Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Τελικών Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Έστω ότι ο Δ κινείται με ταχύτητα υ ως προς τη Γη. Τότε λόγω της συστολής Lorentz μετράει ότι ο αστέρας απέχει από τη Γη απόσταση $\Gamma A' = \frac{1}{\gamma}x$ (1)

Το Δ διανύει την απόσταση αυτή σε χρόνο $\Delta t' = \frac{\Gamma A'}{\upsilon}$ (2)

Από τις (1),(2) $\Rightarrow \upsilon\Delta t' = x\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} \Rightarrow \beta\left(\frac{c\Delta t'}{x}\right) = \sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\Delta t'}{x}\right)^2}}$

Θέτοντας τα δεδομένα $\Delta t' = 25\,\acute{\varepsilon}\tau\eta$, και $x = 100\,\varepsilon.\varphi. = 100\,\acute{\varepsilon}\tau\eta\times c$ βρίσκουμε

$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\times 25}{100\times c}\right)^2}} = 0.9701 \Rightarrow \upsilon = 0.9701c$ και $\gamma = 4.1231$. Άρα από την (1)

$\Gamma A' = \frac{1}{\gamma}x = 24.2536\,\varepsilon.\varphi.$ και επειδή $1\acute{\varepsilon}\tau o\varsigma = 31536\times10^3 s$, $\Gamma A' = 2.2946\times10^{17} m$

Η διστολή της ακτίνας της Γης που βλέπει ο Δ είναι $R' = \frac{1}{\gamma}R = \frac{R}{4.1231}$.

Β) Η διάρκεια του ταξιδιού ως προς τη Γη είναι

$\Delta t = \frac{x}{\upsilon} = \frac{100\acute{\varepsilon}\tau\eta\times c}{0.9701c} \Rightarrow \Delta t = 103.1\acute{\varepsilon}\tau\eta$

ή $\Delta t = 3.2514\times10^9 s$.

Γ) Ο παρατηρητής στη Γη βλέπει ότι το διαστημόπλοιο Δ ιδιομήκους L_0 έχει υποστεί συστολή με μήκος L, άρα $L = \frac{1}{\gamma}L_0 \Rightarrow L_0 = \gamma L = 412.3m$

Θέμα 2ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Αν η σχετική ταχύτητα είναι υ, τότε το μήκος του Α ως προς το Β είναι

$L' = L\sqrt{1-(v/c)^2}$.

Ο ολικός χρόνος διελεύσεως του Α (ιδιομήκους L) ως προς το Β είναι

$$\Delta t = \frac{L + L'}{v} = L\frac{1+\sqrt{1-(v/c)^2}}{v}$$

άρα

$$v = c\frac{2Lc\Delta t}{L^2 + (c\Delta t)^2}$$, με αντικατάσταση, $\upsilon = (120/169)\ c = 0.71\ c$.

B) Αν η ταχύτητα του καθενός ως προς την Γή είναι u, τότε η σχετική ταχύτητα είναι

$$v = \frac{2u}{1+(u/c)^2} \Rightarrow u = c\frac{1 \pm \sqrt{1-(v/c)^2}}{v/c}$$

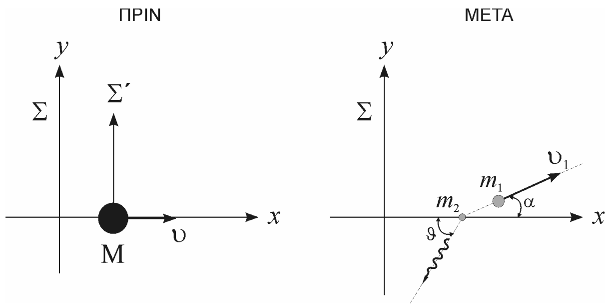
Άρα με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$\mathrm{u} = \frac{5\mathrm{c}}{12} = 0.417\ \mathrm{c}$$

Η άλλη ρίζα απορρίπτεται καθώς οδηγεί σε $u = 12c/5 > c$

Θέμα 3^{o} (Μονάδες: 2.5)

A) Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε



$$x: \qquad \gamma M\upsilon = \gamma_1 m_1 \upsilon_1 \cos\alpha - \frac{E}{c}\cos\vartheta$$

$$y: \qquad 0 = \gamma_1 m_1 \upsilon_1 \sin\alpha - \frac{E}{c}\sin\vartheta$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \sqrt{2}$, $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}c$, $m_1 = \frac{M}{4}$, $\alpha = 30^\circ$ και $E = Mc^2/2$ οι σχέσεις γίνονται

$$\left.\begin{array}{ll} x: & \sqrt{2}M\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_1\upsilon_1 M - \frac{Mc}{2}\cos\vartheta \\ y: & 0 = \frac{1}{8}\gamma_1\upsilon_1 M - \frac{Mc}{2}\sin\vartheta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_1\frac{\upsilon_1}{c} - 2 & (1) \\ \sin\vartheta = \frac{1}{4}\gamma_1\frac{\upsilon_1}{c} & (2) \end{array}$$

Θέτοντας την άγνωστη ποσότητα $z = \gamma_1\frac{\upsilon_1}{c} = \frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$ (3), υψώνοντας τις (1) και (2) στο τετράγωνο και προσθέτονας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}z - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}z\right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{z^2}{4} - \sqrt{3}z + 4 \Rightarrow z^2 - 4\sqrt{3}z + 12 = 0$$

η οποία έχει τη διπλή λύση $z = 2\sqrt{3}$. Με αντικατάσταση στην (3) βρίσκουμε $\beta_1 = \sqrt{\frac{12}{13}} = 0.9608$ και $\gamma_1 = \sqrt{13} = 3.6056$, άρα $\upsilon_1 = 0.9608c$.

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\gamma Mc^2 = \gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2 + E \Rightarrow m_2 c^2 = \gamma Mc^2 - \gamma_1 m_1 c^2 - Mc^2/2 \Rightarrow m_2 = M\left(\gamma - \frac{\gamma_1}{4} - \frac{1}{2}\right) (4)$$

Θέτοντας τις δύο σταθερές $\gamma = \sqrt{2}$ και $\gamma_1 = 3.6056$ στην (4) βρίσκουμε $m_2 = 0.0128M$.

Β) Από τη σχέση (2) έχουμε $\sin\vartheta = \frac{1}{4}\gamma_1\beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \vartheta = 60^\circ$.

Γ) Η ταχύτητα του σωματιδίου m_1 στο σύστημα του εργαστηρίου (Σ) είναι $\upsilon_x = \upsilon_1\cos\alpha = 0.8321c$ και $\upsilon_y = \upsilon_1\sin\alpha = 0.4804c$. Η ταχύτητά του στο σύστημα του αρχικού σωματίου Μ (Σ′) δίνεται από το τις σχέσεις (1.18), (1.19) του βιβλίου των Serway, Moses και Moyer

$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon_x \upsilon}{c^2}} = \frac{\upsilon_1\cos\alpha - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon_1 \upsilon\cos\alpha}{c^2}} = 0.3035c$$

$$\upsilon_y' = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon_x \upsilon}{c^2}\right)} = \frac{\upsilon_1\sin\alpha}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon_1 \upsilon\cos\alpha}{c^2}\right)} = 0.8252c$$

<u>Θέμα 4^ο</u> (Μονάδες: 2.5)

Α) Έχουμε $\gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_B^2}{c^2}}} = 2.3$ και επειδή τα δύο γεγονότα (άναμμα και σβήσιμο της λάμπας) είναι ισότοπα στο Β, $\Delta t = \gamma_B \Delta t_B \Rightarrow \Delta t_B = \Delta t / \gamma_B \Rightarrow \Delta t_B = 4.36\,\mathrm{m}s$ (ιδιοχρόνος). Το ζητούμενο χρονικό διάστημα που μετράει ο παρατηρητής στο διαστημόπλοιο Α, Δt_A, δίνεται από τη σχέση

$\Delta t_A = \gamma_{BA}\Delta t_B$, όπου $\gamma_{BA} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_{BA}^2}{c^2}}}$ και υ_{BA} η ταχύτητα του Β ως προς το Α:

$$\upsilon_{BA} = \frac{\upsilon_B - \upsilon_A}{1 - \frac{\upsilon_B \upsilon_A}{c^2}} = \frac{-0.90c - 0.65c}{1 + \frac{0.90 \cdot 0.65c^2}{c^2}} = -0.979c \quad \text{και} \quad \gamma_{BA} = 4.8, \quad \text{οπότε}$$

$\Delta t_A = 4.8 \times 4.36\,\mathrm{m}s = 20.9\,\mathrm{m}s$.

Β) Ο παρατηρητής στο σύστημα Σ βλέπει την φωτεινή πηγή να πλησιάζει με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_B = 0.90c$, οπότε από τον τύπο του ακτινικού σχετικιστικού φαινομένου Doppler έχουμε

$\lambda_\Sigma = \lambda\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ με $\beta = \frac{\upsilon_B}{c} = 0.90$, οπότε βρίσκουμε $\lambda_A = 126\,\mathrm{nm}$.

Ο παρατηρητής στο διαστημόπλοιο Α βλέπει την φωτεινή πηγή να πλησιάζει με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{BA} = 0.979c$, οπότε από τον τύπο του ακτινικού σχετικιστικού φαινομένου Doppler έχουμε

$\lambda_A = \lambda\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ με $\beta = \frac{\upsilon_{BA}}{c} = 0.979$, οπότε βρίσκουμε $\lambda_A = 57\,\mathrm{nm}$.