Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (27-7-2008)
Ηλεκτρομαγνητισμός

Ονοματεπώνυμο

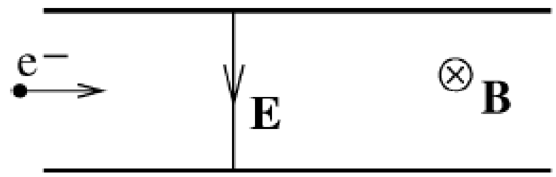
Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. Σφαιρίδιο μάζας $m_1 = 22\ \ 10^{-5}$ kg φορτισμένο με θετικό φορτίο $q_1 = 11\ \ 10^{-7}$ C βάλλεται μετωπικά με αρχική ταχύτητα $υ_o$= 30 m/s προς δεύτερο σφαιρίδιο με μάζα $m_2=2\ m_1$ και φορτίο $q_2=2\ q_1$ που είναι αρχικά ακίνητο σε απόσταση d=2m από το πρώτο. Αν τα σφαιρίδια βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο, λείο και μονωτικό επίπεδο, να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση L στην οποία θα πλησιάσουν. Δίνεται Κ =1/(4π $ε_o$)~ 9 x 10^9 Nm^2/C^2 (Θεωρήστε ότι τα κινούμενα φορτία δεν δημιουργούν ηλεκτρομαγνητικό πεδίο)

.

Β. Ένας πυκνωτής με επίπεδες παράλληλες πλάκες (στο κενό) τοποθετείται σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ και μέτρου B=0.1 T με διεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο πυκνωτής έχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$ και μέτρου $E=10^5$V/m. Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται στον πυκνωτή με ταχύτητα μέτρου 3 x 10^6 m/s, κάθετα στο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Ποιά είναι η συνολική δύναμη (μέτρο και διεύθυνση) που ασκείται πάνω στο ηλεκτρόνιο όταν εισέρχεται στον πυκνωτή;
β. Εάν μπορούσαμε να αλλάξουμε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού ή/και του μαγνητικού πεδίου , θα μπορούσε το ηλεκτρόνιο να εξακολουθήσει να κινείται κατά μήκος του άξονα x; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ
Α. Οι δυνάμεις στα σφαιρίδια είναι απωστικές. Έτσι το σώμα μάζας m_1 επιβραδύνεται και το σώμα μάζας m_2 επιταχύνεται. Κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους θα γίνουν ίσες $υ_1=υ_2=υ$. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται και επειδή δεν ασκούνται εξωτερκές δυνάμεις διατηρείται και η ορμή. Άρα

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

οπότε

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + K\frac{q_1q_2}{d} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_1^2 + K\frac{q_1q_2}{L} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 + K\frac{2q_1^2}{d} = \frac{3}{2}m_1\upsilon^2 + K\frac{2q_1^2}{L} \qquad (1)$$

$m_1\upsilon_o = m_1\upsilon_2 + m_2\upsilon_2$ ή $m_1\upsilon_o = 3m_1\upsilon$ οπότε $\upsilon=\upsilon_o/3$

αντικαθιστώντας στην (1) και λύνοντας την εξίσωση ως προς L προκύπτει

$$L = \frac{6dKq_1^2}{dm_1\upsilon_o^2 + 6Kq_1^2} = 0.28m$$

Β. α) Έστω υ η ταχύτητα του ηλεκτρονίου.

Η ηλεκτρική δύναμη qE κατευθύνεται προς τα πάνω (το ηλεκτρόνιο έχει αρνητικό φορτίο) κι έχει μέτρο $F_E= (1.6 \times 10^{-19})\ 10^5 = 1.6 \times 10^{-14}$ N. Η μαγνητική δύναμη $q\vec{\upsilon} \times B$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο $F_B= (1.6 \times 10^{-19})\ (3\times 10^6)(0.1) = 4.8 \times 10^{-14}$ N. Επειδή $F_B > F_E$ η συνισταμένη δύναμη κατευθύνεται προς τα κάτω κι έχει μέτρο $F= F_B-F_E = 3.2 \times 10^{-14}$ N.

β) Για να εξακολουθήσει το ηλεκτρόνιο να κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων από τα δύο πεδία να είναι μηδέν , άρα θα πρέπει να μεταβάλλουμε τα μέτρα των εντάσεων των δύο πεδίων έτσι ώστε E= υ B. (Π.χ εάν αυξήσουμε το $E= 3\times 10^5$V/m ενώ διατηρούμε σταθερή την ένταση του μαγνητικού πεδίου τότε και οι δύο δυνάμεις θα έχουν μέτρο 4.8×10^{-14} N)

ΘΕΜΑ 2

Α. Δίνεται μονωτικός σφαιρικός φλοιός ακτίνας R_1 και R_2 με $R_1 < R_2$ ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο Q. Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται σε φορτίο q =Q/4

a. Στο κέντρο του φλοιού
b. Σε σημείο Α που απέχει απόσταση $r=2\ R_2$
c. Σε σημείο Β που απέχει απόσταση $R_1<r< R_2$

ΛΥΣΗ

a. στο κέντρο όπου r=0 επειδή δεν υπάρχει φορτίο από το νόμο του Gauss E=0 κι άρα και F=0.

b. για $r=2\ R_2$ κατασκευάζουμε μια νοητή σφαιρική επιφάνεια Gauss με ακτίνα $r=2\ R_2$ Αυτή περικλείει το φορτίο Q του μονωτικού σφαιρικού φλοιού οπότε από το νόμο του Gauss

$$\oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi(2R_2)^2\varepsilon_o} = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_o R_2{}^2}$$

κι άρα η δύναμη στο φορτίο q θα είναι $F = qE = \frac{Q}{4}\frac{Q}{16\pi\varepsilon_o R_2{}^2} = \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_o R_2{}^2}$

c. Για $R_1<r< R_2$ το περικλειόμενο φορτίο της νοητής σφαιρικής επιφάνειας Gauss με ακτίνα r θα είναι $q_{\varepsilon\sigma} = \int \rho dV = \int_{R_1}^{r} \rho 4\pi r^2 dr = \rho 4\pi \int_{R_1}^{r} r^2 dr = \rho\frac{4\pi\ \ r^3 - R_1^3}{3}$ οπότε από το νόμο του Gauss

$$E=\frac{q_{\varepsilon\sigma}}{4\pi r^2\varepsilon_o}=\frac{\rho\dfrac{4\pi\;\;r^3-R_1^3}{3}}{4\pi r^2\varepsilon_o}=\frac{\rho\;\;r^3-R_1^3}{3r^2\varepsilon_o}$$

αλλά στην περίπτωση συνεχούς κατανομής φορτίου $\rho=\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi\;\;R_2^3-R_1^3}$

$$\text{Άρα}\;\;E=\frac{\rho\;\;r^3-R_1^3}{3r^2\varepsilon_o}=\frac{\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi\;\;R_2^3-R_1^3}\;\;r^3-R_1^3}{3r^2\varepsilon_o}=\frac{Q\;\;r^3-R_1^3}{4\pi\varepsilon_o\;\;R_2^3-R_1^3\;\;r^2}$$

$$\text{Και}\;\;F=\frac{Q}{4}\frac{Q\;\;r^3-R_1^3}{4\pi\varepsilon_o\;\;R_2^3-R_1^3\;\;r^2}=\frac{Q^2\;\;r^3-R_1^3}{16\pi\varepsilon_o\;\;R_2^3-R_1^3\;\;r^2}$$

Β. Κυκλικός αγωγός έχει ακτίνα r=0.4 m και ωμική αντίσταση ΔR/Δr =0.4 Ω/m. Ο αγωγός βρίσκεται με το επίπεδό του κάθετο στις γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Δίνεται ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τη σχέση B=0.4+2t (B σε Tesla, t σε sec). Να υπολογιστούν
α) Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό.
β) ο ρυθμός με τον οποίο το μαγνητικό πεδίο παρέχει ενέργεια στον αγωγό.

ΛΥΣΗ

α) Αφού το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται στον αγωγό δημιουργείται επαγωγική τάση με μέτρο

$$E=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{\Delta(BS)}{\Delta t}=S\frac{\Delta B}{\Delta t}=\pi r^2\frac{\Delta B}{\Delta t}=2\pi r^2$$

κι επειδή αποτελεί κλειστό κύκλωμα διαρρέεται από επαγωγικο ρεύμα έντασης

$$I_{\varepsilon\pi}=\frac{E}{R}=\frac{2\pi r^2}{R}$$

Αλλά R= (ΔR/Δr) l = (ΔR/Δr) 2πr

$$\text{Άρα}\;I_{\varepsilon\pi}=\frac{2\pi r^2}{2\pi r\dfrac{\Delta R}{\Delta r}}=\frac{r}{\dfrac{\Delta R}{\Delta r}}=1\text{A}$$

β) Ο ρυθμός με τον οποίο το μαγνητικό πεδίο παρέχει ενέργεια στον αγωγό θα είναι ίσος με την ισχύ που δαπανάται σ΄αυτόν αφού η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα.

$$\frac{\Delta W}{\Delta t}=I_{\varepsilon\pi}^2R=I_{\varepsilon\pi}^2\frac{\Delta R}{\Delta t}2\pi r=1^2 0.4\;2\pi\;0.4=0.32\pi\text{W}$$