Μαθηματικά (26-7-09)

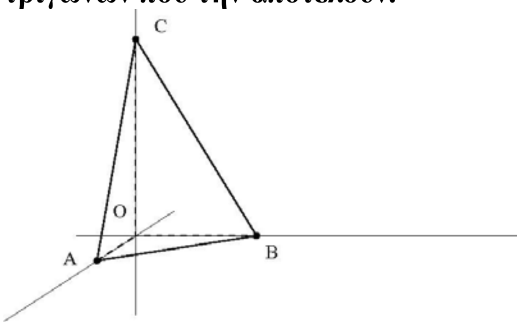
Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων $\left\{\begin{array}{c} x+2z=0 \\ x+3y+10z=0 \\ 6y+k^2z=0 \end{array}\right\}$**. Να διερευνηθεί στο σύστημα για τις διάφορες τιμές του** $k \in R$

Β. Δίνονται τα σημεία Ο(0,0,0), Α(1,0,0), Β(0,2,0) και C(0,0,3). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του τετραέδρου ΟΑΒC αθροίζοντας τα εμβαδά των τριγώνων που την αποτελούν.



ΛΥΣΗ

Α. Το σύστημα είναι ομογενές. Υπολογίζουμε την ορίζουσα :

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 10 \\ 0 & 6 & k^2 \end{vmatrix}=3\left(k^2-16\right)=3\left(k-4\right)\left(k+4\right)$$

- Αν $k \neq \pm 4$ τότε το σύστημα έχει τη μηδενική λύση
- Αν $k = \pm 4$ τότε το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2z=0 \\ x+3y+10z=0 \\ 6y+16z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2z=0 \\ x+3y+10z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z=-\frac{1}{2}x \\ y=\frac{4}{3}x \end{array}\right\}$$ Δηλαδή έχει άπειρες λύσεις

B.

Λύση: Έχουμε τα διανύσματα

$$\vec{a}=\vec{OA}=\hat{i}$$

$$\vec{b}=\vec{OB}=2\,\hat{j}$$

$$\vec{c}=\vec{OC}=3\,\hat{k}$$

$$\vec{d}=\vec{BC}=\vec{c}-\vec{b}=-2\,\hat{j}+3\,\hat{j}$$

$$\vec{e}=\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b}=\hat{i}-2\,\hat{j}$$

Τα εμβαδά των αντιστοίχων τριγώνων είναι:

$$(OAC)=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{c}|=\frac{1}{2}|-3\,\hat{j}|=\frac{3}{2}$$

$$(OBC)=\frac{1}{2}|\vec{c}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|-6\,\hat{i}|=3$$

$$(OBA)=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|2\,\hat{k}|=1$$

$$(ABC)=\frac{1}{2}|\vec{e}\times\vec{d}|=\frac{1}{2}|6\,\hat{i}+3\,\hat{j}-2\,\hat{k}|=\frac{3}{2}$$

Αθροίζοντας τα παραπάνω εμβαδά παίρνουμε το εμβαδόν της επιφάνειας του τετραέδρου να είναι ίσο με 9.

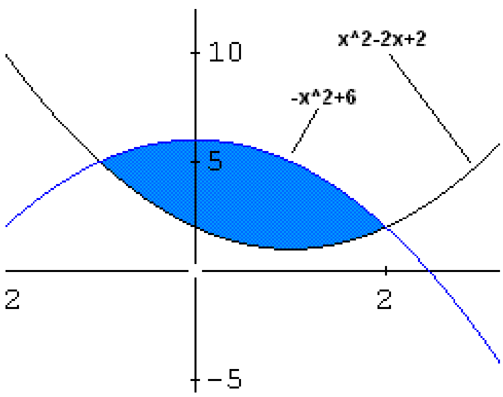
ΘΕΜΑ 2

Α. Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y=x^2-x+2$ και $y=-x^2+6$

Β. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα

α) $\int x^2\cos(3x)dx$ **β)** $\int \frac{9x^2-4x+12}{x^3-4x}dx$

Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση των δύο εξισώσεων και εξετάζουμε την περιοχή μεταξύ των δύο καμπύλων



Η περιοχή της οποίας ζητείται το εμβαδόν περιορίζεται από πάνω από την καμπύλη y=-x^2+6 και από κάτω από την καμπύλη y=x^2-x+2. Το αριστερό και δεξιό άκρο της περιοχής είναι τα σημεία τομής των δύο καμπυλών και βρίσκονται εξισώνοντας y=-x^2+6 και y=x^2-x+2 και λύνοντας ως προς x.

$$x^2 - x + 2 = -x^2 + 6 \Rightarrow 2x^2 - x - 4 = 0 \begin{cases} x = 1.69 \\ x = -1.19 \end{cases}$$

Μεταξύ των σημείων τομής η συνάρτηση f(x)=-x^2+6 είναι μεγαλύτερη ή ίση από την h(x)=x^2-x+2. Για να βρούμε το εμβαδόν A θα ολοκληρώσουμε την διαφορά των δύο συναρτήσεων με όρια της ολοκλήρωσης τα δύο σημεία τομής που βρήκαμε παραπάνω, x = -1 και x = 2.

$$A = \int_{-1.19}^{1.69} [f(x) - h(x)]dx = \int_{-1.19}^{1.69} [(-x^2 + 6) - (x^2 - x + 2)]dx$$

$$= \int_{-1.19}^{1.69} [-2x^2 + 2x + 4]dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1.19}^{1.69} = 7.9$$

B.

α) θέτω $u = x^2$ και dυ=cos (3x) τότε du =2xdx και υ=$\frac{1}{3}\sin(3x)$ οπότε

$$\int x^2 \cos(3x)dx =$$

$$\int u\, d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon\, du = x^2 \frac{1}{3}\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)2xdx = \frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\int \sin(3x)\ x\ dx$$

$$= \frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[x(-\frac{1}{3}\cos(3x) - \int(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right] = \frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\right] =$$

$$\frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)\right] = \frac{x^2}{3}\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\sin(3x) + c$$

β) x^3 - 4x =x (x^2-4) = x (x+2) (x-2) οπότε

$$\frac{9x^2 - 4x + 12}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$9x^2 - 4x + 12 = A(x^2 - 4) + Bx(x-2) + Cx(x+2) = A(x^2 - 4) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 + 2x) =$$

$$(A + B + C)x^2 + (-2B + 2C)x - 4A \quad \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$A + B + C = 9$$

$$-2B + 2C = -4$$

$$-4A = 12$$

άρα A=-3, B=7, C=5 οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{9x^2-4x+12}{x^3-4x} = \int \left(\frac{-3}{x}+\frac{7}{x+2}+\frac{5}{x-2}\right) = -3\int\frac{1}{x}+7\int\frac{1}{x+2}+5\int\frac{1}{x-2} =$$

$$-3\ln|x|+7\ln|x+2|+5\ln|x-2|+c$$

ΘΕΜΑ 3

Α. Να βρεθεί η παράγωγος y΄=dy/dx της $y=x^2 \sin^3(5x)$

Β. Αφού υπολογίσετε την παράγωγο y΄=dy/dx της συνάρτησης $y=x^x$ να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (x+3)^{x+3}\left(\ln(x+3)+1\right)dx$

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\boldsymbol{y = x^2 y^3 + x^3 y^2}$ στο σημείο (1,1).

ΛΥΣΗ

Α.

$$y' = x^2\ D\{\sin^3(5x)\} + D\{x^2\}\ \sin^3(5x) = x^2(3\sin^2(5x))\ D\{\sin(5x)\} + (2x)\sin^3(5x)$$
$$= 3x^2\sin^2(5x)\ \cos(5x)\ D\{5x\} + 2x\sin^3(5x)$$
$$= 3x^2\sin^2(5x)\ \cos(5x)\ (5) + 2x\sin^3(5x)$$

$$= 15x^2\sin^2(5x)\cos(5x) + 2x\sin^3(5x) = x\sin^2(5x)\left\{15x\cos(5x) + 2\sin(5x)\right\}$$

$B.\quad y=x^x \Rightarrow \ln y = \ln\left(x^x\right) \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow$

$$(\ln y)' = (x\ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x+1) \Rightarrow$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

Στο $\int (x+3)^{x+3}\left(\ln(x+3)+1\right)dx$ θέτω u=x+3 οπότε γίνεται

$$\int u^u(\ln u+1)\,du = u^u + c = (x+3)^{x+3} + c$$

Γ. Διαφορίζουμε και τις δύο πλευρές της εξίσωσης και παίρνουμε

$$D(y) = D\,(\,x^2y^3 + x^3y^2\,)\ ,$$

$$D(y) = D(x^2 y^3) + D(x^3 y^2),$$

$$y' = \{x^2 D(y^3) + D(x^2) y^3\} + \{x^3 D(y^2) + D(x^3) y^2\},$$

$$y' = \{x^2 (3y^2 y') + (2x) y^3\} + \{x^3 (2yy') + (3x^2) y^2\},$$

$$y' = 3x^2 y^2 y' + 2x y^3 + 2x^3 y y' + 3x^2 y^2,$$

Λύνουμε ως προς y΄

$$y' - 3x^2 y^2 y' - 2x^3 y y' = 2x y^3 + 3x^2 y^2,$$

$$y' [1 - 3x^2 y^2 - 2x^3 y] = 2x y^3 + 3x^2 y^2,$$

$$y' = \frac{2xy^3 + 3x^2y^2}{1 - 3x^2y^2 - 2x^3y}.$$

$$y' = \frac{2xy^3 + 3x^2y^2}{1 - 3x^2y^2 - 2x^3y}.$$

Στο (1,1) y΄=-5/4 άρα η εξίσωση εφαπτομένης στο (1,1) είναι

y-1 = (-5/4) (x-1)

Να απαντηθούν όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.