Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (5-7-2008) **Μηχανική**

Ονοματεπώνυμο

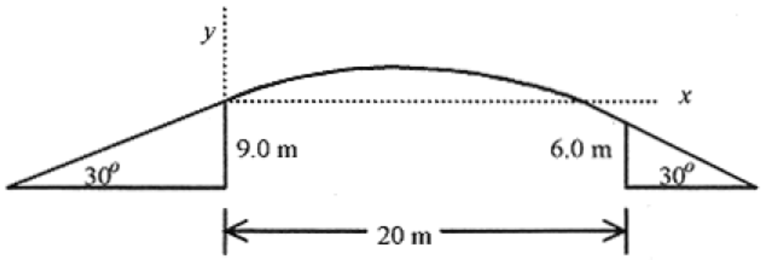
Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. Κασκαντέρ επιχειρεί να πηδήξει με μοτοσικλέτα πάνω από παρκαρισμένα αυτοκίνητα συνολικού εύρους 20 m. Προ του πρώτου αυτοκινήτου έχει τοποθετηθεί ράμπα κλίσης 30^o και ύψους 9 m, και στο τέλος του τελευταίου αυτοκινήτου (στα 20 μέτρα) βρίσκεται δεύτερη ράμπα (προσγείωσης) ύψους 6 m. όπως δείχνει το σχήμα.

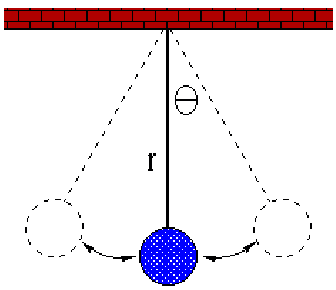
α. Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα της μοτοσικλέτας τη στιγμή που αφήνει την πρώτη ράμπα και βρίσκεται στον αέρα, ώστε να προσγειωθεί με ασφάλεια στη δεύτερη ράμπα, δηλαδή το διάνυσμα της ταχύτητας κατά την προσγείωση να είναι παράλληλο στη δεύτερη ράμπα.

β. Βρείτε την ταχύτητα του κασκαντέρ τη στιγμή που προσγειώνεται στην δεύτερη ράμπα (βλ. σχήμα). Δίνεται g=9.8 m/s^2



Σχήμα

Β. α) Βρείτε την ενέργεια (Ε) του εκκρεμούς ως συνάρτηση της μάζας m, του μήκους r, και της μέγιστης γωνίας εκτροπής του θ.



β) Διαθέτετε μάζα m που μπορείτε να τη συνδέσετε σε ελατήριο σταθεράς k ή σε εκκρεμές με νήμα μη εκτατό μήκους l. Εάν βρίσκεστε σε διαστημικό όχημα απουσία βαρύτητας, ποια από τις δύο συσκευές θα χρησιμοποιήσετε για τη μέτρηση της μάζας m (το διαστημικό όχημα δεν επιταχύνεται).

<u>Α. Λύση</u>

α) Αναλύοντας την κίνηση της μοτοσικλέτας στις διευθύνσεις x και y βρίσκουμε 6 εξισώσεις:

Διεύθυνση-x		Διεύθυνση-y	
$a_x = 0$	(1)	$a_y = -g = 9,8\ m/s^2$	(4)
$\upsilon_x = \upsilon_0\cos\varphi$	(2)	$\upsilon_y = (\upsilon_0\sin\varphi) - gt$	(5)
$x = (\upsilon_0\cos\varphi)t$	(3)	$y = (\upsilon_0\sin\varphi)t - (1/2)gt^2$	(6)

Για να προσγειωθεί ακριβώς στα 20 μέτρα οριζόντια από το πήδημα στον αέρα θα πρέπει να πέσει επίσης 3 μέτρα από το αρχικό ύψος, δηλαδή στα 6 m ύψος από το έδαφος που βρίσκεται η αρχή της δεύτερης ράμπας θα έχουμε x = 20 m και y = -3 m. Αντικαθιστώντας τις τιμές του x και y στις εξισώσεις (3) και (6), αντίστοιχα έχουμε:

$20 = (\upsilon_0\cos\varphi)t$ (7)

και

$-3 = (\upsilon_0\sin\varphi)t - (1/2)gt^2$ (8)

Λύνοντας την (7) ως προς t και αντικαθιστώντας στην (8) έχουμε:

$t = 20/(\upsilon_0\cos\varphi)$

και η εξίσωση (8) γίνεται $-3 = (\upsilon_0\sin\varphi)\ [20/(\upsilon_0\cos\varphi)] - (1/2)g[20/(\upsilon_0\cos\varphi)]^2$ η οποία εύκολα λύνεται ως προς υ_0:

$(\upsilon_0)^2 = 400g/[(6+40\tan\varphi)\cos^2\varphi]$, όπου $\varphi = 30^o$.

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε **υ_0 = 13,4 m/s = 48,24 Km/h.**

Σχόλιο: Όπως αναμενόταν δεν παίζει ρόλο το βάρος της μοτοσικλέτας και του κασκαντέρ στην απάντηση.

β) Έχοντας βρει την αρχική ταχύτητα στο υποερώτημα (α) λύνουμε την εξίσωση (7) ως προς t:

$t = 20/(\upsilon_0\cos\varphi) = 20/(13,4*0,866) = 1,72$ sec ➔

$\upsilon_x = (\upsilon_0\cos\varphi) = 13,4*0,866 = 11,6$ m/s

και εν συνεχεία αντικαθιστούμε την τιμή του t στην εξίσωση (5) και βρίσκουμε την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας την στιγμή της προσγείωσης:

$\upsilon_y = (\upsilon_0\sin\varphi) - gt = (13,4*0,5 - 9,8*1,72)$ m/s $= (6,7 - 16,856)$ m/s $= -10,16$ m/s

Η ταχύτητα επομένως που θα προσγειωθεί στην δεύτερη ράμπα είναι

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{11,6^2 + 10,16^2} = \sqrt{134,56 + 103,22} = 15,42 \text{ m/s.}$$

Προφανώς μεγαλύτερη από την αρχή αφού κατέβηκε 3 m από το αρχικό ύψος, γεγονός που του αύξησε την αρχική ταχύτητα. Αν αναλογιστούμε ότι τα 3 m ισοδυναμούν με μεταβολή της ταχύτητας κατά $\Delta\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2*9,8*3} = 7,67$ m/s, η οποία αύξηση προέρχεται από την αύξηση της υ_y, δεδομένου ότι η υ_x παραμένει σταθερή.

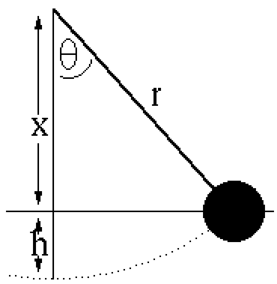
Μπορούμε να επαληθεύσουμε ως εξής:

$\Delta\upsilon^2 = (\upsilon_f^2 - v_0^2) = 15,42^2 - 13,4^2 = 237,78 - 179,56 = 58,22$

Επομένως Δυ = 7,63, ίσο δηλαδή με την αύξηση που βρήκαμε από την μεταβολή του ύψους, με την προσέγγιση των μαθηματικών πράξεων που κάναμε.

Β. Λύση

α) Στο σχήμα που ακολουθεί είναι εύκολο να υπολογίζουμε το ύψος στο οποίο ανέρχεται το μπαλάκι στην ακραία θέση (γωνία –θ ή θ):



Είναι προφανές ότι η ολική ενέργεια του εκκρεμούς είναι δυναμική στην ακραία θέση (ΔΕ = mgh, όπου h το ύψος από την θέση ισορροπίας του εκκρεμούς). Για να υπολογίσουμε το h απλή τριγωνομετρία επαρκεί:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ x &= r\cos\theta \\ h + x &= r \\ h &= r - x \\ h &= r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\Delta E = mgh = mgr(1-\cos\theta)$$

Επομένως η ολική ενέργεια του εκκρεμούς είναι

$$E = mgr(1-\cos\theta)$$

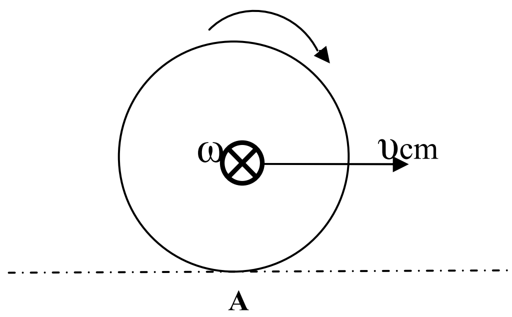
Λύση

β) Το εκκρεμές δεν μπορεί να εκτελέσει ταλάντωση απουσία βαρύτητας άρα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Για το λόγο αυτό και η περίοδος του εκκρεμούς εξαρτάται μόνο από την επιτάχυνση της βαρύτητας και όχι από τη μάζα, Αντίθετα στην περίπτωση ταλάντωσης ελατηρίου η δύναμη είναι αυτή που προσδιορίζεται από το νόμο του Hooke και η οποία θα ασκείται στο σώμα είτε παρουσία είτε απουσία βαρύτητας, η δε περίοδος εξαρτάται από τη μάζα με το γνωστό τύπο $T=2\pi\ (m/k)^{1/2}$ ώστε μετρώντας την περίοδο της ταλάντωσης να προσδιορίζουμε τη μάζα του σώματος. Βέβαια εάν κάποιος σκεφτεί να φορτίσει το σώμα και να το βάλει μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο θα μπορούσε να μετρήσει τη μάζα διότι η δύναμη η οποία ασκείται στο σώμα $F=E\ q$ είναι ανεξάρτητη της μάζας και η περίοδος θα εξαρτάται από τη μάζα.

ΘΕΜΑ 2

A. Η συνισταμένη δύναμη που δρά σε ένα σώμα μάζας 2 kg το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα x μεταβάλλεται ως $F_x=3x^2-4x+5$ όπου το x μετράται σε m και το F_x σε N. **(α)** Βρείτε το συνολικό έργο που παράγεται στο σώμα καθώς αυτό κινείται από x =1 m έως x=3m **(β)** Αν η ταχύτητα του σώματος είναι 5 m/s όταν x =1 m, ποια θα είναι η ταχύτητα όταν x =3 m ;

B. Μια σφαίρα ακτίνας R=0.1 m και μάζας m=1 kg ρίχνεται κατά μήκος οριζόντιας επίπεδης επιφάνειας με αρχική ταχύτητα υ_0=1 m/s και αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0=5 rad/s με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σφαίρας-επιφάνειας είναι μ=0.02 κα η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της είναι $I=2mR^2/5$. Να βρεθεί:



α) η ταχύτητα του σημείου Α της επιφάνειας της σφαίρας τη στιγμή που ακουμπά στο οριζόντιο επίπεδο.
β) το είδος της κίνησης που κάνει η σφαίρα μεταφορικά και στροφικά.
γ) μετά από πόσο χρόνο θα σταματήσει η ολίσθηση της σφαίρας και θα έχουμε μόνο κύλιση.

Α. Λύση

α)

$$W=\int_1^3 F_x dx=\int_1^3\left(3x^2-4x+5\right)dx=\left(x^3-2x^2+5x\right)\Big|_1^3=\left(27-18+15\right)-\left(1-2+5\right)=20J$$

β) Από το θεώρημα έργου – ενέργειας έχουμε ότι

$K_3-K_1=W$ όπου K_1 και K_3 είναι οι κινητικές ενέργειες του σώματος όταν x=1m και x=3 m αντίστοιχα, και W=20J από το αποτέλεσμα του (α)

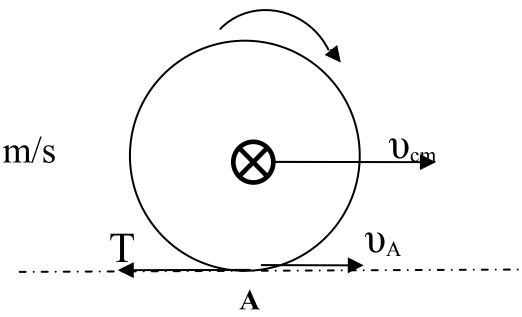
Η αρχική κινητική ενέργεια όταν x=1m είναι $K_1 = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}2\times 5^2 = 25m$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι K_3=20J+25J=45J. Η τελική ταχύτητα όταν x=3m δίνεται από

$$u' = \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = 6.7ms^{-1}$$

B. Λύση

Το σημείο Α εκτελεί σύνθετη κίνηση, μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα ω, δηλαδή με γραμμική $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R$. Άρα η ταχύτητα του Α είναι:



$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_\gamma \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon_{cm} - \omega_0 R = 1 - 0.1\cdot 5 = 0.5 \text{ m/s}$$

Β) Αφού η ταχύτητα του σημείου Α είναι στην ίδια διεύθυνση με την υ_{cm} η τριβή θα έχει φορά αντίθετη.
Λόγω της φοράς της T η κίνηση της σφαίρας θα είναι επιβραδυνόμενη μεταφορική και επιταχυνόμενη περιστροφική με αρχικές ταχύτητες αντίστοιχα υ_0 και ω_0.

Γ) Η ολίσθηση της σφαίρας θα σταματήσει όταν η ταχύτητα στου σημείου Α γίνει 0.

$$\sum F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow -T = m\alpha_{cm} \Rightarrow -\mu mg = m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = -\mu g = -0.02\cdot 10 = -0.2 \text{ m/s}^2$$

$$\sum \tau_{cm} = Ia_\gamma \Rightarrow \mathrm{T}R = Ia_\gamma \Rightarrow \mu mgR = \frac{2}{5}mR^2 a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{5\mu g}{2R} = 5 \text{ rad/s}^2$$

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_0 + \alpha_{cm}t = 1 - 0.2t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma t = 5 + 5t$$

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_\gamma \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon_{cm} - \omega R = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow 1 - 0.2t = 0.1(5 + 5t) \Rightarrow t = \frac{5}{7} \text{ s}$$

ΘΕΜΑ 3

A. Ένα σωμάτιο που κινείται στο χώρο υφίσταται μια διατηρητική δύναμη που περιγράφεται από την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας: $U(x,y,z)=k(x^2+y^2+z^2)$ Να εκφράσετε τη δύναμη ως διανυσματική συνάρτηση και να εκφράσετε το μέτρο της ως συνάρτηση των συντεταγμένων θέσης (x,y,z). (k=σταθερά).

B. Λεπτή ράβδος μήκους L έχει μεταβαλλόμενη γραμμική πυκνότητα dm/dx = kx, όπου k = σταθερά, όπου το x παριστάνει την απόσταση από το αριστερό της άκρο.

α) Να βρεθούν οι μονάδες του k στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων.
β) Υπολογίστε τη μάζα της ράβδου συναρτήσει των k και L.
γ) Υπολογίστε την θέση του κέντρου μάζας της ράβδου.
δ) Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το αριστερό της άκρο και είναι κάθετος προς τον άξονα της ράβδου.
ε) Να βρείτε την περίοδο της ράβδου, όταν ταλαντώνεται σαν φυσικό εκκρεμές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το αριστερό της άκρο και είναι κάθετος σε αυτήν.

Α. Λύση

Η σχέση μεταξύ δύναμης και δυναμικής ενέργειας δίνεται από την κατωτέρω έκφραση:

$$\vec{F} = -\nabla U = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$$

Επομένως η δύναμη στο σωμάτιο θα είναι:

$$\vec{F} = -(\frac{\partial[k(x^2+y^2+z^2)]}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial[k(x^2+y^2+z^2)]}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial[k(x^2+y^2+z^2)]}{\partial z}\vec{k}) = -k(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}] =$$

$$= -2k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}] = -2k\vec{r}$$

Το μέτρο της δύναμης δίνεται από την έκφραση:

$$|\vec{F}| = 2|k|\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2|k\vec{r}|$$

Β. Λύση

α) Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου είναι:

$\frac{dm}{dx} = kx$, οπότε οι μονάδες του k στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων είναι:

k: $\frac{kg}{m \bullet m} = \frac{kg}{m^2}$

β) Για τον υπολογισμό της μάζας της ράβδου χρησιμοποιούμε την έκφραση της γραμμικής πυκνότητας:

$$\frac{dm}{dx} = kx \Rightarrow dm = kx\ dx \Rightarrow \int dm = \int_0^L kx\ dx \Rightarrow M = k[\frac{x^2}{2}]_0^L \Rightarrow M = k\frac{L^2}{2} (1)$$

γ) Για τον υπολογισμό της θέσης του κέντρου μάζας της ράβδου, χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα, καθώς και την έκφραση της απειροστής μάζας dm, ως ανωτέρω:

$$x_{CM} = \frac{\int xdm}{M} = \frac{\int xkx\ dx}{M} = \frac{\int_0^L kx^2 dx}{M} = \frac{k[\frac{x^3}{3}]_0^L}{M} = \frac{kL^3}{3M} (2)$$

Τέλος, από την αντικατάσταση της σχέσης (1) στη (2) προκύπτει:

$$x_{CM} = \frac{kL^3}{3k\frac{L^2}{2}} = \frac{2kL^3}{3kL^2} = \frac{2}{3}L$$

Συνεπώς, το κέντρο μάζας βρίσκεται στα $\frac{2}{3}L$ από το αριστερό άκρο της ράβδου.

δ) Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας της ράβδου έχουμε:

$$I = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 kxdx = \int_0^L kx^3 dx = k[\frac{x^4}{4}]_0^L = \frac{kL^4}{4} (3)$$

Λόγω της (1), η (3) γράφεται και ως εξής:

$$I = \frac{ML^2}{2} (4)$$

Η περίοδος του φυσικού εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ML^2}{2}}{Mg\frac{2L}{3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3L}{4g}} = \pi\sqrt{\frac{3L}{g}}$$

Όπου d η απόσταση αριστερού άκρου-κέντρου μάζας.

ΘΕΜΑ 4

Α. Σώμα μάζας 10kg κινείται υπό την επίδραση της δύναμης

F = [5t **i** +(3t^2-1) **j**] N

Την χρονική στιγμή t = 0 το σώμα ηρεμεί στην αρχή των αξόνων.

α) Βρείτε την ορμή και την κινητική ενέργεια του σώματος για t =10s.

β) Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη από t = 0 ως t =10s και να το συγκρίνετε με την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας από το ερώτημα (α).

Β. Ένα σώμα ακίνητο ανατινάζεται και σπάει σε τρία κομμάτια. Τα δύο κομμάτια έχουν ίσες μάζες και κινούνται με ταχύτητες μέτρου 30m/s σε κατευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους. Το τρίτο κομμάτι έχει τριπλάσια μάζα από το καθένα από τα άλλα δύο κομμάτια Να βρείτε την διεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητας του τρίτου κομματιού.

Α. Λύση

$\alpha) \vec{F} = 5t\vec{i} + (3t^2 - 1)\vec{j}$

$F_x = 5t, F_y = 3t^2 - 1,$

Αρχικές συνθήκες: $t = 0, \vec{r} = \vec{0}, \vec{v} = \vec{0}$

Ο 2ος Νόμος του Newton δίνει:

$F_x = \mathrm{m}a_x, F_y = ma_y$

Οπότε προκύπτει:

$$\mathrm{a}_x = \frac{F_x}{m} = \frac{5t}{m}, \mathrm{a}_y = \frac{F_y}{m} = \frac{3t^2 - 1}{m}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{5t}{10} \Rightarrow \int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t \frac{t}{2} dt \Rightarrow v_x = \frac{t^2}{4}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{3t^2 - 1}{10} \Rightarrow \int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t \frac{3t^2 - 1}{10} dt \Rightarrow v_y = \frac{t^3 - t}{10}$$

Με αντικατάσταση:

$$t = 10s, v_{10x} = 25m/s, v_{10y} = 99m/s, v_{10}^2 = v_{10x}^2 + v_{10y}^2 = 10426(m/s)^2 \ (1)$$

Η ορμή θα είναι:

$$\overrightarrow{P_{10}} = m(v_{10x}\vec{i} + v_{10y}\vec{j}) = (250\vec{i} + 990\vec{j})kgm/s,$$

και $|\overrightarrow{P_{10}}| = 1021 kgm/s, \tan\theta = \dfrac{P_y}{P_x} = \dfrac{990}{250} \Rightarrow \theta = 75.8^o$

Η κινητική ενέργεια από (1) είναι ίση με:

$$K_{10} = \frac{1}{2} m v_{10}^2 = \frac{1}{2} 10 \ x \ 10426J = 52130J$$

$$\beta) W = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_0^{10} (\vec{F} \bullet \vec{v}) dt = \int_0^{10} (F_x v_x + F_y v_y) dt = \int_0^{10} [5t \frac{t^2}{4} + (3t^2 - 1)\frac{t^3 - t}{10}] dt = \int_0^{10} (\frac{6t^5 + 17t^3 + 2t}{20}) dt =$$

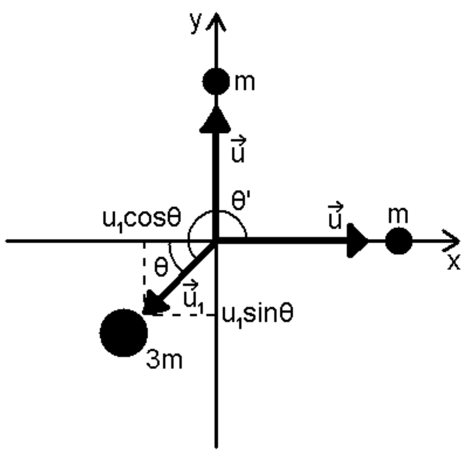
$$= (\frac{t^6}{20} + \frac{17t^4}{80} + \frac{t^2}{20})_0^{10} = 52130J$$

$$\Delta\mathrm{K} = K_{10} - K_0 = K_{10} - 0 = K_{10} = 52130J$$

$$W = \Delta\mathrm{K}$$

Η τελευταία σχέση είναι το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας.

<u>B. Λύση</u>



Έστω m και v η μάζα και η ταχύτητα των δύο κομματιών αντίστοιχα και 3m και v_1 η μάζα και ταχύτητα του τρίτου κομματιού. Οι ταχύτητες των δύο ίσων κομματιών βρίσκονται επί των θετικών ημιαξόνων x και y αντίστοιχα, ενώ η ταχύτητα του τρίτου κομματιού σχηματίζει γωνία θ με τον αρνητικό x. Από την εφαρμογή του θεωρήματος διατήρησης της ορμής στους δύο άξονες έχουμε:

$$x: mv - 3mv_1\cos\theta = 0 \Rightarrow 3v_1\cos\theta = v \qquad (1)$$
$$y: mv - 3mv_1\sin\theta = 0 \Rightarrow 3v_1\sin\theta = v \qquad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει ότι :
tanθ=1, άρα $\theta=45^o$
Η γωνία μεταξύ της v_1 και του θετικού ημιάξονα x θα είναι $\theta'=180^o+45^o=\underline{225^o}$.
Ακολούθως, υψώνοντας στο τετράγωνο τις (1) και (2) και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$9v_1^2 = 2v^2 \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}v$$

Αντικαθιστώντας v=30m/s, έχουμε $v_1=10\sqrt{2}$ m/s=14.1m/s.

ΘΕΜΑ 5

Α. Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος έχει μάζα M=2.5 kg, ακτίνα R=0.8 m και περιστρέφεται χωρίς τριβές με συχνότητα f_0=10/π Hz, σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Από ύψος h=0.8 m πάνω από το δίσκο αφήνεται ελεύθερα να πέσει σημειακή μάζα m=0.8 kg, συγκρούεται με το δίσκο και κολλά σε σημείο που απέχει από το κέντρο του Κ απόσταση d. Η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα ως προς τον άξονα περιστροφής διαφέρει από τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον ίδιο άξονα κατά 0.2 kg m^2. Να υπολογίσετε:

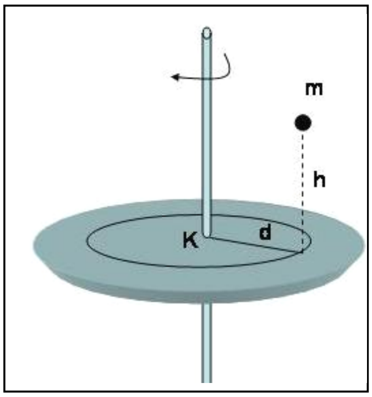
α).τη στροφορμή του δίσκου (μέτρο και φορά) πριν κολλήσει η σημειακή μάζα.

β) το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σημειακής μάζας μετά την προσκόλλησή της στο δίσκο.

γ) την απώλεια ενέργειας λόγω της κρούσης των δύο σωμάτων.

δ) τη μεταβολή της στροφορμής του δίσκου εξαιτίας της πτώσης της σημειακής μάζας.

Ο δίσκος παραμένει οριζόντιος πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την κρούση. Δίδεται η ροπή αδράνειας του δίσκου $I=\frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.



Β. Μία σφαίρα, ένας κύλινδρος και ένας δακτύλιος που έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα, αφήνονται ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος κεκλιμένου επιπέδου και χωρίς αρχική ταχύτητα. Αν θεωρήσουμε ότι τα τρία σώματα κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν, ποιο από τα τρία σώματα θα φθάσει πρώτο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της σφαίρας $I_{\Sigma} = 2mR^2/5$, του κυλίνδρου $I_{K} = mR^2/2$ και του δακτυλίου $I_{\Delta} = mR^2$ ως προς άξονες που διέρχονται από το κέντρο μάζας τους.

Α) η σφαίρα
Β) ο κύλινδρος
Γ) ο δακτύλιος
Δ) και τα τρία σώματα ταυτόχρονα.

Α. Λύση

α) Το μέτρο της στροφορμής του δίσκου υπολογίζεται από τη σχέση:

$L_{\delta(\alpha\rho\chi)} = \mathrm{I}_{\delta} \cdot \omega_0$ (1)

όπου $\mathrm{I}_{\delta} = \frac{1}{2}MR^2 = 0.8\ \mathrm{kgm^2}$ η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του και $\omega_0 = 2\pi f_0 = 20\ \mathrm{rad/s}$ η αρχική γωνιακή ταχύτητά του.
Αντικαθιστώντας τα παραπάνω μεγέθη στη σχέση (1) έπεται ότι :
$L_{\delta(\alpha\rho\chi)} = \mathrm{I}_{\delta} \cdot \omega_0 = 16\ \mathrm{kgm^2/s}$

Εφόσον ο δίσκος περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού η φορά της στροφορμής του είναι προς τα κάτω.

β) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σημειακής μάζας μετά την προσκόλλησή της στο δίσκο δίδεται από τον τύπο:

$u_m = \omega_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot d$ (2), όπου $\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$ η τελική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα η οποία μπορεί να υπολογιστεί από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα δίσκος-σημειακή μάζα. Πράγματι:

$$\vec{L}_{(\alpha\rho\chi)} = \vec{L}_{(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow \vec{L}_{\delta(\alpha\rho\chi)} + \vec{L}_{m(\alpha\rho\chi)} = \vec{L}_{(\tau\varepsilon\lambda)} \quad (3)$$

Δεδομένου ότι πριν την κρούση η σημαιακή μάζα κινείται παράλληλα ως προς τον άξονα περιστροφής, δεν έχει στροφορμή ως προς αυτόν τον άξονα, άρα:

$$\vec{L}_{\delta(\alpha\rho\chi)} = \vec{L}_{(\tau\varepsilon\lambda)} = I_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot \omega_{\tau\varepsilon\lambda} \quad (4),$$

όπου (σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης) $I_{\tau\varepsilon\lambda} = \mathrm{I}_{\delta} + 0.2\ \mathrm{kgm}^2 = 1\ \mathrm{kgm}^2$ είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα ως προς τον άξονα περιστροφής.

Άρα από τη σχέση (4) έπεται ότι: $\omega_{\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{\vec{L}_{\delta(\alpha\rho\chi)}}{I_{\tau\varepsilon\lambda}} = 16\ \mathrm{rad/s}$ (5)

Η απόσταση d της σύγκρουσης από το κέντρο του δίσκου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$I_{\tau\varepsilon\lambda} = I_{\delta} + md^2 \Rightarrow d = 0.5\ \mathrm{m}\ (6)$$

Με αριθμητική αντικατάσταση των (5) και (6) στη σχέση (2) προκύπτει ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σημειακής μάζας είναι:

$$u_m = \omega_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot d = 8\ \mathrm{m/s}$$

γ) Η απώλεια ενέργειας είναι:

$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = \mathrm{K}_{\alpha\rho\chi} - \mathrm{K}_{\tau\varepsilon\lambda}$ (7)

όπου $\mathrm{K}_{\alpha\rho\chi}$ και $\mathrm{K}_{\tau\varepsilon\lambda}$ η αρχική και η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα αντίστοιχα.

Η αρχική κινητική ενέργεια είναι:

$$\mathrm{K}_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}I_{\delta}\omega_0^2 = mu_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega_0^2 \quad (8),$$

όπου η ταχύτητα u_1 της σημειακής μάζας υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$u_1 = gt$ (9) και $h = \dfrac{1}{2}gt^2$ (10).

Μετά την κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$\mathrm{K}_{\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{1}{2}I_{\tau\varepsilon\lambda}\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 = 128\ \mathrm{J}$ (11)

Από τις σχέσεις (8), (9) , (10) και (11) έπεται ότι η απώλεια ενέργειας είναι:

$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = \mathrm{K}_{\alpha\rho\chi} - \mathrm{K}_{\tau\varepsilon\lambda}$ =38.4 J

Δ) Η μεταβολή της στροφορμής είναι (αλγεβρικά):
$\Delta L_\delta = L_{\delta(\tau\varepsilon\lambda)} - L_{\delta(\alpha\rho\chi)} = \mathrm{I}_\delta \cdot \omega_{\tau\varepsilon\lambda} - \mathrm{I}_\delta \cdot \omega_o = -3.2\ \mathrm{kgm^2/s}$
δηλαδή (αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω) το διάνυσμα $\Delta\vec{L}_\delta$ έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο $3.2\ \mathrm{kgm^2/s}$.

<u>**Β. Λύση**</u>

Επειδή τα σώματα κυλίονται χωρίς ολίσθηση, $\omega = \upsilon / R$, όπου υ η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Άρα για κάθε ένα ισχύει:

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$
$$\Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda mR^2\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 \Rightarrow mgh = \left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)(1+\lambda)$$

$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}} \qquad (1)$$

όπου $I = \lambda mR^2$ η ροπή αδράνειας του σώματος.

Επομένως η ταχύτητα του κέντρου μάζας κάθε σώματος στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι:

$$\upsilon_\Sigma = \sqrt{\frac{10}{7}gh}, \quad \upsilon_K = \sqrt{\frac{4}{3}gh}, \quad \upsilon_\Delta = \sqrt{gh}$$

Άρα πρώτη στη βάση θα φθάσει η σφαίρα.

Επομένως σωστή είναι η απάντηση Α.