Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (25-7-09) **Μηχανική**

Ονοματεπώνυμο____

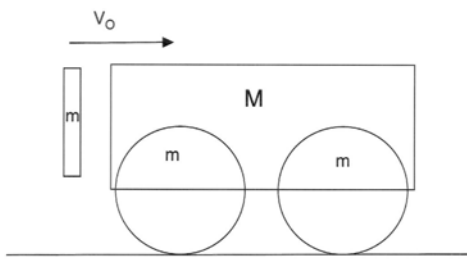
Τμήμα____

ΘΕΜΑ 1

Α. Ένα καροτσάκι αποτελείται από ένα κιβώτιο μάζας M το οποίο βρίσκεται πάνω σε 4 τροχούς. Κάθε τροχός είναι κύλινδρος ακτίνας R και μάζας m. Το καροτσάκι αρχικά είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο όταν το χτυπά ένα σώμα μάζας m που κινείται παράλληλα προς τον κύριο άξονα του καροτσιού και με φορά προς τα δεξιά έχοντας ταχύτητα υ_o όπως δείχνει το σχήμα. Μετά τη σύγκρουση το καροτσάκι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο ενώ το σώμα m προσκολλάται στο καροτσάκι

Δείξτε ότι ο λόγος της τελικής κινητικής ενέργειας του συστήματος K_f ως προς την αρχική K_i δίνεται από τη σχέση

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{7 + M/m}{(5 + M/m)^2}$$

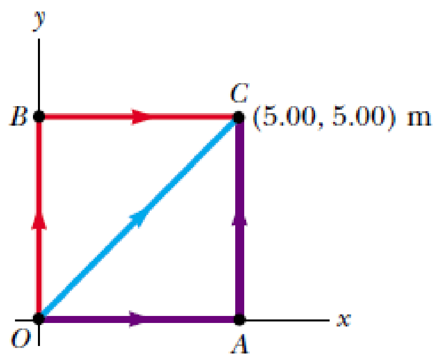


Δίνεται η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του $\frac{1}{2}mR^2$

Β. Δύναμη $F = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})$ ασκείται σε σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο xy. Το σωματίδιο κινείται από την θέση (0,0) στην θέση (5,5), όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη F κατά μήκος των διαδρομών OAC, OBC και OC (ευθεία).

β. Είναι η δύναμη διατηρητική ή μη διατηρητική; Εξηγήστε γιατί.



1Α. ΛΥΣΗ

Η ορμή διατηρείται στο σύστημα των δύο σωμάτων άρα $P_{αρχ}=mυ_o=p_{τελ}=(M+5m)\,υ_{τελ}$ άρα

$$υ_{τελ}=\frac{υ_o}{(5+\mathrm{M}/m)}$$

$$K_{αρχ}=\frac{1}{2}mυ_o{}^2$$

$$K_{τελ}=\frac{1}{2}(\mathrm{M}+5m)υ_{τελ}{}^2+4\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(\mathrm{M}+5m)υ_{τελ}{}^2+2(\frac{1}{2}mR^2)\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{M}+5m)υ_{τελ}{}^2+mυ_{τελ}^2=\frac{1}{2}(\mathrm{M}+7m)υ_{τελ}{}^2=\frac{1}{2}m(7+\mathrm{M}/m)\left(\frac{υ_o}{(5+\mathrm{M}/m)}\right)^2=$$

$$\frac{1}{2}m\,υ_o{}^2\left(\frac{7+\mathrm{M}/m}{(5+\mathrm{M}/m)^2}\right)=K_{αρχ}\,\frac{7+\mathrm{M}/m}{(5+\mathrm{M}/m)^2}\Rightarrow\frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}}=\frac{7+\mathrm{M}/m}{(5+\mathrm{M}/m)^2}$$

1Β ΛΥΣΗ

Για την πρώτη διαδρομή OAC θα υπολογίσουμε ξεχωριστά κατά μήκος OA και AC:

$W_{OA}=\int\limits_0^5 dx\hat{i}\cdot(2y\hat{i}+x^2\hat{j})=\int\limits_0^5 2ydx$ και επειδή y=0 το έργο $W_{OA}=0$.

Για την διαδρομή AC το έργο είναι: $W_{AC}=\int\limits_0^5 dy\hat{j}\cdot(2y\hat{i}+x^2\hat{j})=\int\limits_0^5 x^2dy=5x^2$

Για x=5 m $W_{AC}=125J$ και το συνολικό έργο στην διαδρομή OAC είναι: $W_{OAC}=125J$

Για την δεύτερη διαδρομή το έργο W_{OBC} υπολογίζεται ξεχωριστά για την διαδρομή OB και BC:

$W_{OB}=\int\limits_0^5 dy\hat{j}\cdot(2y\hat{i}+x^2\hat{j})=\int\limits_0^5 x^2dy=5x^2$ και για x=0 αυτής της διαδρομής το έργο $W_{OB}=0$.

Για την διαδρομή BC $W_{BC}=\int\limits_0^5 dx\hat{i}\cdot(2y\hat{i}+x^2\hat{j})=\int\limits_0^5 2ydx=(x)2y=10y=50J$ και επομένως το συνολικό έργο W_{OBC}= 50 J.

Τέλος, για την τρίτη διαδρομή OC το έργο είναι:

$$W_{OC}=\int\limits_0^5(dx\hat{i}+dy\hat{j})\cdot(2y\hat{i}+x^2\hat{j})=\int\limits_0^5(2ydx+x^2dy)$$

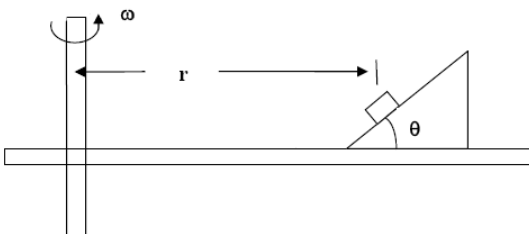
Αναγνωρίζοντας ότι x=y κατά μήκος της διαδρομής OC το ολοκλήρωμα είναι πιο απλό:

$$W_{OC}=\int\limits_0^5(2x+x^2)dx=\left(x^2+\frac{x^3}{3}\right)=66,7J$$

β. Επειδή το έργο από το O στο C σε τρεις διαφορετικές διαδρομές είναι διαφορετικό είναι προφανές ότι η δύναμη **δεν** είναι διατηρητική.

ΘΕΜΑ 2

Ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, είναι προσαρτημένο σε μία περιστρεφόμενη πλατφόρμα όπως στο σχήμα. Μία μικρή μάζα τοποθετείται στο κεκλιμένο επίπεδο σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ μάζας και κεκλιμένου επιπέδου είναι μ. Να βρεθούν:

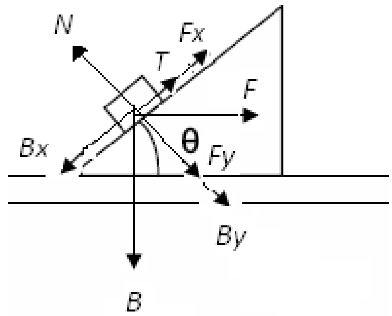


α) Η ελάχιστη τιμή της ω ώστε η μάζα να μην κινηθεί προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο. Για ποιες τιμές της γωνίας δεν υπάρχει περιορισμός στην τιμή του ω;
β) Η μέγιστη τιμή της ω ώστε η μάζα να μην κινηθεί προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Για ποιες τιμές της γωνίας δεν υπάρχει περιορισμός στην τιμή του ω;
Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.
ΛΥΣΗ :

Για έναν παρατηρητή πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο (μη αδρανειακός)εισάγουμε μια πλασματική δύναμη F=ma όπου α η κεντρομόλος επιτάχυνση (α=ω²r) με φορά αντίθετη της κεντρομόλου επιτάχυνσης (βλ. σχήμα)

α) Για να μην κινηθεί το σώμα προς τα κάτω θα πρέπει να ισχύει:

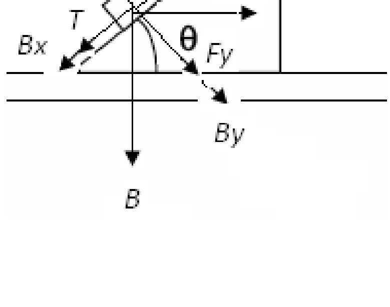
$$Bx - Fx \le T \Rightarrow mg\sin\theta - ma\cos\theta \le \mu N \Rightarrow$$
$$mg\sin\theta - ma\cos\theta \le \mu mg\cos\theta + \mu ma\sin\theta \Rightarrow$$
$$g\sin\theta - \mu g\cos\theta \le \alpha\left(\mu\sin\theta + \cos\theta\right) \ (1)$$
$$\alpha \ge \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\mu\sin\theta + \cos\theta} g \Rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\mu\sin\theta + \cos\theta}}\sqrt{\frac{g}{r}}$$



Προφανώς όταν $\sin\theta - \mu\cos\theta \le 0 \Rightarrow \theta \le \tan^{-1}(\mu)$ όποια τιμή και να έχει η ω, δεν μπορεί να κινηθεί προς τα κάτω το σώμα γιατί ισχύει η (1) για κάθε τιμή του α

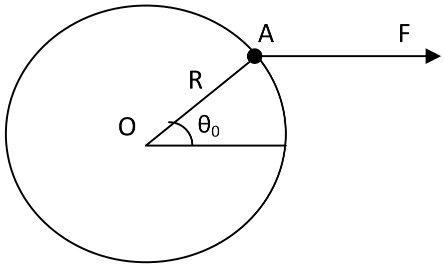
α) Για να μην κινηθεί το σώμα προς τα πάνω θα πρέπει να ισχύει:

$$Fx - Bx \le T \Rightarrow ma\cos\theta - mg\sin\theta \le \mu N \Rightarrow$$
$$ma\cos\theta - mg\sin\theta \le \mu mg\cos\theta + \mu ma\sin\theta \Rightarrow$$
$$\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right)\alpha \le \mu g\cos\theta + g\sin\theta \ (2)$$
$$\text{Αν } \cos\theta - \mu\sin\theta \ge 0 \text{ τότε}$$
$$\alpha \le \frac{\mu\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} g \Rightarrow \omega \le \sqrt{\frac{\mu\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}\sqrt{\frac{g}{r}}$$



Προφανώς όταν $\cos\theta - \mu \sin\theta \le 0 \Rightarrow \theta \ge \tan^{-1}(\mu^{-1})$ όποια τιμή και να έχει η ω, δεν μπορεί να κινηθεί προς τα πάνω το σώμα γιατί η ισχύει η (2) για κάθε τιμή του α

ΘΕΜΑ 3



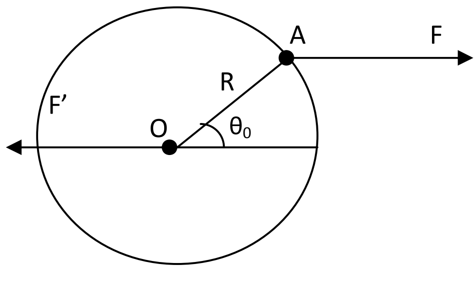
Οριζόντιος, ομογενής δίσκος ακτίνας R, αμελητέου πάχους με μάζα m και ροπή αδρανείας I, βρίσκεται σε επαφή με οριζόντιο, λείο επίπεδο. Την χρονική στιγμή t=0 ασκείται στο δίσκο σταθερή δύναμη F με σημείο εφαρμογής το σημείο A της περιφέρειας του δίσκου, ώστε η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα OA (O είναι το κέντρο του δίσκου) με την διεύθυνση της δύναμης είναι θ_0.

A. Δείξετε ότι το κέντρο μάζας του δίσκου εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, ως προς ακίνητο παρατηρητή και υπολογίσετε την επιτάχυνση.
B. Σημειώσετε τις δυνάμεις που θα πρέπει να θεωρήσει κινούμενος παρατηρητής, που κινείται μαζί με το κέντρο μάζας του δίσκου, προκειμένου να εφαρμόσει τους νόμους του Νεύτωνα για να περιγράψει την κίνηση.
C. Δείξετε ότι εάν η γωνία θ_0 είναι αρκετά μικρή ώστε $\sin\theta_0 \approx \theta_0$ τότε ο κινούμενος παρατηρητής αντιλαμβάνεται το δίσκο να εκτελεί στροφική ταλάντωση. Βρείτε τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και την συχνότητα της ταλάντωσης.
D. Περιγράψετε την κίνηση που αντιλαμβάνεται για τον δίσκο ένας ακίνητος παρατηρητής;

<u>Λύση</u>

A) Συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι η δύναμη F και επομένως το κέντρο μάζας του δίσκου (το κέντρο του δίσκου αφού ο δίσκος είναι ομογενής) αποκτά επιτάχυνση που είναι $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ η οποία είναι σταθερή με διεύθυνση και φορά όπως η δύναμη F.

B) Ένα παρατηρητής που κινείται όπως το κέντρο μάζας του δίσκου είναι μη αδρανειακός παρατηρητής με επιτάχυνση $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$. Επομένως για να περιγράψει την κίνηση του δίσκου εισάγει μια πλασματική δύναμη $\vec{F}' = -m\vec{a} = -\vec{F}$ με σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας του δίσκου.



Γ) Ως προς τον μη αδρανειακό παρατηρητή η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν επομένως δεν υπάρχει μεταφορική κίνηση του δίσκου. Η ολική ροπή όμως ως προς το κέντρο μάζας δεν είναι μηδενική αλλά $|\vec{\tau}| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \vec{F}\right| = RF\sin\theta_0 \approx RF\theta_0$

Από το νόμο της περιστροφικής κίνησης θα έχουμε $RF\theta = \mathrm{I}\alpha_\gamma = -\mathrm{I}\dfrac{d\theta^2}{dt^2} \Rightarrow \dfrac{d\theta^2}{dt^2} + \dfrac{RF}{I}\theta = 0$

που είναι η εξίσωση της ΑΑΤ . Η λύση της είναι η $\theta = \mathrm{A}\sin(\omega t + \phi)$. Από τις αρχικές συνθήκες (Για $t = 0$ έχουμε $\theta = \theta_0$ και $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$) έχουμε ότι $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ και $\mathrm{A} = \theta_0$ οπότε $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$. Η θέση ισορροπίας είναι για θ=0 δηλαδή όταν η OA είναι παράλληλη με τη διεύθυνση της δύναμης

Η συχνότητα βρίσκεται από τη σχέση $\omega^2 = \frac{RF}{I} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{RF}{I}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{RF}{I}}$

Δ) ‘Ενας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται τη σύνθεση των δύο κινήσεων: Την μεταφορική κίνηση του κ.μ. και την στροφική ταλάντωση ως προς το κέντρο μάζας.

ΘΕΜΑ 4

Α. Ένα σώμα κινείται κάτω από την επίδραση δύναμης και έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}$ όπου Α και Β θετικές σταθερές.

a) Για ποια τιμή του x το δυναμικό γίνεται ελάχιστο και ποια τιμή παίρνει γι αυτό το x;
b) Βρείτε την έκφραση της δύναμης που ασκείται στο σώμα
c) Φτιάξτε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας, σημειώνοντας την τιμή του ελάχιστου και την τιμή για μεγάλα x
d) Εάν η ολική του ενέργεια είναι $-\frac{B^2}{8A}$ να βρεθεί η κινητική του ενέργεια στις θέσεις ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. (Σημειώστε την ολική ενέργεια στη γραφική σας παράσταση)

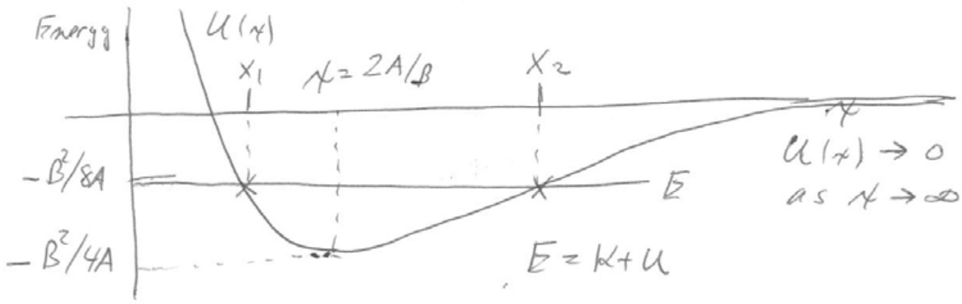
Β. Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου ως συνάρτηση της θέσης x δίνεται από τη σχέση $a(x) = -bx$, όπου b σταθερά ($b = 1\ s^{-2}$). **Δ**είξτε ότι το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση με περίοδο ανεξάρτητης της μάζας

Α.Λύση

α)
$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{-2A}{x^3} + \frac{B}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2A}{x^3} = \frac{B}{x^2} \Rightarrow x_{\min} = \frac{2A}{B}$$
$$U(x_{\min}) = \frac{A}{(2A/B)^2} - \frac{B}{(2A/B)} = \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} = -\frac{B^2}{4A}$$

β) $F = -\frac{dU(x)}{dx} = -\left(\frac{-2A}{x^3} + \frac{B}{x^2}\right) = \frac{2A}{x^3} - \frac{B}{x^2}$

γ)



δ)
$$E_{ολ} = \frac{-\mathrm{B}^2}{8\mathrm{A}} = \mathrm{K} + U(x_{\min}) \Rightarrow K = \frac{-\mathrm{B}^2}{8\mathrm{A}} - U(x_{\min}) \Rightarrow K = \frac{-\mathrm{B}^2}{8\mathrm{A}} - \left(-\frac{B^2}{4A}\right) = \frac{-\mathrm{B}^2}{8\mathrm{A}} + \frac{B^2}{4A} = \frac{B^2}{8A}$$

Β. ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το 2^o νόμο του Νεύτωνα F=ma άρα F= m (-bx)=-(mb) x δηλαδή στο σώμα ασκείται δύναμη αντίθετη και ανάλογη της απομάκρυνσης με k=-mb . Αρα το σώμα εκτελεί περιοδική

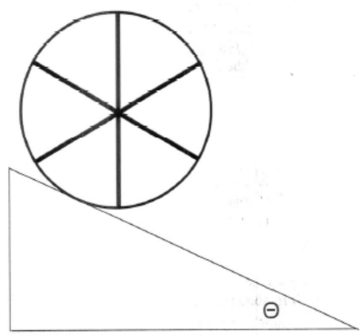
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mb}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{b}}$$

κίνηση με περίοδο

ΘΕΜΑ 5

Α. Στη μελέτη της περιστροφικής κίνησης θα πρέπει να εξετάζεται η περιστροφή κάθε σημείου του στερεού σώματος ως προς ακίνητο άξονα περιστροφής. Κατά την κύλιση δακτυλίου ακτίνας R και αμελητέου πάχους συνήθως συμπεραίνουμε ότι κάθε σημείο της περιφέρειας του δακτυλίου περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και ταχύτητα μέτρου ωR ως προς τον άξονα κύλισης. Προφανώς ο άξονας κύλισης δεν είναι ακλόνητος άξονας περιστροφής. Να δείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή υπάρχει άξονας περιστροφής κάθετος στην επιφάνεια του δακτυλίου που διέρχεται από ακίνητο σημείο τέτοιος ώστε κάθε σημείο Q της περιφέρειας του δακτυλίου εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από αυτόν με συνολική ταχύτητα μέτρου ω r_Q όπου r_Q η απόσταση του σημείου Q από τον ακλόνητο άξονα περιστροφής.

Β. Ένας τροχός αποτελείται από μία κυκλική στεφάνη ακτίνας R και μάζας M και 6 ακτίνες, μάζας M/2 η καθεμία όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο τροχός αφήνεται από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ και κυλίεται χωρίς να ολισθήσει. Με ποια επιτάχυνση κινείται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο; (Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g, η ροπή αδρανείας λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L ως προς το μέσο της $I=ML^2/12$ και η ροπή αδρανείας στεφάνης ακτίνας R ως προς το κέντρο της MR^2)



5Α. Λύση
Στην περίπτωση κύλισης χωρίς ολίσθηση, η κίνηση αναλύεται στη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας και στην περιστροφική κίνηση γύρω από ακλόνητο άξονα, όπως την αντιλαμβάνεται κινούμενος παρατηρητής με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλιόμενου συστήματος. Η μεταφορική στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση συνδέονται με την γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση, με τις σχέσεις:

$$\mathbf{v}_{\kappa\mu} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{\kappa\mu} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R}$$

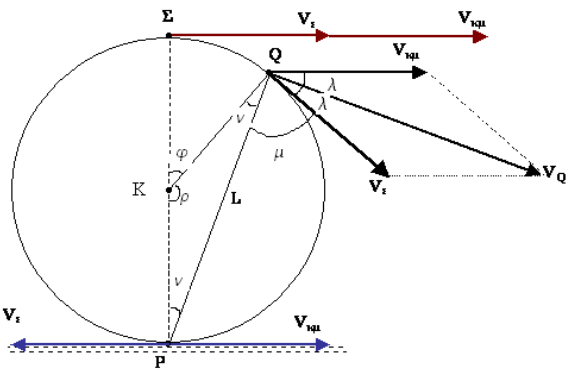
Έτσι κάθε υλικό σημείο του δακτυλίου έχει μια επιτρόχιο συνιστώσα της ταχύτητας λόγω της περιστροφής γύρω από τον άξονα κύλισης, όπως την αντιλαμβάνεται ο κινούμενος παρατηρητής. Η επιτρόχιος ταχύτητα έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο της ακτινικής απόστασης, του υλικού σημείου από το κέντρο περιστροφής, επί τη γωνιακή ταχύτητα.

$$v_\varepsilon = \omega \cdot R$$

και διεύθυνση εφαπτομενική της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί.
Η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας (η οποία συμπίπτει με την ταχύτητα κίνησης του παρατηρητή) έχει μέτρο που δίνεται από την σχέση $\mathbf{v}_{\kappa\mu} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}$ και οριζόντια διεύθυνση. Το διανυσματικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων δίνει την ταχύτητα του υλικού σημείου ως προς ακίνητο παρατηρητή. Δηλαδή: $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_\varepsilon + \vec{v}_{\kappa\mu}$
Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς, (βλέπε διπλανό σχήμα), ότι η ταχύτητα στο σημείο επαφής P θα είναι μηδέν. Πράγματι, η επιτρόχιος ταχύτητα έχει αντίθετη φορά της μεταφορικής ταχύτητας.

Αντίθετα , το αντιδιαμετρικό σημείο Σ έχει οριζόντια ταχύτητα με φορά προς τη φορά μετατόπισης του κέντρου μάζας και μέτρο διπλάσιο της ταχύτητας του κέντρου μάζας.
Είναι εύκολο να δείξετε ότι η διεύθυνση της ταχύτητας κάθε ενός άλλου σημείου , π.χ. του Q, έχει διεύθυνση κάθετη στο διάνυσμα θέσης του α ως προς το σημείο επαφής P. Το διάνυσμα Vκμ έχει οριζόντια διεύθυνση ενώ το Vε είναι εφαπτόμενο στην περιφέρεια, στο σημείο Q.
Επειδή |Vκμ|=|Vε| η διεύθυνση του VQ διχοτομεί τη γωνία Q(=2λ). Παρατηρήστε ότι :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(από το τρίγωνο RKQ)} & \hat{\rho}+2\hat{\nu}=\pi \\ \text{(παραπληρωματικές γωνίες)} & \hat{\rho}+\hat{\varphi}=\pi \\ \text{(Γωνίες με κάθετες πλευρές)} & \hat{\varphi}=2\hat{\lambda}\end{array}\right\},\hat{\nu}=\hat{\lambda}$$



Ακόμα πιο ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι το μέτρο της συνολικής ταχύτητας του σημείου Q, V_Q, είναι: $V_Q = L\cdot\omega$ όπου ω είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής γύρω από τον άξονα κύλισης και L είναι το μέτρο του διανύσματος θέσης του σημείου Q ως προς το σημείο επαφής P.

Πράγματι Όπως φαίνεται στο σχήμα το μέτρο του $\vec{V}_Q$ είναι

$$V_Q^2 = \underbrace{V_\varepsilon^2}_{(\omega R)^2} + \underbrace{V_{\kappa\mu}^2}_{(\omega R)^2} - 2\underbrace{V_\varepsilon V_{\kappa\mu}}_{(\omega R)^2}\cos(2\lambda) = \omega^2\cdot\left(R^2+R^2-2R^2\cos(2\lambda)\right)$$

Αλλά από το τρίγωνο PKQ:
$$\begin{array}{l}L^2 = R^2+R^2+2R^2\cos\rho = R^2+R^2+2R^2\cos(\pi-\phi) = \\ R^2+R^2-2R^2\cos(\phi) = R^2+R^2-2R^2\cos(2\lambda)\end{array}$$

Οπότε $V_Q = L\cdot\omega$

Οι παρατηρήσεις αυτές ισχύουν για κάθε σημείο του κυλίνδρου και όχι μόνο για τα σημεία τη περιφέρειας, όπως εύκολα μπορείτε να δείξετε.

5Β ΛΥΣΗ

$$M_{o\lambda} = M + 6\left(\frac{M}{2}\right) = 4M$$

$$I_{\kappa\mu} = MR^2 + 3\frac{M(2R)^2}{12} = 2MR^2$$

Ροπή T =4MgRsinθ (1) κάθετα στη σελίδα προς τα μέσα

Ισχύει T=I $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2) όπου I είναι η ροπή αδρανείας ως προς το σημείο επαφής

άρα με το θεώρημα παραλλήλων αξόνων

I= $I_{\kappa\mu}$+(4M)R^2 = 6MR^2 (3)

Από (1) (2) (3) 4MgRsinθ=6MR^2 $\alpha_{\gamma\omega\nu}$=6MR^2 (α/R) απ΄ όπου

$\alpha = (2/3)\ g \sin\theta$