ΘΕΜΑ 1

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=\left(\lambda^2,1,\lambda\right),\vec{b}=\left(1,1,1\right)$. Να βρεθούν όλες οι τιμές του λ ώστε το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ να έχει αλγεβρική τιμή 1. Για τις τιμές αυτές του λ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει πλευρές τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ καθώς και το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Λύση

Θα πρέπει $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda+1=1\Rightarrow\lambda\left(\lambda+1\right)=0\Rightarrow\lambda=-1$ η $\lambda=0$.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \lambda^2&1&\lambda\\ 1&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|(1-\lambda)\hat{i}-(\lambda^2-\lambda)\hat{j}+(\lambda^2-1)\hat{k}\right|$$

για λ= -1 $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\left|2i-2j\right|=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ ή

για λ=0 $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\left|i-k\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Για την γωνιά θ μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ έχουμε

για λ=0 $\quad cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{1}{1\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ και

για λ=-1 $\quad cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

Β. Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων $\left\{\begin{matrix}x-2y=1\\ ax+by=5\end{matrix}\right\}$. Να βρεθούν οι συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούνται για τα $a,b\in R$ ώστε το σύστημα να έχει:

a. Μία μόνο λύση
b. Άπειρες λύσεις
c. Καμία λύση

Για τις περιπτώσεις (a) και (b) να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος

Λύση

Καταρχάς υπολογίζουμε τις ορίζουσες.

$$D=\begin{vmatrix}1&-2\\ a&b\end{vmatrix}=b+2a,\ D_x=\begin{vmatrix}1&-2\\ 5&b\end{vmatrix}=b+10,\ D_y=\begin{vmatrix}1&1\\ a&5\end{vmatrix}=5-a$$

I. Για να έχει μοναδική λύση θα πρέπει $b+2a\neq 0$. Η λύση είναι:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{b+10}{b+2a},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{5-a}{b+2a}$$

II. Για να έχει άπειρες λύσεις θα πρέπει $D=D_x=D_y=0$ Δηλαδή $a=5, b=-10$. Το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{matrix} x-2y=1 \\ 5x-10y=5 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x-2y=1 \\ 5(x-2y)=5 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x-2y=1$$

Οι λύσεις είναι της μορφής $(x,y)=(1+2y,y)$ με $y\in R$

Για να μην έχει λύση θα πρέπει $b+2a=0$ και $5-a\neq 0\Rightarrow a\neq 5$ (επομένως $b\neq -10$).

Πράγματι το σύστημα γίνεται: $\left\{\begin{matrix} x-2y=1 \\ ax-2ay=5 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x-2y=1 \\ a(x-2y)=5 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x-2y=1 \\ x-2y=5/\alpha \end{matrix}\right\}$

ΘΕΜΑ 2

Α. Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $\frac{\ln x}{x^2}$, β) $e^{\cos x}$, γ) $\left(\ln\frac{1}{x}\right)\sin x$, δ) $\cos\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

Β. Έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις

$\vec{u}(t)=t\hat{i}+t^2\hat{j}+t^3\hat{k}$ και $\vec{v}(t)=\frac{1}{t}\hat{i}+\frac{1}{t^2}\hat{j}+\frac{1}{t^3}\hat{k}$

Να υπολογισθούν οι παρακάτω παράγωγοι

α) $\frac{d}{dt}(\vec{u}-\vec{v})$, β) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v})$, γ) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})$

Λύση

Α.

α) $$\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(\ln x)'x^2-(x^2)'\ln x}{x^4}=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

β) $$\left(e^{\cos x}\right)'=e^{\cos x}(\cos x)'=-e^{\cos x}\sin x$$

γ) $$\left(\ln\frac{1}{x}\sin x\right)'=\left(\ln\frac{1}{x}\right)'\sin x+\ln\frac{1}{x}(\sin x)'=\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'\sin x+\ln\frac{1}{x}\cos x$$

$$=x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin x+\ln\frac{1}{x}\cos x=-\frac{1}{x}\sin x+\ln\frac{1}{x}\cos x$$

δ) $\left[\cos\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]' = -\sin\left(\frac{\ln x}{x}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = -\sin\left(\frac{\ln x}{x}\right)\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2}$

$= -\sin\left(\frac{\ln x}{x}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}$

Β. <u>Λύση</u>

α) $\vec{u} - \vec{v} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k} - \frac{1}{t}\hat{i} - \frac{1}{t^2}\hat{j} - \frac{1}{t^3}\hat{k} = \left(t - \frac{1}{t}\right)\hat{i} + \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)\hat{j} + \left(t^3 - \frac{1}{t^3}\right)\hat{k}$

Άρα $\frac{d}{dt}(\vec{u}-\vec{v}) = \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\hat{i} + \left(2t + \frac{2}{t^3}\right)\hat{j} + \left(3t^2 + \frac{3}{t^4}\right)\hat{k}$

$= \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\hat{i} + 2t\left(1+\frac{1}{t^4}\right)\hat{j} + 3t^2\left(1+\frac{1}{t^6}\right)\hat{k}$

β) $\vec{u}\cdot\vec{v} = t\frac{1}{t} + t^2\frac{1}{t^2} + t^3\frac{1}{t^3} = 1+1+1 = 3$. Άρα $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0$

γ) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t & t^2 & t^3 \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^3} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(t^2\frac{1}{t^3} - t^3\frac{1}{t^2}\right) - \hat{j}\left(t\frac{1}{t^3} - t^3\frac{1}{t}\right) + \hat{k}\left(t\frac{1}{t^2} - t^2\frac{1}{t}\right)$

$= \hat{i}\left(\frac{1}{t} - t\right) - \hat{j}\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + \hat{k}\left(\frac{1}{t} - t\right)$

Άρα $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \hat{i}\left(-\frac{1}{t^2} - 1\right) - \hat{j}\left(-\frac{2}{t^3} - 2t\right) + \hat{k}\left(-\frac{1}{t^2} - 1\right)$

$= -\hat{i}\left(\frac{1}{t^2}+1\right) + \hat{j}2t\left(\frac{1}{t^4}+1\right) - \hat{k}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)$

ΘΕΜΑ 3

Α. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται μεταξύ της ευθείας y=0 και της καμπύλης $y=1-x^2$.

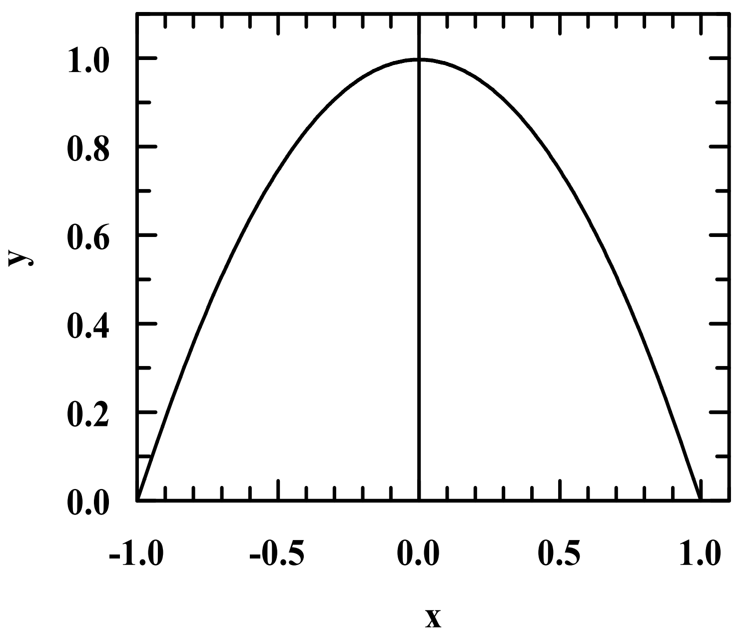
Β. Να υπολογιστούν τα κατωτέρω ολοκληρώματα:

α) $\int x^5 \ln x dx$ β) $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x(\ln x)^4}$ γ) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

ΛΥΣΗ

Α.) Η ευθεία y=0 είναι ο άξονας x'x. Εξισώνουμε $1-x^2=0 \Rightarrow x=-1, x=1$ που είναι τα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα x'x. Η συνάρτηση $y=1-x^2$ παραμένει θετική εντός του διαστήματος (-1, 1), οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=(1-\frac{1}{3})-(-1+\frac{1}{3})=\frac{2}{3}-(-\frac{2}{3})=\frac{4}{3}$$ τετραγωνικές μονάδες



Β.

α) $\int x^5 \ln x dx = I$ Θέτουμε $\ln x = u$ και εφαρμόζουμε την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

$$I=\int x^5 u dx=\frac{1}{6}\int u dx^6=\frac{1}{6}(ux^6-\int x^6 du)=\frac{1}{6}[x^6\ln x-\int x^6 d(\ln x)]=\frac{1}{6}(x^6\ln x-\int\frac{x^6}{x}dx)=$$
$$\frac{1}{6}(x^6\ln x-\int x^5 dx)=\frac{1}{6}(x^6\ln x-\frac{x^6}{6}+c)=\frac{x^6}{6}(\ln x-\frac{1}{6})+c_1$$

β) $\int_{e}^{e^3} \frac{dx}{x(\ln x)^4} = I$

Θέτουμε $\ln x = u \quad \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow dx = xdu$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_{e}^{e^3} \frac{dx}{x(\ln x)^4} = \int_{1}^{3} \frac{xdu}{x(u)^4} = \int_{1}^{3} \frac{du}{u^4} = \left[\frac{u^{-3}}{-4+1} \right]_1^3 = \left[-\frac{u^{-3}}{3} \right]_1^3 = \left[-\frac{1}{3u^3} \right]_1^3 = -\frac{1}{81} + \frac{1}{3} = \frac{26}{81}$$

<u>Σημείωση:</u> τα όρια της ολοκλήρωσης αλλάζουν με την αλλαγή της μεταβλητής.
Για x=e, u=lne=1 και για $x=e^3$, $u=\ln(e^3)=3\ln e=3$

γ) $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = I$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο ανάλυσης σε κλάσματα.

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$$
$$\frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} &A + B = 0, \\ &-(2A+B) = 1 \end{aligned}$$ και το σύστημα επιλύεται δίνοντας

$A = -1, B = 1$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$