα.)

Οπότε η ζητούμενη πίεση θα είναι:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\dfrac{\mu_0 I^2 l dx}{4\pi^2 R^2}}{l dx} = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi R)^2}$$, παραμορφώνοντας την κυλινδρική επιφάνεια προς τα μέσα.

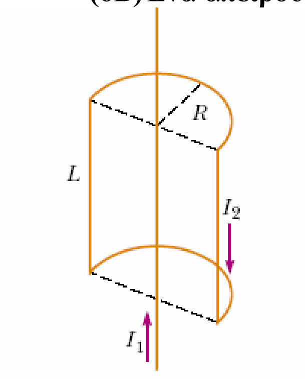
6

(6Α) Θεωρείστε την κλειστή ημισφαιρική επιφάνεια του σχήματος. Το ημισφαίριο βρίσκεται μέσε σε ομογενές μαγνητικό πεδίο που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Υπολογίστε τη μαγνητική ροή (α) μέσω της



επίπεδης επιφάνειας S_1 και (β) μέσω της ημισφαιρικής επιφάνειας S_2.

(6Β) Ένα απείρου μήκους ευθύγραμμο σύρμα, διαρρέεται από ρεύμα I_1 και περιβάλλεται μερικώς από συρμάτινο βρόχο (όπως στο σχήμα) ο οποίος έχει μήκος L και ακτίνα R και διαρρέεται από ρεύμα I_2. Ο άξονας του βρόχου ταυτίζεται με το σύρμα. Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στο βρόχο.



Λύση

6Α

(α) $(\Phi_B)_{S1} = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos(180-\theta) = B\pi R^2(-\cos\theta) = -B\pi R^2\cos\theta$

(β) Από το νόμο του Gauss γνωρίζουμε ότι: $(\Phi_B)_{o\lambda} = (\Phi_B)_{S1} + (\Phi_B)_{s2} = 0$, οποτε:

$(\Phi_B)_{S2} = -(\Phi_B)_{s1} = -(-B\pi R^2\cos\theta) = B\pi R^2\cos\theta$

6Β

Το κεντρικό σύρμα δημιουργεί σε απόσταση R πεδίο:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Τα καμπύλα τμήματα του βρόχου δεν υφίστανται δύναμη αφού:

$$\vec{F}_1 = I_2\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F}_1 = I_2 lB\sin 0^o\,\hat{u} = 0$$

όπου $\hat{u}$ τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει την κατεύθυνση της δύναμης.

Τα ευθύγραμμα τμήματα του βρόχου υφίστανται δύναμη:

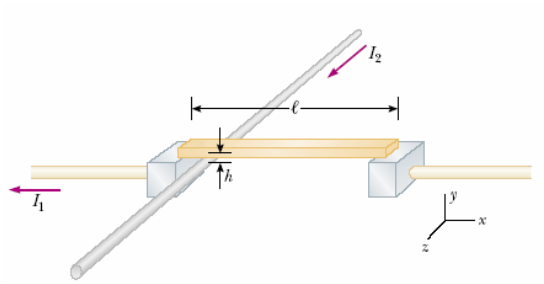
$$\vec{F}_2 = I_2\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow I_2 lB\sin 90^o\,\hat{r}$$

με κατεύθυνση προς τα δεξιά το καθένα. Άρα η συνολική δύναμη θα είναι:

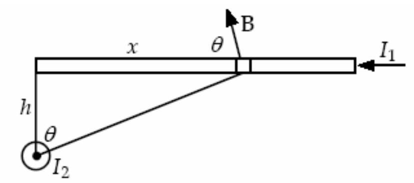
$$F_2 = 2\left(I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \right)\hat{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{\pi R}\hat{r}$$

προς τα δεξιά και στα δύο.

7 Λεπτή χάλκινη ράβδος μήκους l = 10 cm κρατείται οριζόντια από δύο (μη μαγνητικά) στηρίγματα. Η ράβδος διαρρέεται από ρεύμα I_1 = 100 A στην –x διεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε απόσταση h = 0,5 cm κάτω από το ένα άκρο της ράβδου, ένα μακρύ σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I_2 = 200 A κατά τη διεύθυνση z. Προσδιορίστε τη μαγνητική δύναμη που ασκείται στη ράβδο.



Λύση



Σε σημείο που απέχει x από το αριστερό άκρο της ράβδου, το ρεύμα I_2 δημιουργεί πεδίο:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_2 \Rightarrow \oint Bds\cos\theta = \mu_0 I_2 \Rightarrow B\oint ds\cos 0^o = \mu_0 I_2 \Rightarrow$$

$$B2\pi r = \mu_0 I_2 \Rightarrow B(2\pi\sqrt{h^2+x^2}) = \mu_0 I_2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{h^2+x^2}}$$

το οποίο έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα (tanθ = x/h).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{h^2+x^2}}(-\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$$

Το πεδίο αυτό ασκεί δύναμη $d\vec{F}$ στο στοιχείο dx της ράβδου που διαρρέεται από ρεύμα I_1, η οποία είναι:

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l}\times\vec{B} = I_1 dx(-\hat{i})\times\frac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{h^2+x^2}}(-\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}) = I_1\frac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{h^2+x^2}}dx\sin\theta(-\hat{k})$$

$$= \mu_0\frac{I_1 I_2}{2\pi\sqrt{h^2+x^2}}dx\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}(-\hat{k}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 x dx}{2\pi(h^2+x^2)}\hat{k}$$

οπότε η συνολική δύναμη είναι:

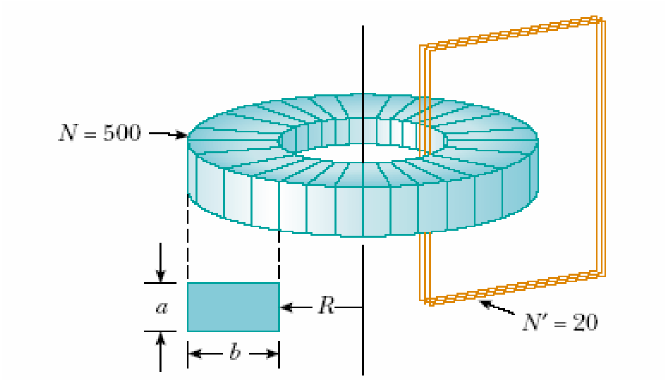
$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -\int_0^l \frac{\mu_0 I_1 I_2 x dx}{2\pi(h^2+x^2)}\hat{k} = -\hat{k}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\int_0^l \frac{2xdx}{h^2+x^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2(-\hat{k})}{4\pi}\ln(h^2+x^2)\big|_0^l \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\hat{k}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\ln(h^2+l^2)-\ln h^2\right] = -\hat{k}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\ln\left(\frac{h^2+l^2}{h^2}\right)$$

από την οποία, με αριθμητική αντικατάσταση, προκύπτει:

$$\vec{F} = \frac{4\pi\times10^{-7}\,N.A^{-2}(100A)(200A)(-\hat{k})}{4\pi}\ln\left(\frac{(0{,}5cm)^2+(10cm)^2}{(0{,}5cm)^2}\right) = 1{,}20\times10^{-2}N(-\hat{k})\,.$$

8 Δακτυλιοειδές πηνίο με ορθογώνια διατομή (a = 2 cm, b = 3 cm) αποτελείται από 500 σπείρες, έχει εσωτερική ακτίνα R = 4 cm και διαρρέεται από ρεύμα I = I$_0$ sin ωt, με I$_0$ = 50 A και συχνότητα f = ω / 2π = 60 Hz. Ένα ορθογώνιο πλαίσιο που αποτελείται από 20 σπείρες τοποθετείται ως προς το πηνίο όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε την ΗΕΔ που επάγεται στο πλαίσιο ως συνάρτηση του χρόνου.



Λύση

Στο δακτυλιοειδές πηνίο, όλη η ροή περιορίζεται στο εσωτερικό του. Από το νόμο του Ampère, το μαγνητικό πεδίο υπολογίζεται ως:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 NI \Rightarrow \oint Bds\cos(0^o) = \mu_0 NI \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0\frac{NI}{2\pi r}$$

Η ροή είναι:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_R^{R+b}\mu_0\frac{NI}{2\pi r}(adr)\cos(0^o) = \mu_0\frac{NIa}{2\pi r}\int_R^{R+b}\frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi_B = \mu_0\frac{NaI_0\sin(\omega t)}{2\pi}\ln r\Big|_R^{R+b} =$$

$$\frac{N\mu_0 I_0\sin(\omega t)a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$

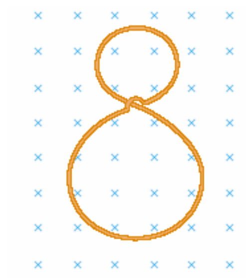
Η επαγόμενη ΗΕΔ στο πλαίσιο θα είναι:

$$E = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} = -N_1 \frac{N\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \frac{d}{dt}(\sin \omega t) = -N_1 \frac{N\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \omega \cos(\omega t) =$$

$$-20 \frac{500 \times (4\pi \times 10^{-7} N.A^{-2}) \times (50A) \times (0{,}02m)}{2\pi} \times \ln\left(\frac{7}{4}\right) \times (2 \times \pi \times 60 s^{-1}) \cos \omega t \Rightarrow$$

$E = -0{,}422 \cos \omega t$ V.

9 Ένα κλειστό μονωμένο σύρμα διπλώνεται σε σχήμα 8. Η ακτίνα του επάνω κύκλου είναι r_A = 5 cm και του κάτω r_K = 9 cm. Το σύρμα έχει ομοιόμορφη αντίσταση ανά μονάδα μήκους ίση με 3 $\Omega.m^{-1}$. Ομογενές μαγνητικό πεδίο εφαρμόζεται κάθετα στο επίπεδο των δύο κύκλων με διεύθυνση προς την σελίδα. Το μέτρο του πεδίου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 2 $T.s^{-1}$. Να βρεθεί το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά του επαγόμενου ρεύματος στο σύρμα.



Λύση

Ο πάνω βρόχος έχει επιφάνεια $A_A = \pi r_A^2 = \pi(0{,}05m)^2 = 7{,}85 \times 10^{-3} m^2$ και η επαγόμενη ΗΕΔ είναι:

$$E_A = -N \frac{d}{dt} \Phi_B = -N \frac{d}{dt}\left(\vec{B} \cdot \vec{A}_A\right) = -N \frac{d}{dt}\left(BA_A \cos 0^o\right) = -NA_A \cos 0^o \frac{d}{dt} B$$

και με αριθμητική αντικατάσταση:

$$E_A = -1 \times (7{,}85 \times 10^{-3} m^2) \times (1) \times \left(2T.s^{-1})\right) = -1{,}57 \times 10^{-2} V \text{ .}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι θα δημιουργηθεί στον άνω βρόχο ηλεκτρικό ρεύμα αντίθετο της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Ομοίως για τον κάτω βρόχο:

$$A_B = \pi r_B^2 = \pi(0{,}09m)^2 = 2{,}54 \times 10^{-2} m^2$$

και

$$E_B = -1 \times (2{,}54 \times 10^{-2} m^2) \times (1) \times \left(2T.s^{-1})\right) = -5{,}09 \times 10^{-2} V \text{ ,}$$

παράγοντας ρεύμα στον κάτω βρόχο αντίθετο της κίνησης των δεικτών του ρολογιού το οποίο γίνεται σύμφωνο με τη φορά των δεικτών του ρολογιού όταν περνάει στον άνω βρόχο (με αντίστοιχη συμπεριφορά για τον κάτω βρόχο). Επομένως η συνολική ΗΕΔ στον σχήματος 8 βρόχο θα είναι:

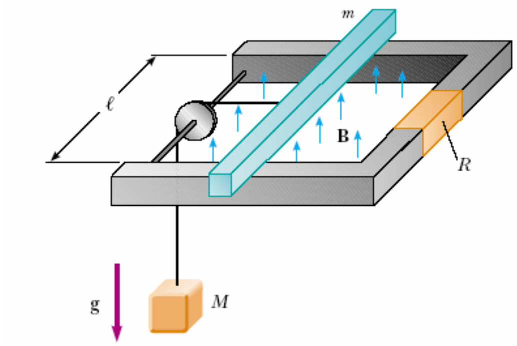
$$E \;= \left|5{,}09\times 10^{-2}\,V - 1{,}57\times 10^{-2}\,V\right| = 3{,}52\times 10^{-2}\,V$$

Και η αντίσταση (σύνδεση σε σειρά):

[2π × (0,05 m) + 2π × (0,09 m)] × 3 $\Omega.m^{-1}$= 2,64 Ω,

Οπότε I = E / R = 3,52 × 10^{-2} V / 2,64 Ω = 13,3 mA.

10 Η ράβδος του σχήματος, μάζας m, σύρεται οριζόντια πάνω σε δύο παράλληλες ράγες χωρίς τριβή, μέσω αβαρούς νήματος το οποίο περνάει από ελαφριά τροχαλία και καταλήγει σε αντικείμενο μάζας Μ. Τριβές στην τροχαλία δεν υπάρχουν. Το ομογενές μαγνητικό πεδίου έχει μέτρο Β και η απόσταση μεταξύ των ραγών είναι l.



Η μόνη αντίσταση στην διάταξη είναι R η οποία συνδέει τις δύο ράγες στο ένα άκρο. Βρείτε την έκφραση που δίνει την οριζόντιο ταχύτητα της ράβδου συναρτήσει του χρόνου, υποθέτοντας ότι η αναρτώμενη μάζα Μ αφήνεται ελεύθερη τη χρονική στιγμή t=0.

Λύση

Για τη μάζα Μ ισχύει: $\sum F = Mg - T = Ma \quad (1)$

ενώ για τη ράβδο μάζας m: $\sum F = T - IlB = ma \quad (2)$

όπου $I = \dfrac{E}{R} = \dfrac{Blu}{R} \quad (3)$

Από τις εξισώσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$Mg - \frac{B^2 l^2 u}{R} = (m+M)a \Rightarrow a = \frac{du}{dt} = \frac{Mg}{m+M} - \frac{B^2 l^2 u}{R(m+M)} = k - \lambda u$$

με $k = \dfrac{Mg}{m+M}$ και $\lambda = \dfrac{B^2 l^2}{R(m+M)}$, οπότε:

$$\int_0^u \frac{du}{k-\lambda u} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{\lambda}\int \frac{d(k-\lambda u)}{k-\lambda u} = \int_0^t dt \Rightarrow -\ln(k-\lambda u)_0^u = \lambda t \Rightarrow \ln(k-\lambda u) - \ln k = -\lambda t \Rightarrow$$

$$\frac{k-\lambda u}{k} = e^{-\lambda t} \Rightarrow 1-\frac{\lambda}{k}u = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{\lambda}{k}u = 1-e^{-\lambda t} \Rightarrow u = \frac{k}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right) \Rightarrow$$

$$u = \frac{MgR}{B^2l^2}\left[1-e^{-\frac{B^2l^2t}{R(m+M)}}\right]$$