Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (6-7-2008) **Μαθηματικά**

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α . Προσδιορίστε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ και $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$.

Λύση

Έστω $\vec{C} = C_1\hat{\imath} + C_2\hat{\jmath} + C_3\hat{k}$ το διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο των $\vec{A}$ και $\vec{B}$.
Αφού το $\vec{C}$ είναι κάθετο και στο $\vec{A}$ και στο $\vec{B}$, θα ισχύει:

$\vec{C}\cdot\vec{A} = 2C_1 - 6C_2 - 3C_3 = 0 \Rightarrow 2C_1 - 6C_2 = 3C_3$ (1)

$\vec{C}\cdot\vec{B} = 4C_1 + 3C_2 - C_3 = 0 \Rightarrow 4C_1 + 3C_2 = C_3$ (2)

Από τη λύση των (1) και (2) προκύπτει:

$C_1 = \frac{1}{2}C_3$ και $C_2 = \frac{1}{3}C_3$ οπότε: $\vec{C} = C_3\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{3}\hat{\jmath} + \hat{k}\right)$ και το μοναδιαίο θα είναι:

$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{C_3\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{3}\hat{\jmath} + \hat{k}\right)}{\sqrt{C_3^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + (1)^2\right]}} = \pm\left(\frac{3}{7}\hat{\imath} - \frac{2}{7}\hat{\jmath} + \frac{6}{7}\hat{k}\right)$$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Αφού το $\vec{C}$ είναι κάθετο και στο $\vec{A}$ και στο $\vec{B}$, θα ισχύει:

$$\vec{C} = \vec{A}\mathrm{x}\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15i - 10j + 30k \quad \text{Άρα } \vec{C} = 15ci - 10cj + 30ck$$

$$\left|\vec{C}\right| = 35c \text{ και το μοναδιαίο θα είναι } \hat{C} = \frac{c(15ci - 10cj + 30ck)}{35c} = \frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k$$

Β. Υποθέστε ότι $\vec{a} \neq 0$. Απαντήστε τεκμηριωμένα στα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Αν $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$, ισχύει ότι $\vec{b} = \vec{c}$;
2. Αν $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$, ισχύει ότι $\vec{b} = \vec{c}$;
3. Αν $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$ και $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$, ισχύει ότι $\vec{b} = \vec{c}$;

Λύση

1. ΟΧΙ. Αν $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b} - \vec{c}) = 0$, οπότε $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$, το οποίο ισχύει όταν $\vec{b} \neq \vec{c}$ (1).

2. ΟΧΙ. Αν $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\vec{a} // (\vec{b} - \vec{c})$, το οποίο συμβαίνει όταν $\vec{b} \neq \vec{c}$ (2).

3. ΝΑΙ. Αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, το $\vec{a}$ είναι κάθετο στο $(\vec{b} - \vec{c})$ λόγω της (1) και επίσης παράλληλο στο $(\vec{b} - \vec{c})$ λόγω της (2). Έτσι αφού $\vec{a} \neq 0$ και είναι ταυτοχρόνως και κάθετο και παράλληλο στο $(\vec{b} - \vec{c})$, θα ισχύει $(\vec{b} - \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$.

ΘΕΜΑ 2

Α. Θεωρείστε το σύστημα

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}$$

Να βρείτε εκείνες τις τιμές του k για τις οποίες το σύστημα
α) έχει μια μοναδική λύση. Ποια είναι αυτή; β) έχει περισσότερες από μια λύσεις, γ) δεν έχει λύση.

Β. Έστω μία συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει:

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

Να αποδείξετε ότι η f(x) είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς x και να βρεθούν οι σταθεροί του όροι.

Γ. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y^4 + x^2y^2 + yx^3 = y + 2$ στο σημείο $(1,1)$.

Α. Λύση

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k(k^2-1) - (k-1) + (1-k) = (k-1)(k^2+k-2) = (k-1)(k-1)(k+2)$$

Ρίζες k =1 και k = -2. Υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k^2-1) - (k-1) + (1-k) = (k-1)(k+1) - (k-1) - (k-1) = (k-1)(k+1-2) = (k-1)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k(k-1) - (k-1) = (k-1)(k-1) = (k-1)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k(k-1) - 0 + (1-k) = k(k-1) - (k-1) = (k-1)^2$$

Επομένως το σύστημα έχει μία μόνο λύση όταν k ≠ 1 και k ≠ -2. Η λύση είναι

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)}=\frac{1}{k+2}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)}=\frac{1}{k+2}$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)}=\frac{1}{k+2}$$

Όταν k = 1 τότε και οι τρεις εξισώσεις γίνονται γίνεται x+y+z=1 οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
Όταν k = -2 τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{array}{lll} -2x+y+z=1 & -2x+y+z=1 & -3y+3z=3 \\ x-2y+z=1 \Rightarrow & 2x-4y+2z=2 \Rightarrow & -3y+3z=-2 \\ x+y-2z=1 & -x-y+2z=-1 & \end{array}$$

και δεν έχει λύσεις, δηλαδή είναι αδύνατο.

Β. Λύση

$$f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45 \Rightarrow \frac{f(x)+45}{10x^3+3x}=\int_0^2 f(t)dt=C \Rightarrow f(x)=C(10x^3+3x)-45$$

Άρα

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2[C(10x^3+3x)-45]dx=C\int_0^2(10x^3+3x)dx-\int_0^2 45dx=C\left[\left(\frac{10x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right)-45x\right]_0^2$$

$$=C\left(\frac{10\ 2^4}{4}+\frac{3\ 2^2}{2}\right)-45\ 2=C(40+6)-90=46C-90$$

Αλλά $\int_0^2 f(t)dt=C$ άρα $46C-90=C \Leftrightarrow C=2$. Άρα

$$f(x)=C(10x^3+3x)-45=20x^3+6x-45$$

Γ. Λύση
Με διαφόριση παίρνουμε

$$y^4 + x^2y^2 + yx^3 = y + 2$$
$$4y^3\frac{dy}{dx} + \left(x^2(2y)\frac{dy}{dx} + 2xy^2\right) + \left(y(3x^2) + \frac{dy}{dx}x^3\right) = \frac{dy}{dx}$$
$$(4y^3 + 2x^2y + x^3 - 1)\frac{dy}{dx} = -(2xy^2 + 3x^2y)$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 3x^2y}{4y^3 + 2x^2y + x^3 - 1}$$

Επομένως για το σημείο $(1,1)$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{6}$$

Που οδηγεί στην εξίσωση της εφαπτομένης ως

$$y - 1 = -\frac{5}{6}(x-1)$$

ΘΕΜΑ 3

Α. Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$

Β. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής του επιπέδου, η οποία βρίσκεται μεταξύ του διαγράμματος της συναρτήσεως $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ και του άξονα του x .

Α. Λύση

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t^2+t} = \int \frac{dt}{t^3+t^2} = \int \frac{dt}{t^2(t+1)} = \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t^2} + \int \frac{Cdt}{t+1} =$$
$$= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t+1} = -\ln t - \frac{1}{t} + \ln(t+1) = -x - e^{-x} + \ln(e^x + 1).$$

Β. Λύση

Καταρχήν , οι ρίζες της εξισώσεως $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3)-(x-3)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x-3)=0$ είναι -1, 1, και 3 και άρα η καμπύλη τέμνει των x στα σημεία -1, 1, και 3. Όπως φαίνεται από το σχήμα εδώ [a,b]= [-1,3] και επομένως το εμβαδόν θα είναι

$$E = \int_{-1}^{3} \left|x^3 - 3x^2 - x + 3\right| dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx + \int_{1}^{3} (-(x^3 - 3x^2 - x + 3))dx =$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{3} = 4 + 4 = 8$$