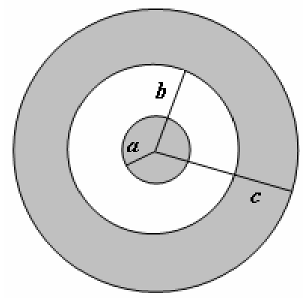
ΘΕΜΑ 1

Μια συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας α και φορτίου Q έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ρ. Η σφαίρα βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία και περιβάλλεται από αρχικώς αφόρτιστο αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c, ομόκεντρο με τη σφαίρα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



A. Να βρεθεί η κατανομή του φορτίου ανά μονάδα επιφάνειας στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους

B. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στις περιοχές $r<\alpha$, $\alpha<r<b$, $b<r<c$, $r>c$.

C. Να βρεθεί η διαφορά δυναμικού ΔV

   a. μεταξύ ενός σημείου της εξωτερικής επιφάνειας της σφαίρας και ενός σημείου της εσωτερικής επιφάνειας του φλοιού

   b. μεταξύ ενός σημείου της εξωτερικής επιφάνειας της σφαίρας και ενός σημείου της εξωτερικής επιφάνειας του φλοιού.

ΛΥΣΗ

A. γνωρίζουμε ότι στο εσωτερικό ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό. Άρα εάν κατασκευάσουμε μια γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας $b<r<c$ αφού $E=0$ θα είναι και $q_{\varepsilon\sigma}=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στην εσωτερική επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους θα πρέπει να επάγεται φορτίο q_1 τέτοιο ώστε το συνολικό φορτίο που θα περικλείεται από την γκαουσιανή να είναι μηδέν δηλαδή

$Q+ q_1 =0$

Άρα η κατανομή του φορτίου ανά μονάδας επιφάνειας θα είναι $\sigma_1= q_1/ 4\pi b^2$ = **$-Q/4\pi b^2$**

Εάν q_2 είναι το φορτίο που επάγεται στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους, αφού το κέλυφος είναι αφόρτιστο θα πρέπει

$q_1+ q_2 =0$

Άρα η κατανομή του φορτίου ανά μονάδας επιφάνειας θα είναι $\sigma_2= q_1/ 4\pi c^2$ = **$Q/4\pi c^2$**

B) Για $r<\alpha$ επιλέγουμε γκαουσιανή επιφάνεια ομόκεντρη με τη σφαιρική κατανομή φορτίου ακτίνας $r<\alpha$.Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss

$$\oint E dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_o}$$

Εάν ο όγκος της γκαουσιανής σφαίρας είναι V' τότε $q_{\varepsilon\sigma}$=ρ V'=$\frac{4}{3}\pi r^3$ όπου ρ=$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3}$. Άρα

$$E = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} r = \frac{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3}}{3\varepsilon_o} r = \frac{kQ}{\alpha^3} r$$

Για α<r<b

Επιλέγουμε γκαουσιανή επιφάνεια ομόκεντρη με τη σφαιρική κατανομή φορτίου ακτίνας α<r<b. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss $\oint E dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$.

Άρα $E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = k\frac{Q}{r^2}$

Για $b \le r \le c$ από (α) ερώτημα Ε=0 μέσα σε αγωγό

Για r>c δηλαδή στην έξω από τις δύο σφαίρες περιοχή μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια εγκλωβίζει $q_{\varepsilon\sigma}$=Q. Άρα το πεδίο είναι το ίδιο με της περιοχής α<r<b

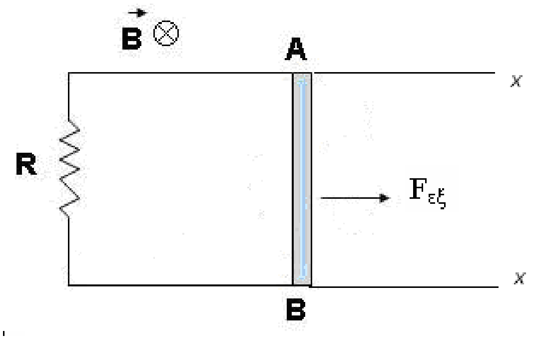
Άρα $E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = k\frac{Q}{r^2}$

C) Το δυναμικό σε ένα σημείο στο εσωτερικό του φλοιού Β θα είναι το ίδιο με το δυναμικό της επιφάνειάς του αφού κάθε σημείο ενός φορτισμένου αγωγού που ισορροπεί ηλεκτροστατικά έχει το ίδιο δυναμικό. Άρα τα ερωτήματα (α) και (β) είναι ίδια.

ΔV =Άρα V_B= k $\Delta V = \int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\alpha}\right)$

ΘΕΜΑ 2

Ο ευθύγραμμος αγωγός ΑΒ του σχήματος έχει μήκος l=1m, μάζα m=0.2 kg, αντίσταση R_1=4 Ω και είναι αρχικά ακίνητος με τα άκρα του σε επαφή με δύο μεταλλικούς



οδηγούς Αx και Βx μεγάλου μήκους και αμελητέας αντίστασης που σχηματίζουν οριζόντιο επίπεδο. Τα άκρα Α και Β των δύο μεταλλικών οδηγών συνδέονται με τα άκρα ενός αντιστάτη που έχει αντίσταση R=1 Ω. Από κάποια στιγμή και μετά ασκούμε στον αγωγό ΑΒ σταθερή δύναμη μέτρου $F_{εξ}$=2N με διεύθυνση που είναι παράλληλη στους δύο οδηγούς οπότε ο αγωγός αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά χωρίς τριβές. Ολόκληρη η διάταξη βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B=1T.

a) Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα που αποκτά ο αγωγός ΑΒ.

b) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΑΒ τη στιγμή που το μέτρο της επιτάχυνσής του ισούται με α=5m/s^2.

c) Να υπολογίσετε τη θερμική ισχύ που καταναλώνει ο αντιστάτης R_1 τη χρονική στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΑΒ ισούται με $υ_1$=8 m/s.

d) Να εξηγήσετε τι είδους ενεργειακές μετατροπές συμβαίνουν κατά τη διάρκεια κίνησης του αγωγού ΑΒ.

__ΛΥΣΗ__

Ο αγωγός υπό την επίδραση της $F_{εξ}$ κινείται προς τα δεξιά και αναπτύσσεται στα άκρα του ΗΕΔ από επαγωγή οπότε το κλειστό κύκλωμα διαρρέεται από την $F_{εξ}$. Ισχύουν

$$E_{\varepsilon\pi} = \mathrm{B}\upsilon l$$

$$i_{\varepsilon\pi} = \frac{\mathrm{B}\upsilon l}{R_1 + R}$$

$$F_L = \frac{\mathrm{B}^2\upsilon l^2}{R_1 + R} \quad \Sigma F = F_{\varepsilon\xi} - \frac{\mathrm{B}^2\upsilon l^2}{R_1 + R}$$

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m}$$

α) Ο αγωγός ΑΒ εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που μειώνεται κατά μέτρο και αποκτά οριακή ταχύτητα τη στιγμή που μηδενίζεται η ΣF

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = \frac{\mathrm{B}^2\upsilon l^2}{R_1 + R}$$

Άρα $\upsilon_{o\rho} = \dfrac{F_{\varepsilon\xi}\left(R_1 + R\right)}{\mathrm{B}^2 l^2} = 10m/s$

β)

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} - \frac{\mathrm{B}^2\upsilon l^2}{R_1 + R} = m\vec{\alpha}$$

$$\upsilon = \frac{\left(F_{\varepsilon\xi} - m\alpha\right)\left(R_1 + R\right)}{\mathrm{B}^2 l^2} = 5m/s$$

γ) $i_{\varepsilon\pi} = \dfrac{\mathrm{B}\upsilon_1 l}{R_1 + R} = 1.6A$

$P_{R_1} = i_{\varepsilon\pi}^2 R_1 = 10.24W$

δ) Μέχρι να αποκτήσει ο αγωγός την οριακή του ταχύτητα, η δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ παρέχει ενέργεια στον αγωγό ΑΒ, ένα μέρος της οποίας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του αγωγού και το υπόλοιπο σε θερμότητα πάνω στις αντιστάσεις του κλειστού κυκλώματος.

Όταν αποκτήσει ο αγωγός την οριακή του ταχύτητα όλη η ενέργεια που παρέχει η δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ μετατρέπεται σε θερμότητα στις αντιστάσεις γιατί η κινητική ενέργεια του αγωγού παραμένει σταθερή.