Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α . Να βρεθεί ένα διάνυσμα κάθετο προς το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία P(1,4,6), Q(-2,5,-1) και R(1,-1,1).

Β. Για ποιους πραγματικούς αριθμούς α το ακόλουθο ομογενές σύστημα

x - 2y + 3z = 0
αx + 3y + 2z = 0
6x + y + αz = 0

έχει μη τετριμμένη λύση ; Να λυθεί το σύστημα γι αυτές τις τιμές του α.

ΛΥΣΗ

Α. Το διάνυσμα $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ είναι κάθετο και προς το $\overrightarrow{PQ}$ και προς το $\overrightarrow{PR}$ και συνεπώς είναι κάθετο στο επίπεδο στο οποίο βρίσκονται τα σημεία P, Q και R. Αλλά:

$\overrightarrow{PQ} = (-2-1)\hat{\imath} + (5-4)\hat{\jmath} + (-1-6)\hat{k} = -3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 7\hat{k}$

$\overrightarrow{PR} = (1-1)\hat{\imath} + (-1-4)\hat{\jmath} + (1-6)\hat{k} = -5\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

Οπότε

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-5-35)\hat{\imath} - (15-0)\hat{\jmath} + (15-0)\hat{k} = -40\hat{\imath} - 15\,\hat{\jmath} + 15\,\hat{k}$$

Το διάνυσμα (-40, -15, 15) είναι κάθετο στο δεδομένο επίπεδο, όπως κάθετο είναι και οποιοδήποτε μη μηδενικό βαθμωτό πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιό του, όπως π.χ. (-8,-3,3)

Β. Επειδή το σύστημα είναι ομογενές οι Δ_x, Δ_y και Δ_z είναι μηδέν. Συνεπώς για να υπάρχει μη τετριμμένη λύση πρέπει Δ = 0 επίσης:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ a & 3 & 2 \\ 6 & 1 & a \end{vmatrix} = (3a-2) + 2(a^2-12) + 3(a-18) = 3a - 2 + 2a^2 - 24 + 3a - 54 =$$

$$= 2a^2 + 6a - 80$$

Οι ρίζες της εξισώσεως είναι α = 5 και α = -8. Γι αυτές τις τιμές το σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση.

Για α=-8, το σύστημα γίνεται

x - 2y + 3z = 0
-8x + 3y + 2z = 0
6x + y - 8z = 0.

Η λύση είναι $x = z$, $y = 2z$ με το z αυθαίρετο.
Για α= 5, το σύστημα γίνεται
$x - 2y + 3z = 0$
$5x + 3y + 2z = 0$
$6x + y + 5z = 0$.
Η λύση είναι $x = -z$, $y = z$ με το z αυθαίρετο.

ΘΕΜΑ 2

Α. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις f που ικανοποιούν την σχέση

$$\int_0^x f(x)\,dx = \left(f(x)\right)^2 + C$$

όπου C είναι μια σταθερά

Β. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \left(e^{2x} + x^2\right)^{1/x}$

Γ. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x\ln x}$

ΛΥΣΗ

Α. Με παραγώγιση παίρνουμε $f(x) = 2f(x)f'(x)$ και επομένως $f'(x) = \dfrac{1}{2}$. Άρα θα πρέπει $f(x) = \dfrac{1}{2}x + D$ όπου D είναι μια σταθερά.

Β. Λογαριθμίζοντας παίρνουμε

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\left(e^{2x} + x^2\right)$$

και με παραγώγιση των δύο μερών έχουμε

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\ln\left(e^{2x}+x^2\right) + \frac{1}{x}\frac{1}{e^{2x}+x^2}\left(2e^{2x}+2x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(e^{2x}+x^2\right)^{1/x}\left(-\frac{\ln\left(e^{2x}+x^2\right)}{x_2} + \frac{1}{x}\frac{\left(2e^{2x}+2x\right)}{e^{2x}+x^2}\right)$$

Γ. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 3x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L’Hospital

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x\ln x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}(x^2+3x+1)}{\frac{d}{dx}(x\ln x)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x(1)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{1+\ln x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}2x+3}{\frac{d}{dx}1+\ln x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}2x\\
&=+\infty
\end{aligned}
$$

όπου και πάλι πριν την εφαρμογή του κανόνα του L'Hospital ελέγξαμε ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+3=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\ln x=+\infty$

ΘΕΜΑ 3

Α. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{3x^4-4x^3-19x^2+31x-12}{x^3-x^2-8x+12}dx$

Β. Να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης :

$3x^{1/3}+5y^{1/3}=8$ στο σημείο (1,1)

ΛΥΣΗ

.

Α. $\int\frac{3x^4-4x^3-19x^2+31x-12}{x^3-x^2-8x+12}dx$

$$\frac{3x^4-4x^3-19x^2+31x-12}{x^3-x^2-8x+12}=3x-1+\frac{4x^2-13x}{x^3-x^2-8x+12}$$

Επειδή,

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 12x + 4x + 12 = x^2(x+3) - 4x(x+3) + 4(x+3) =$$

$$(x+3)(x^2 - 4x + 4) = (x+3)(x-2)^2$$

έχουμε

$$\frac{4x^2 - 13x}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \frac{4x^2 - 13x}{(x+3)(x-2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

και επομένως λαμβάνουμε την ταυτότητα

$$4x^2 - 13x = A(x-2)^2 + B(x+3)(x-2) + C(x+3)$$

Στη συνέχεια, όταν θέσουμε στην (1)

$x = -3, x = 2, x = 0$, βρίσκουμε

$36 + 39 = 25A, 16 - 26 = 5C, 0 = 4A - 6B + 36$, δηλαδή

$A = 3, | C = -2, B = 1$, και κατά συνέπεια

$$\int \frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 31x - 12}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx = \int (3x-1)dx + \int \frac{3dx}{x+3} + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{2dx}{(x-2)^2} =$$
$$\frac{3}{2}x^2 - x + 3\log|x+3| + \log|x-2| + \frac{2}{x-2}$$

B.

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 5 \cdot \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx}\left(\frac{5}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right) &= -x^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{5}{3}y^{-\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Άρα στο (1,1)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{5}{3}y^{-\frac{2}{3}}} = \frac{-(1)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{5}{3}(1)^{-\frac{2}{3}}} \\ &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Άρα η εφαπτομένη στο (1,1) έχει εξίσωση y-1=(-3/5) (x-1)