



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

ΣΤΡΑΤΟΣ ΚΟΒΑΛΪΚΟΒ ΠΑΠΑΔΟΥΔΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

επιβλέπων

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Ν. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής

ακαδημαϊκό έτος

2012

2013



ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ

Contents

1	Θεωρία βαθμωτού πεδίου	1
1.1	Φορμαλισμός	1
1.1.1	Συμβολισμός εσωτερικού γινομένου πεδίων	1
1.2	Διαδότες (συναρτήσεις Green)	3
1.3	Θεωρία βαθμωτού πεδίου σε πλέγμα (ομαλοποίηση)	3
1.3.1	Το πλέγμα $\mathbb{L}_N(\ell)$, Λ	4
1.3.1.1	εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot \cdot \rangle$ στο πλέγμα	4
1.3.1.2	τελεστές παραγώγου στο πλέγμα	5
1.3.2	Συνοριακές συνθήκες πεπερασμένου πλέγματος	5
1.3.2.1	standard boundary conditions	5
1.3.2.2	periodic boundary conditions	6
1.3.2.3	helicoid boundary conditions	6
1.4	Discrete Fourier Transform	8
1.4.1	Βασικές ιδιότητες διακριτού μετασχηματισμού Fourier σε πλέγμα	8
1.4.1.1	linearity	8
1.4.1.2	translation and modulation	9
1.4.1.3	scaling	9
1.4.1.4	conjugation	10
1.4.2	Θεωρήματα διακριτού μετασχηματισμού Fourier σε πλέγμα	11
1.4.2.1	Plancherel-Parseval theorem	11
1.4.2.2	circular convolution theorem	11
2	Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου	13
2.1	Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης	13
2.2	Κβαντική Χρωμοδυναμική	14
2.2.1	Υψηλή πυκνότητα μέσου, χαμηλή θερμοκρασία	15
2.3	Σχετικιστικό αέριο Bose (φαινόμενο Silver-Blaze)	15
2.3.1	Μέθοδος μιγαδικής Langevin	16
2.3.2	Lefschetz thimbles	16
2.3.2.1	The thimble(s)	17
2.3.2.2	Εφαρμογή στη θεωρία πεδίου	18
2.3.3	Δυϊκές μέθοδοι	18
2.3.3.1	Αναπαράσταση ροής	18
2.3.3.2	Αλγόριθμος worm	20
3	Δυναμική Langevin	23
3.1	Συνεχής δυναμική Langevin	23
3.1.1	$\phi \in \mathbb{R}^X$ και $S \in \mathbb{R}$	23
3.1.2	$\phi \in \mathbb{F}^X$ και $S \in \mathbb{R}$	24
3.1.2.1	Άλγεβρα βαθμωτών $\phi \in \mathbb{F}$	24
3.1.2.2	Εξίσωση Langevin	26
3.1.3	$\phi \in \mathbb{F}^X$ και $S \in \mathbb{G}$	27
3.2	Εξίσωση Fökker-Planck	28
3.2.1	Το σύμβολο Dirac της κατανομής	30
3.2.2	Εξαγωγή της εξίσωσης Fökker-Planck	31

3.2.3	Η κατάσταση ισορροπίας για $\tau \rightarrow \infty$ και το Feynman path integral	35
3.2.3.1	Ενδείξεις από εξίσωση Langevin	35
3.2.3.2	Στατική κατανομή Fökker-Planck	36
3.2.3.3	Θεωρία βαθμωτού πεδίου $\phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X$, θορύβου $\eta \in \mathbb{F}^X$ και δράσης $S[\phi] \in \mathbb{G}$	38
3.3	Διακριτή δυναμική Langevin	40
3.3.1	Μεταβλητό βήμα χρόνου Langevin ϵ_n	41
3.3.1.1	η μέση ολίσθηση $\epsilon^{-1}\mathcal{M}$	41
4	Σχετικιστικό αέριο Bose	43
4.1	Δυναμική Langevin στο σχετικιστικό αέριο Bose	43
4.1.1	Δράση S στο πλέγμα $\mathbb{L} \leftarrow X$	43
4.1.2	Εξισώσεις Langevin του σχετικιστικού αερίου Bose	44
4.1.2.1	Συντελεστές ολίσθησης K_{ab}	45
4.1.2.2	Παρατηρήσιμα μεγέθη (n_a, ρ_a)	46
4.2	Εξομοίωση δυναμικής Langevin σχετικιστικού αερίου Bose	47
4.2.1	Initialization	47
4.2.2	Langevin evolution	48
4.2.3	Finalization	49
4.3	Αποτελέσματα	49

1 Θεωρία βαθμωτού πεδίου

1.1 Φορμαλισμός

1.1.1 Συμβολισμός εσωτερικού γινομένου πεδίων

Για κάθε πεδίο ϕ και ψ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο συνοπτικά ως

$$\langle \psi | \phi \rangle \equiv \int_X d^{\dim X} x \langle \psi | x \rangle \langle x | \phi \rangle, \quad (1.1.1)$$

όπου για κάθε πεδίο ϕ , η αναπαράσταση θέσης συμβολίζεται με $\phi(x) \equiv \langle x | \phi \rangle$. Ο συμβολισμός αυτός σέβεται τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου πεδίων $\langle \cdot | \cdot \rangle$ με πιο χαρακτηριστική από όλες την $\langle \phi | x \rangle \equiv \phi^\dagger(x)$.

Για κάθε ερμητιανό τελεστή πεδίων A ($A = A^\dagger$ ή $\langle A\psi | \phi \rangle \equiv \langle \psi | A^\dagger \phi \rangle = \langle \psi | A\phi \rangle$) έχει νόημα ο συμβολισμός

$$\langle \psi | A | \phi \rangle \equiv \int_X d^{\dim X} x \int_X d^{\dim X} y \langle \psi | y \rangle \langle y | A | x \rangle \langle x | \phi \rangle. \quad (1.1.2)$$

Παρ' όλη την ομοιότητα με το φορμαλισμό Dirac δε θα γράφουμε ποτέ μεμονωμένα bra ή ket σύμβολα σε ότι αφορά τα πεδία καθεαυτά. Ο μετασχηματισμός Fourier εξακολουθεί και μπορεί να γράφεται

$$\langle p | \phi \rangle = \int_X d^{\dim X} x \langle p | x \rangle \langle x | \phi \rangle, \quad (1.1.3)$$

όπου $\langle x | p \rangle \equiv \exp(ip_\alpha x_\alpha)$ είναι ο πυρήνας μετασχηματισμού Fourier.

Από ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, για παράδειγμα αυτή της συνέλιξης

$$\langle x | \phi \psi \rangle = \langle x | \phi \rangle \langle x | \psi \rangle \text{ ενώ } \langle p | \phi \psi \rangle = \langle p | \phi \rangle * \langle p | \psi \rangle, \quad (1.1.4)$$

αναδεικνύεται πως το νόημα που δίνεται στο περιεχόμενο του συμβολισμού $\langle \cdot | \cdot \rangle$ εξαρτάται από την αναπαράσταση στην οποία αναγράφεται ή αναπτύσσεται όταν αυτή δεν περιλαμβάνεται.

Το σύμβολο της συνάρτησης δέλτα του Dirac προκύπτει με συνεπή τρόπο ως $\langle x | y \rangle \equiv \delta(x - y)$, αφού στην ορολογία τη συναρτησιακής ανάλυσης η δέλτα συνάρτηση είναι όντως η αναπαράσταση στη θέση της... θέσης,

$$\langle x | \phi \rangle \equiv \phi(x) = \int_X d^{\dim X} y \delta(x - y) \phi(y) \equiv \int_X d^{\dim X} x \langle x | y \rangle \langle y | \phi \rangle, \quad (1.1.5)$$

το οποίο είναι σε απόλυτη συμφωνία με τον υιοθετημένο φορμαλισμό.

Στην περίπτωση των πραγματικών πεδίων το εσωτερικό γινόμενο είναι τετριμμένο, επομένως το σύμβολο $\langle \cdot | \cdot \rangle$ μπορεί να επεκταθεί σε ένα γενικό σύμβολο $\langle \dots \rangle$ ολοκλήρωσης ως προς την επιθυμητή αναπαράσταση του (κατάλληλα ερμηνευόμενου) περιεχομένου. Στην αναπαράσταση θέσης που χρησιμοποιείται αποκλειστικά σε αυτήν την εργασία, για κάθε O συνάρτηση πεδίων,

$$\langle O(\phi) \rangle \equiv \int_X d^{\dim X} x O(\phi(x)) \quad (1.1.6)$$

Γράφοντας $\langle \psi | \phi \rangle = \langle \psi^\dagger | \phi \rangle$ ο συμβολισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί σε τυχούσας άλγεβρας πεδία.

Επίστατα προσοχή διότι, δεν είναι όλα τα σύμβολα $\langle \dots \rangle$ αναλλοίωτα αναπαράστασης. Πιο συγκεκριμένα το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι αναλλοίωτο της αναπαράστασης όταν αυτή τελείται κατά ζεύγη μεταβλητών, όπως σε όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν για $\phi \in \mathbb{R}$.

continuum/thermodynamic limit _____ notation _____ lattice regularization

$$\begin{aligned} \phi(x) & \dots\dots\dots \langle x|\phi \rangle \dots\dots\dots \phi_x \\ \phi^\dagger(x) & \dots\dots\dots \langle \phi|x \rangle \dots\dots\dots \phi_x^\dagger \end{aligned}$$

_____ $A = A^\dagger$ _____

$$\int d^N x \psi^\dagger(x)\phi(x) \dots\dots\dots \int d^N x = \langle \psi|x \rangle \langle x|\phi \rangle \dots\dots\dots \ell^N \sum_x \psi_x^\dagger \phi_x$$

$$A(x, y) \dots\dots\dots \langle x|A|y \rangle \dots\dots\dots \ell^{-N} A_{xy}$$

$$\int d^N z A(x, z)B(z, y) \dots\dots\dots \int d^N z \langle x|A|z \rangle \langle z|B|y \rangle = \langle y|A|B|x \rangle \dots\dots\dots \ell^{-N} \sum_z A_{xz} B_{zy}$$

$$\int d^N x \int d^N y \psi^\dagger(x)A(x, y)\phi(y) \dots\dots\dots \int d^N x \int d^N y \langle \psi|x \rangle \langle x|A|y \rangle \langle y|\phi \rangle = \langle \psi|A|\phi \rangle \dots\dots\dots \ell^N \sum_x \sum_y \psi_x^\dagger A_{xy} \phi_y$$

$$\delta(x - y) \dots\dots\dots \langle x|y \rangle \dots\dots\dots \ell^{-N} \delta_{xy}$$

_____ $\phi \in \mathbb{R}$ _____

$$\int d^N x f(\phi(x)) \dots\dots\dots f(\phi) \dots\dots\dots \ell^N \sum_x f(\phi_x)$$

$$\int d^N x \psi(x)\phi(x) \dots\dots\dots \langle \psi\phi \rangle = \langle \psi|\phi \rangle \dots\dots\dots \ell^N \sum_x \psi_x \phi_x$$

$$\int d^N x \int d^N y \psi(x)A(x, y)\phi(y) \dots\dots\dots \langle \langle \psi A \phi \rangle \rangle = \langle \psi|A|\phi \rangle \dots\dots\dots \ell^N \sum_x \sum_y \psi_x A_{xy} \phi_y$$

$$\int d^N x \int d^N y \psi(x)A(y, y)\phi(x) \dots\dots\dots \langle A \rangle \langle \psi\phi \rangle = \langle \langle A \rangle \psi\phi \rangle = \langle \psi \langle A \rangle \phi \rangle = \langle \psi\phi \langle A \rangle \rangle = \langle \psi\phi \rangle \langle A \rangle \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \langle A \rangle \langle \psi|\phi \rangle = \langle \langle A \rangle \psi|\phi \rangle = \langle \psi \langle A \rangle |\phi \rangle = \langle \psi|\langle A \rangle \phi \rangle = \langle \psi|\phi \langle A \rangle \rangle = \langle \psi|\phi \rangle \langle A \rangle \dots\dots\dots \ell^N \sum_x \sum_y \psi_x A_{yy} \phi_x$$

$$\int d^N x \phi(x)A(x, x)\psi(x) \dots\dots\dots \langle \phi A \psi \rangle \dots\dots\dots \sum_x \psi_x A_{xx} \phi_x$$

$$\int d^N x A(x, y)\phi(y) \dots\dots\dots \langle A(x)\phi \rangle = \langle x|A|\phi \rangle \dots\dots\dots \sum_y A_{xy} \phi_y$$

$$\int d^N x A(x, x) \dots\dots\dots \langle A \rangle \dots\dots\dots \sum_x A_{xx}$$

$$\int d^N x \int d^N y A(x, y)B(y, x) \dots\dots\dots \langle \langle AB \rangle \rangle = \langle A||B \rangle \dots\dots\dots \sum_x \sum_y A_{xy} B_{yx}$$

$$\int d^N x \int d^N y A(x, x)B(y, y) \dots\dots\dots \langle A \langle B \rangle \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle = \langle \langle A \rangle B \rangle \dots\dots\dots \sum_x \sum_y A_{xx} B_{yy}$$

$$\int d^N x \int d^N y A(x, x)B(x, x) \dots\dots\dots \langle AB \rangle \dots\dots\dots \ell^{-N} \sum_x A_{xx} B_{xx}$$

$$\int d^N z A(x, z)B(z, y) \dots\dots\dots \langle A(x)B(y) \rangle = \langle x|A|B|y \rangle \dots\dots\dots \ell^{-N} \sum_z A_{xz} B_{zy}$$

_____ $\frac{\partial}{\partial \tau} F[\phi(\tau)] = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\langle \phi(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi(\tau)} \right\rangle F[\phi(\tau)]$ _____

$$\int d^N x \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) \frac{\delta}{\delta \phi(x, \tau)} F[\phi(\tau)] \dots\dots\dots \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi(\tau)} F[\phi(\tau)] \right\rangle \dots\dots\dots \ell^N \sum_x \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_x(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_x(\tau)} F[\phi(\tau)]$$

1.2 Διαδότες (συναρτήσεις Green)

Μια θεωρία (πραγματικού) βαθμωτού πεδίου ϕ μεταφρασμένη στον ευκλείδειο χωροχρόνο ορίζεται αποκλειστικά από τις συναρτήσεις συσχετισμού n σημείων (ή συναρτήσεις Green) $\langle \phi^\dagger(y_1) \cdots \phi^\dagger(y_m) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle$, οι οποίες υπολογίζονται μέσω του συναρτησιακού της δράσης

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \langle x_i | \phi \rangle \prod_{j=1}^m \langle \phi | y_j \rangle \right\rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \prod_{j=1}^m \phi^\dagger(y_j), \quad (1.2.1)$$

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]), \quad (1.2.2)$$

είναι η συνάρτηση επιμερισμού (ορολογία δανεισμένη από την αναλογία ευκλείδειας κβαντικής θεωρίας πεδίου με τη στατιστική μηχανική).¹ Η γραφή αυτή είναι καθαρά φορμαλιστική, καθώς ούτε η συνάρτηση επιμερισμού, ούτε οποιοδήποτε path integral γενικά δεν είναι καλά ορισμένο (άπειρο), αλλά μόνο ο συνδυασμός τους για την παραγωγή αναμενόμενων τιμών για το τυχόν μέγεθος \mathcal{O} είναι καλά ορισμένος,

$$\langle \mathcal{O}[\phi] \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S[\phi]). \quad (1.2.3)$$

Για μια κλασσική πηγή ξ ορίζεται η γεννήτρια συνάρτηση,

$$Z[\xi] \equiv \left\langle \exp \left(\frac{1}{2} (\langle \xi | \phi \rangle + \langle \phi | \xi \rangle) \right) \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{i! j!} \int_X d^{\dim X} x_i \int_X d^{\dim X} y_j \langle \xi | x_i \rangle \left\langle \prod_{i=1}^n \langle x_i | \phi \rangle \prod_{j=1}^m \langle \phi | y_j \rangle \right\rangle \langle y_j | \xi \rangle, \quad (1.2.4)$$

Εναλλακτικά οι συναρτήσεις Green μπορούν να γραφούν ως συναρτησιακές παράγωγοι της γεννήτριας κατανομής.

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \langle x_i | \phi \rangle \prod_{j=1}^m \langle \phi | y_j \rangle \right\rangle = \frac{\delta^{n+m}}{\prod_{j=1}^m \delta \langle y_j | \xi \rangle \prod_{i=1}^n \delta \langle \xi | x_i \rangle} Z[0] \equiv \prod_{j=1}^m \frac{\delta}{\delta \langle y_j | \xi \rangle} \prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta \langle \xi | x_i \rangle} Z[0]. \quad (1.2.5)$$

1.3 Θεωρία βαθμωτού πεδίου σε πλέγμα (ομαλοποίηση)

Η πλεγματοποίηση του (Ευκλείδειου) χωροχρόνου αποτελεί ένα μηχανισμό ομαλοποίησης μιας (οποιαδήποτε γενικά) κβαντικής θεωρίας πεδίου, προς πρότυπο μη διαταρακτικής επανακανονικοποίησης της εν' λόγω θεωρίας.

Δύο όρια του πλέγματος οδηγούν στην κλασσική θεωρία:

όριο συνεχούς $\ell \rightarrow 0$

Στο όριο του συνεχούς, η θεωρία ορισμένη πάνω στο πλέγμα οφείλει να συγκλίνει στη θεωρία του συνεχούς που μελετάται, διαφορετικά δε πρόκειται εξ' ορισμού για ομαλοποίηση της εν' λόγω θεωρίας.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η πλεγματική ομαλοποίηση επιτρέπει το σαφή ορισμό του διαφορετικά φορμαλιστικού μέτρου ολοκλήρωσης διαδρομών,

$$\mathcal{D}\phi \dots \dots \dots \prod_x d\phi_x$$

θερμοδυναμικό όριο $\Omega \rightarrow \infty$

Στο θερμοδυναμικό όριο, η θεωρία ορισμένη πάνω στο πλέγμα απαλλάσσεται από τεχνητά φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους πλέγματος (finite size effects).

¹ Η συνάρτηση επιμερισμού στη κβαντική θεωρία πεδίου είναι συνάρτηση των παραμέτρων της δράσης.

1 Θεωρία βαθμωτού πεδίου

Το πεπερασμένο των διαστάσεων του πλέγματος επιτρέπει τον αριθμητικό υπολογισμό στοιχείων της θεωρίας (γεννήτρια συνάρτηση) και υπολογιστικό χειρισμό της θεωρίας καθευατής μέσω εξομοιώσεων, με κόστος τα τεχνητά αυτά φαινόμενα, τα οποία αντιμετωπίζονται με βάρμηση στο πεπερασμένο πλέγμα, προσεγγίζοντας το θερμοδυναμικό όριο. Τα φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους πλέγματος ελαχιστοποιούνται για δεδομένο μέγεθος πλέγματος με κατάλληλη επιλογή συνοριακών συνθηκών.

1.3.1 Το πλέγμα $\mathbb{L}_N(\ell)$, Λ

Ένα πεπερασμένο πλέγμα \mathbb{L} τετραγωνικής διάταξης διακριτοποίησης του ευκλείδειου χωροχρόνου X ορίζεται από μια πλεγματοκή σταθερά μήκους ℓ (διαστάσεων m^{-1}) η οποία αντιπροσωπεύει το μήκος των συνδέσμων των σημείων του πλέγματος και το μέγεθός του, το οποίο εκφράζεται από φυσικούς $(N_\mu)_{\mu=1}^{\dim X}$, όπου $\dim X$ είναι η διάσταση του χωροχρόνου X . Δηλαδή ο συνολικός αριθμός των σημείων του πλέγματος είναι

$$N = \prod_{\mu=1}^{\dim X} N_\mu. \quad (1.3.1)$$

Κατ' επέκταση οι διαστάσεις μήκους του πλέγματος δίνονται από τα $(L_\mu)_{\mu=1}^{\dim X}$ με $L_\mu = \ell N_\mu \forall \mu \in \mathbb{N}_{\dim X}$. Τότε ορίζεται ο (διαστατικός) όγκος του πλέγματος

$$\Omega = \prod_{\mu=1}^{\dim X} L_\mu = \ell N \quad (1.3.2)$$

Τυπικά το πλέγμα αποτελείται από τα σημεία του σαν σύνολο

$$\mathbb{L}_\Omega(\ell) \equiv \{x | n_\mu = \ell^{-1} x_\mu \in \mathbb{Z}_{N_\mu}, \forall \mu \in \mathbb{N}_{\dim X}\}, \quad (1.3.3)$$

και τους συνδέσμους των ως τοπολογία του συνόλου,

$$\Lambda \equiv \{\langle xy \rangle\} = \{(xy) | \|x - y\| \leq \ell\} \subseteq \mathbb{L}_\Omega(\ell) \times \mathbb{L}_\Omega(\ell). \quad (1.3.4)$$

Η αναπαράσταση του τυχόντος πεδίου ϕ ως προς την πλεγματοκή θέση παραμένει $\langle x | \phi \rangle \equiv \phi(x)$ όπου τώρα $x \in \mathbb{L}$.

1.3.1.1 εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot | \cdot \rangle$ στο πλέγμα

Το εσωτερικό γινόμενο πεδίων γίνεται στο πλέγμα

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{L}} d^{\dim X} x \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle \longrightarrow \sum_n \ell^{\dim X} \phi_n^\dagger \psi_n = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle, \quad (1.3.5)$$

όπου $n = \ell^{-1} x$ οι ακέραιες συντεταγμένες του πλέγματος.

Το άθροισμα πάνω στις πλεγματοκές θέσεις στο εξής αναπαρίσταται με ένα σύμβολο ολοκληρώματος

$$\int_X (d^{\dim \mathbb{L} x}) \longrightarrow \sum_n \ell^{\dim X} \equiv \int_{\mathbb{L}} (\ell^{\dim X} x), \quad (1.3.6)$$

το οποίο αναδεικνύει καλύτερα αυτό που αντιπροσωπεύει στο συνεχές-θερμοδυναμικό όριο. Η σταθερά όγκου $\ell^{\dim X}$ με την οποία κανονικά κάνουμε πράξεις στο διακριτό-πεπερασμένο άθροισμα της (1.3.6) αν ενσωματωθεί στα κατάλληλα σύμβολα επιτρέπει την αυτοσυνεπή χρήση του συμβόλου ολοκληρώματος, με τη σταθερά όγκου να είναι παρούσα, μαζί όμως με την μεταβλητή ολοκλήρωσης η οποία εν προκειμένω είναι η πλεγματοκή θέση x .

Συγκεκριμένη η συνάρτηση δέλτα δεν μεταφέρεται αδιάστατη στο πλέγμα, αλλά $\langle x | y \rangle \longrightarrow \ell^{-\dim X} \delta_{xy}$, έτσι ώστε να διατηρηθούν όλες οι ιδιότητες της στα ολοκληρώματα πλέγματος όπως θα ονομάζονται στο εξής τα αθροίσματα πλέγματος.

1.3.1.2 τελεστές παραγώγου στο πλέγμα

Παρατηρούμε πως η αναπαράσταση $\langle x|A|y\rangle$ τελεστή πεδίων A αποκτάει μορφή πίνακα στο πλέγμα και επομένως ο υπολογισμός διαδοτών στο πλέγμα ανάγεται σε αντιστροφή πινάκων που αντιπροσωπεύουν τους τελεστές που ανακύπτουν στις εξισώσεις κίνησης μιας θεωρίας πεδίου.

Παράγωγος πεδίου προς όλες τις κατευθύνσεις (πρόσθια \triangleright και οπίσθια \triangleleft παράγωγος):

$$\langle x|\triangleright_\mu\phi\rangle\equiv\ell^{-1}(\langle x+\ell\partial_\mu|\phi\rangle-\langle x|\phi\rangle)=\langle x|\ell^{-1}(\exp(+\ell\partial_\mu)-1)\phi\rangle, \quad (1.3.7)$$

$$\langle x|\triangleleft_\mu\phi\rangle\equiv\ell^{-1}(\langle x-\ell\partial_\mu|\phi\rangle-\langle x|\phi\rangle)=\langle x|\ell^{-1}(\exp(-\ell\partial_\mu)-1)\phi\rangle, \quad (1.3.8)$$

όπου ∂_μ συνιστά το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση που αντιπροσωπεύει ο δείκτης μ .²

Αναπτύσσοντας στην αναπαράσταση θέσης και αντικαθιστώντας από (1.3.7),

$$\langle\triangleright_\mu\phi|\psi\rangle=\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\triangleright_\mu\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle=\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\ell^{-1}\langle\phi|x+\ell\partial_\mu\rangle\langle x|\psi\rangle+\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\ell^{-1}\langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle. \quad (1.3.9)$$

Θεωρώντας πως η ολοκλήρωση κινείται περιοδικά στο πλέγμα είναι δυνατή η αλλαγή μεταβλητής $x\rightarrow x-\ell\partial_\mu$,

$$\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\ell^{-1}\langle\phi|x+\ell\partial_\mu\rangle\langle x|\psi\rangle=\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\phi|x\rangle\ell^{-1}\langle x-\ell\partial_\mu|\psi\rangle. \quad (1.3.10)$$

Αντικαθιστώντας,

$$\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\phi|x\rangle\ell^{-1}\langle x-\ell\partial_\mu|\psi\rangle-\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\phi|x\rangle\ell^{-1}\langle x|\psi\rangle=\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\phi|x\rangle\langle x|\triangleleft_\mu\psi\rangle=\langle\phi|\triangleleft_\mu\psi\rangle, \quad (1.3.11)$$

δηλαδή $\langle\triangleright_\mu\phi|\psi\rangle=\langle\phi|\triangleleft_\mu\psi\rangle$.

Ορίζεται ο πλεγματοκός τελεστής d' Alambert $\square\equiv\delta_{\mu\nu}\triangleleft_\mu\triangleright_\nu$, από όπου άμεσα προκύπτει πως $\langle\triangleright_\mu\phi|\triangleright_\mu\phi\rangle=\langle\phi|\square|\phi\rangle$. Η μορφή της δράσης του τελεστή \square στο ϕ είναι,

$$\begin{aligned} \langle x|\square|\phi\rangle &= \langle x|\triangleleft_\mu\triangleright_\mu\phi\rangle = \ell^{-1}(\langle x-\ell\partial_\mu|\triangleright_\mu\psi\rangle - \langle x|\triangleright_\mu\psi\rangle) = \ell^{-1}(\ell^{-1}(\langle x|\phi\rangle - \langle x-\ell\partial_\mu|\phi\rangle) - \ell^{-1}(\langle x+\ell\partial_\mu|\phi\rangle - \langle x|\phi\rangle)) = \\ &= \ell^{-2} \sum_{\mu=1}^{\dim\mathbb{L}} (2\langle x|\phi\rangle - \langle x+\ell\partial_\mu|\phi\rangle - \langle x-\ell\partial_\mu|\phi\rangle) = 2\ell^{-2} \sum_{\mu=1}^{\dim\mathbb{L}} \langle x|(1 - \cosh(\ell\partial_\mu))\phi\rangle. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

1.3.2 Συνοριακές συνθήκες πεπερασμένου πλέγματος

00	01	02	03	04
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

00	01	02	03	04
05	06	07	08	09
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

(a) συνεταγμένες

(b) θέσεις μνήμης

Table 1.3.1: δεικτοδότηση πλέγματος

Σε ότι ακολουθεί έχει γίνει διάκριση μεταξύ δύο τρόπων δεικτοδότησης της πλεγματοκικής θέσης (σχήμα 1.3.1): κανονική κατά συνεταγμένες (σχήμα 1.3.1a) και σειριακή κατά θέση αποθήκευσης στη μνήμη (σχήμα 1.3.1b).

1.3.2.1 standard boundary conditions

Κάθε πλεγματοκική θέση συνδέεται με τη γειτονική της σε κυβική διάταξη εκτός κι αν αυτή βρίσκεται στο σύνορο οπότε και απουσιάζει ο σύνδεσμος μη-παράλληλος στους συνδέσμους που οδηγούν σε γειτονικές συνοριακές πλεγματοκικές θέσεις. Είναι η πιο αυθόα επιλογή καθώς εισάγει σημαντικά σφάλματα πεπερασμένου πλέγματος.

Θα αναφερόμαστε στον προαναφερθέντα σύνδεσμο του συνόρου ως τον χαμένο σύνδεσμο, γιατί στις καθιερωμένες συνοριακές συνθήκες αυτός δεν υπάρχει εξ' ορισμού όμως σε άλλες επιλογές αυτός ανακτάται.

²Εδώ ήδη χρησιμοποιείται διαφορετικό σύμβολο για την διακριτή παράγωγο, επομένως υπάρχει ελευθερία χρήσης του συμβόλου ∂_μ της διαφορικής γεωμετρίας για το διανυσματικό πεδίο των συνεταγμένων του πλέγματος στη προκειμένη περίπτωση.

1.3.2.2 periodic boundary conditions

Κάθε συνοριακή πλεγματική θέση συνδέεται μέσω της τοπολογίας Λ με την πλεγματική θέση που βρίσκεται ακριβώς απέναντί της στο αντίθετο σύνορο στην κατεύθυνση του χαμένου συνδέσμου στις καθιερωμένες συνοριακές συνθήκες. Η τοπολογία ενός τέτοιου πλέγματος είναι τοροειδής. Όπως και φαίνεται στο σχήμα 1.3.2, βολική είναι η δεικτοδότηση σε συντεταγμένες x_μ , όπου η συνοριακή συνθήκη γίνεται

$$\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(x + nL_\mu\partial_\mu), \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.13)$$

00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44
00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44
00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44
00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44
00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44

Table 1.3.2: περιοδικές συνοριακές συνθήκες

1.3.2.3 helicoid boundary conditions

Τροποποιούμε τις περιοδικές συνθήκες ώστε ο χαμένος σύνδεσμος να συνδέει κάθε συνοριακή πλεγματική θέση με αυτήν η οποία βρίσκεται απέναντί της, μόνο μετατοπισμένη κατά ένα «πλεγματικό βήμα» προς μια από τις άλλες κατευθύνσεις κατά μήκος του αντίθετου συνόρου.

Η τοπολογία είναι και πάλι τοροειδής αλλά με μετατόπιση στη μία κατεύθυνση, αλλάζοντας την από παραλληλόγραμμα σε ελικοειδή πάνω στον τόρο. (σχήμα 1.3.3)

Όπως είναι κατανοητό, εδώ βολική είναι η δεικτοδότηση σε θέσεις μνήμης, και η σχετική συνοριακή συνθήκη γίνεται

$$\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}\left(x + \sum_n \partial_{\mu_n} \prod_{\mu=1}^{\mu_n} L_\mu\right), \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \forall (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \quad (1.3.14)$$

Δεν αλλάζει κάτι ουσιαστικό σε σχέση με τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες, εκτός του ότι είναι πιο αποδοτικές σε θέματα χρήσης μνήμης, αφού η τοπολογία του πλέγματος τότε υπολογίζεται δυναμικά και συνεχώς αντί να αποθηκευτεί μια φορά στη μνήμη. Αυτό σημαίνει πως γλιτώνουμε μνήμη, σε βάρος όμως υπολογιστικού χρόνου, μια αντιμετώπιση ιδιαίτερα γρήγορη όταν πρόκειται για αρκετά μεγάλα πλέγματα τα οποία δε μπορούν να συγκρατηθούν στη μνήμη.

1.4 Discrete Fourier Transform

$\forall |\phi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ έχει νόημα η αναπαράσταση Fourier του πεδίου

$$\langle p|\phi\rangle \equiv \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle x|\phi\rangle \text{ και } \langle x|\phi\rangle \equiv \int_{\mathbb{L}^\dagger} \varrho^{\dim X} p \langle x|p\rangle \langle p|\phi\rangle, \quad (1.4.1)$$

με πυρήνα

$$\langle x|p\rangle := \exp(i2\pi x_\lambda p_\lambda), \quad (1.4.2)$$

όπου $x_\lambda = \ell n_\lambda$ και $p_\lambda = \delta_{\lambda\mu\nu} \varrho_\mu k_\nu \forall n_\lambda, k_\lambda \in \mathbb{Z}_{N_\lambda} \forall \lambda \in \mathbb{N}_{\dim \mathbb{L}}$, οπότε και $\ell \varrho_\lambda = N_\lambda^{-1}$ ή $\varrho_\lambda = L_\lambda^{-1}$, $F_\lambda = \delta_{\lambda\mu\nu} \varrho_\mu N_\nu$. Το μέτρο ολοκλήρωσης γίνεται $(\ell \varrho)^{\dim X} = N^{-1} \iff \varrho^{\dim X} = \Omega^{-1}$.

Ο αντίστροφος του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι κι αυτός διακριτός σε συνέπεια με το γεγονός ότι ο χώρος Hilbert είναι πεπερασμένης διάστασης, πέρα από την πληρότητα και ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης στους χώρους Hilbert γενικότερα.

Για κάθε ορθοκανονική βάση $|\phi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L} \times \mathbb{L}(\varphi)}$ στον χώρο $\mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ των βαθμωτών πεδίων με $|\phi(a)\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}(\varphi)}$, $\forall a \in \mathbb{L}$ πάνω στο πεπερασμένο πλέγμα \mathbb{L} , ορίζεται η αναπαράσταση $\langle \phi|\psi\rangle \in \mathbb{F}$ του τυχόντος βαθμωτού πεδίου $|\psi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$,

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} a |\phi(a)\rangle \langle \phi(a)|\psi\rangle \equiv \int_{\mathbb{L}(\varphi)} \varphi^{\dim X} \phi |\phi\rangle \langle \phi|\psi\rangle, \quad (1.4.3)$$

όπου οι αντίστοιχες παράμετροι δομής του πλέγματος είναι

$$\varphi_\mu(a) = \ell \frac{\partial}{\partial a_\mu} \phi(a) \text{ με αντίστοιχο μέτρο } \varphi^{\dim \mathbb{L}}(a) = \ell^{\dim X} \prod_{\mu=1}^{\dim \mathbb{L}} \varphi_\mu(a), \quad (1.4.4)$$

όταν το πλέγμα απεικονιστεί μέσω της απεικόνισης $\phi: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{F}^{\mathbb{L}}: x \mapsto \phi(x)$ των σημείων του $x \in \mathbb{L}$, στο $\mathbb{L}(\varphi)$.

Οι διαδότες 2 σημείων διέπονται από συμμετρία μεταφοράς $\langle \langle x|\phi\rangle \langle \phi|y\rangle \rangle \equiv G(x-y)$, επομένως

$$\langle p|G\rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} (x-y) \langle p|x-y\rangle G(x-y) \text{ και } G(x-y) = \int_{\mathbb{L}^\dagger} \varrho^{\dim X} p \langle x-y|p\rangle \langle p|G\rangle. \quad (1.4.5)$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (όπως και κάθε μετασχηματισμός από μία αναπαράσταση στην άλλη) αποτελεί αυτομορφισμό (bijection) του χώρου $\mathbb{F}^{\mathbb{L}}$, έχει δηλαδή εκτός των άλλων, καλά (διπλά) ορισμένο αντίστροφο, με συνέπεια όλες οι ιδιότητες που ισχύουν μετασχηματίζοντας από την $|x\rangle$ στην $|p\rangle$ αναπαράσταση να ισχύουν συμμετρικά, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις κάθε φορά, και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Ως εκ' τούτου όλες οι ιδιότητες του μετασχηματισμού αποδεικνύονται σε μία κατεύθυνση μόνο, χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Επιπλέον, σε όποιες ιδιότητες κρίνεται σκόπιμο, θα αποδεικνύεται η γενική εκδοχή της ιδιότητας για κάθε αναπαράσταση.

1.4.1 Βασικές ιδιότητες διακριτού μετασχηματισμού Fourier σε πλέγμα

1.4.1.1 linearity

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ και $\forall |\phi\rangle, |\chi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}, \exists |\omega\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}$ αναπαράσταση τέτοια, ώστε $\langle \omega(a)|\chi\rangle = \alpha \langle \omega(a)|\phi\rangle + \beta \langle \omega(a)|\psi\rangle \forall a \in \mathbb{L}$, τότε $\langle \omega|\chi\rangle = \alpha \langle \omega|\phi\rangle + \beta \langle \omega|\psi\rangle$, $\forall |\omega\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}$, σε συνέπεια με το φορμαλισμό Dirac.

Κάθε μετασχηματισμός από μία αναπαράσταση σε μια άλλη συνίσταται από ένα άθροισμα πάνω τα πεδία βάσης της αρχικής αναπαράστασης, και συνιστά με αυτόν τον τρόπο γραμμικό τελεστή. Έτσι, αν $|x\rangle$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $|\phi\rangle$ και $|\psi\rangle$ σε μία δεδομένη αναπαράσταση, μέσω γραμμικών μετασχηματισμών οι οποίοι σέβονται τη γραμμικότητα, θα είναι σε κάθε αναπαράσταση. Έχει τότε νόημα η έκφραση

$$|\chi\rangle = \alpha |\phi\rangle + \beta |\psi\rangle,$$

όπου η γραμμικότητα των μετασχηματισμών εκφράζεται συνοπτικά με αυτόν τον τρόπο στο φορμαλισμό Dirac.

Σε ότι ακολουθεί, $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\varphi) \forall |\phi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L} \times \mathbb{L}(\varphi)}$ αναπαράσταση, βάσει του ισομορφισμού που ορίζει ο μετασχηματισμός σε και από αυτήν από και σε οποιαδήποτε αναπαράσταση. Εκεί που μάλιστα είναι χρήσιμο να γίνει η διάκριση (στις ολοκληρώσεις δηλαδή) το εκάστοτε lattice spacing φαίνεται στο μέτρο τις ολοκληρώσεως, και το lattice spacing είναι το μοναδικό χαρακτηριστικό που διαχωρίζει τα ισόμορφα πλέγματα.

1.4.1.2 translation and modulation

$\forall a \in \mathbb{L}$, και $\forall |\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ με $\langle x|\chi\rangle = \langle x - a|\phi\rangle \forall x \in \mathbb{L}$, $\langle p|\chi\rangle = \langle p|a\rangle\langle p|\phi\rangle$ και αντίστροφα.

$$\begin{aligned} \langle p|\chi\rangle &= \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle x|\chi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle x - a|\phi\rangle = \int_{(\mathbb{L}-a) \bmod \mathbb{L} \simeq \mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x + a\rangle \langle x|\phi\rangle = \\ &= \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle p|a\rangle \langle x|\phi\rangle = \langle p|a\rangle \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle x|\phi\rangle = \langle p|a\rangle \langle p|\phi\rangle. \end{aligned}$$

Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει εγγενώς για κάθε διακριτό μετασχηματισμό Fourier. Η ιδιότητα είναι «δανεισμένη» από το συνεχή μετασχηματισμό Fourier σε κατάλληλους χώρους, οι οποίοι εκτός των άλλων είναι άπειρη με την έννοια της μετρικής (ή τοπολογίας τους) αλλά και με την πληθικότητά τους φυσικά. Οπότε για ένα πεπερασμένο πλέγμα, η ολοκλήρωση πέφτει εκτός πλέγματος μέσω της ιδιότητας αυτής, εκτός αν υπάρχουν συνοριακές συνθήκες που να επιτρέπουν την ολοκλήρωση σε χώρο ισόμορφο προς τον αρχικό: το πιο προφανές παράδειγμα είναι οι περιοδικές συνθήκες του πλέγματος (υποενότητα 1.3.2), όπως και χρησιμοποιούνται στην ανωτέρω απόδειξη.

Σε ότι ακολουθεί, όλες οι αναπαραστάσεις $|\pi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}$ πάνω στο πλέγμα \mathbb{L} δίνουν περιοδικές συναρτήσεις. $\forall \pi \in \mathbb{L}(\omega)$ και $\forall |\phi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$, $\langle \pi|\phi\rangle \equiv \langle (\pi\omega) \bmod N|\phi\rangle = \langle \pi + n\omega N|\phi\rangle$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Είναι εύκολο να εννοηθεί $\partial_\mu \equiv i2\pi p_\mu$, όμως σε αυτό το context p λειτουργεί απλά ως μια τετράδα βαθμωτών πεδίων και όχι ως τελεστής πάνω στα πεδία εντός bra-ket συμβόλου. Παρόλα αυτά η συμπεριφορά του ταυτοποιείται φορμαλιστικά με αυτήν της μετατόπισης στην αναπαράσταση θέσης, $\langle x|\exp(a_\mu \partial_\mu)|\phi\rangle \longleftrightarrow \langle p|\exp(i2\pi a_\mu p_\mu)|\phi\rangle$.

Προσοχή εφίσταται στην διγραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου. Χάρη στο φορμαλισμό Dirac, έχουμε απαλλαχτεί από την αναγκαιότητα αυτής της ιδιότητας αφού γράφεται

$$\langle \alpha\phi + \beta\chi|\gamma\psi + \delta\omega\rangle \neq (\alpha\langle\phi| + \beta\langle\chi|)(\gamma|\psi\rangle + \delta|\omega\rangle) = \alpha\gamma\langle\phi|\psi\rangle + \alpha\delta\langle\phi|\omega\rangle + \beta\gamma\langle\chi|\psi\rangle + \beta\delta\langle\chi|\omega\rangle, \quad (1.4.6)$$

όπου η διγραμμικότητα ποια εκφυλίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα.³ Οποιοσδήποτε πράξεις εντός των bra ή ket αποτελούν πρωτίτως παραβίαση του φορμαλισμού, επομένως το περιεχόμενο του πρώτου μέλους της παράστασης εξαρτάται από την αναπαράσταση στην οποία αναπτύσσεται. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο πυρήνας Fourier που χρησιμοποιήθηκε στην ανωτέρω απόδειξη,

$$\sum_n \sum_m \langle x_n|p_m\rangle \neq \left\langle \sum_n x_n \left| \sum_m p_m \right. \right\rangle = \prod_n \prod_m \langle x_n|p_m\rangle, \quad (1.4.7)$$

όπου το αποτέλεσμα εξαρτάται από το φύση των implied συναρτήσεων (εδώ εκθετική) και καμία σχέση δεν έχει με τη διγραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου, κάνουμε δηλαδή πράξεις με ορίσματα των εν λόγω συναρτήσεων εδώ.

1.4.1.3 scaling

$\forall A \in GL_{\mathbb{L}}(\mathbb{L}) := \{A | \det A \neq 0\}$ και $\forall |\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ με $\langle x|\chi\rangle = \langle Ax|\phi\rangle$, $\langle p|\chi\rangle = |\det A|^{-1} \langle (A^{-1})^\dagger p|\phi\rangle$ και αντίστροφα.

³ενσωματώνουμε δηλαδή τη διγραμμικότητα στο φορμαλισμό με αυτόν τον τρόπο

$$\langle p|\chi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle x|\chi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle Ax|\phi\rangle = \int_{A(\mathbb{L}) \simeq \mathbb{L}} |\det A|^{-1} \ell^{\dim X} x \langle p|A^{-1}x\rangle \langle x|\phi\rangle,$$

όπου

$$\langle p|A^{-1}x\rangle = \exp(-i(p_{\mu}(A^{-1})_{\mu\nu}x_{\nu})) = \exp(x_{\mu}((A^{-1})^{\dagger})_{\mu\nu}p_{\nu}) = \langle (A^{-1})^{\dagger}p|x\rangle,$$

οπότε

$$\langle p|\chi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle x|\chi\rangle = |\det A|^{-1} \int_{A(\mathbb{L}) \simeq \mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle (A^{-1})^{\dagger}p|x\rangle \langle x|\phi\rangle = |\det A|^{-1} \langle (A^{-1})^{\dagger}p|\phi\rangle.$$

Στην περίπτωση που $A = A^{\dagger}$, $\langle p|\chi\rangle = |\det A|^{-1} \langle A^{-1}p|\phi\rangle$ ενώ, για $A \in U_N(\mathbb{L}) \equiv \{A | \det A = \exp i\vartheta, \vartheta \in \mathbb{R}\}$, $A^{-1} = A^{\dagger}$ και άρα $\langle p|\chi\rangle = \langle Ap|\phi\rangle$, το οποίο είναι αναμενόμενο αφού οι ορθομοναδιαίοι πίνακες σέβονται κάθε είδους εσωτερικό γινόμενο.

1.4.1.4 conjugation

Υποθέτουμε πως \mathbb{F} είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα (με μεταθετικό γινόμενο: $\forall \phi, \psi \in \mathbb{F}, \phi\psi = \psi\phi$) και πως $\forall \phi \in \mathbb{F}, \exists \phi^{\dagger} \in \mathbb{F}$ (συζυγές) τέτοιο ώστε $(\phi^{\dagger})^{\dagger} = \phi$ και $\forall \psi \in \mathbb{F}, (\phi\psi)^{\dagger} = \phi^{\dagger}\psi^{\dagger}$ και $(\phi + \psi)^{\dagger} = \phi^{\dagger} + \psi^{\dagger}$. Τότε ορίζεται ποια και το συζυγές του $|\phi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ πεδίο $\langle \phi| \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$,

$$\int_{\mathbb{L}} \varpi^{\dim X} \pi \langle \phi|\pi\rangle \langle \pi| \equiv \langle \phi| := |\phi\rangle^{\dagger} \equiv \int_{\mathbb{L}} \varpi^{\dim X} \pi |\pi\rangle \langle \pi|\phi\rangle^{\dagger} \quad (1.4.8)$$

$\forall |\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ με $\langle x|\chi\rangle = \langle \phi|x\rangle \forall x \in \mathbb{L}$, $\langle p|\chi\rangle = \langle \phi|\varrho N - p\rangle$ και αντίστροφα.

$$\langle p|\chi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle p|x\rangle \langle x|\chi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle \phi|x\rangle \langle x|\varrho N - p\rangle = \langle \phi|\varrho N - p\rangle,$$

αφού

$$\langle x|\varrho N - p\rangle \equiv \exp(i2\pi x_{\lambda} \delta_{\lambda\mu\nu} \varrho_{\mu} N_{\nu}) \exp(-i2\pi x_{\lambda} p_{\lambda}) = \langle p|x\rangle.$$

Ισοδύναμα το θεώρημα λέει ότι η σχέση συζυγίας μιγαδικών πεδίων δεν διατηρείται με το μετασχηματισμό σε άλλη αναπαράσταση, η αντιστοιχία δηλαδή απεικονίζεται εκ' νέου.

Τέλος, σε απόλυτη συνέπεια με το φορμαλισμό Dirac, ισχύει

$$\langle x|\chi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \langle x|p\rangle \langle p|\chi\rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim \mathbb{L}} p \langle \phi|\varrho N - p\rangle \langle \varrho N - p|x\rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \langle \phi|p\rangle \langle p|x\rangle = \langle \phi|x\rangle$$

1.4.2 Θεωρήματα διακριτού μετασχηματισμού Fourier σε πλέγμα

1.4.2.1 Plancherel-Parseval theorem

$\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$, $\langle \phi | \psi \rangle$ είναι αναλλοίωτο για κάθε αναπαράσταση $|\pi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}$ (σε συνέπεια και με το φορμαλισμό Dirac).

Η απόδειξη ανακύπτει φυσιολογικά από το φορμαλισμό Dirac, $\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ και $|\pi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}$

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv \int_{\mathbb{L}} \varpi^{\dim \mathbb{L}} \pi \langle \phi | \pi \rangle \langle \pi | \psi \rangle$$

1.4.2.2 circular convolution theorem

$\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$, η συνέλιξη $*$ δύο πεδίων ορίζεται για κάθε αναπαράσταση ως

$$\langle \rho | \phi * \psi \rangle \equiv \int_{\mathbb{L}} \varpi^{\dim X} \pi \langle \rho - \pi | \phi \rangle \langle \pi | \psi \rangle, \quad \langle \rho - \pi | \phi \rangle = \phi((\rho - \pi) \bmod (\varpi N)) \quad (1.4.9)$$

όπου εννοείται πως $\rho - \pi \equiv ((\rho - \pi)\varpi) \bmod N$. Τότε $\forall x \in \mathbb{L}$,

$$\langle x | \phi \psi \rangle \equiv \langle x | \phi \rangle \langle x | \psi \rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \langle x | p \rangle \langle p | \phi * \psi \rangle \equiv \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \langle x | p \rangle \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} q \langle p - q | \phi \rangle \langle q | \psi \rangle \quad (1.4.10)$$

$$\begin{aligned} \langle x | \phi \psi \rangle &\equiv \langle x | \phi \rangle \langle x | \psi \rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \langle x | p \rangle \langle p | \phi \rangle \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} q \langle x | q \rangle \langle q | \psi \rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} q \langle p | \phi \rangle \langle x | p \rangle \langle x | q \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} q \langle p | \phi \rangle \langle x | p + q \rangle \langle q | \psi \rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \langle x | p \rangle \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} q \langle p - q | \phi \rangle \langle q | \psi \rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} p \langle x | p \rangle \langle p | \phi * \psi \rangle \end{aligned}$$

Εδώ γίνεται ελαφριά κατάχρηση του φορμαλισμού Dirac σε αντικαταβολή με το γεγονός ότι οι πράξεις εντός του ket συνιστούν πράξεις εντός του ορίσματος. Η χρήση της σύμβασης πάραυτα γίνεται ανεκτή από διαστατική ασυμβατότητα του ορίσματος. Έτσι για παράδειγμα $\langle x | pq \rangle \equiv \langle x | p \rangle \langle x | q \rangle \equiv \langle x | p + q \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle x | pq \rangle &\equiv \langle x | p \rangle \langle x | q \rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} s \langle x | s \rangle \langle s | p * q \rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} s \langle x | s \rangle \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} t \langle s - t | p \rangle \langle t | q \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} s \langle x | s \rangle \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} t \langle s | p + t \rangle \langle p + t | p + q \rangle = \int_{\mathbb{L}} \varrho^{\dim X} s \langle x | s \rangle \langle s | p + q \rangle = \langle x | p + q \rangle \end{aligned}$$

Η σύμβαση είναι δηλαδή συνεπής με το φορμαλισμό Dirac με μόνη θυσία τη γνώση του τι σημαίνει στην πραγματικότητα ο πολλαπλασιασμός εντός του bra ή ket συμβόλου, εντός δηλαδή του ορίσματος του εν' λόγω πεδίου, θυσία η οποία είναι μικρή δεδομένου ότι για τυχόντα πεδία $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ υπάρχει η ελευθερία να υποθέσουμε τι σημαίνει ο πολλαπλασιασμός εντός του ορίσματος, όπως και δείχθηκε παραπάνω για το πιο σημαντικό παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης.

Είναι επίσης αξιοσημείωτο πως μπορεί να επεκταθεί ο συμβολισμός ώστε να ισχύει αφηρημένα για κάθε αναπαράσταση. Έτσι $\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$, ορίζεται $|\phi \psi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L}}$ τέτοιο ώστε για κάθε αναπαράσταση $|\pi\rangle \in \mathbb{F}^{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}$, το γινόμενο αποκτά συγκεκριμένο νόημα. Έτσι για παράδειγμα $\langle x | \phi \psi \rangle \equiv \langle x | \phi \rangle \langle x | \psi \rangle$ ενώ $\langle p | \phi \psi \rangle \equiv \langle p | \phi * \psi \rangle$.

2 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου

2.1 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης

Έστω $S = S_0 - j\Gamma$ η μιγαδική δράση και \mathcal{O} μια παρατηρήσιμη ποσότητα. Παρατηρούμε ότι στον εντροπικό παράγοντα της συνάρτησης επιμερισμού της θεωρίας

$$\int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) = \int \mathcal{D}\phi |\exp(-S[\phi])| \exp(j\Gamma),$$

όπου $|\exp(-S[\phi])| = \exp(-S_0[\phi])$, υπάρχει ένας παράγοντας φάσης για αυτό και η θεωρία της πραγματικής δράσης S_0 ονομάζεται phase-quenched, γιατί καταπίνει τη φάση του εντροπικού παράγοντα την οποία εισάγει η φανταστική δράση, και ασχολείται μόνο με το μέτρο του. Λαμβάνοντας υπόψη το ολοκλήρωμα επιμερισμού του phase-quenched μοντέλου, αποκτάει νόημα η αναμενόμενη τιμή του φασικού εντροπικού παράγοντα $\exp j\Gamma$ στο phase-quenched μοντέλο

$$\langle \exp j\Gamma \rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi]) \exp(j\Gamma)}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi])}.$$

Έστω $\langle \mathcal{O} \rangle_0$ η αναμενόμενη τιμή της ποσότητας \mathcal{O} στο phase-quenched μοντέλο,

$$\langle \mathcal{O} \rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S_0[\phi])}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi])}.$$

Η αναμενόμενη τιμή $\langle \mathcal{O} \rangle$ του μεγέθους στο πλήρες μοντέλο μπορεί να προσεγγιστεί,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S[\phi])}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi])} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S_0[\phi]) \exp(j\Gamma)}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi]) \exp(j\Gamma)} = \frac{\langle \mathcal{O} \exp(j\Gamma) \rangle_0}{\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0}. \quad (2.1.1)$$

Η προσέγγιση αυτή παρουσιάζει δύο θεμελιώδη προβλήματα:

overlap problem

Η καθιερωμένη τεχνική δειγματοληψίας σε μια εξομοίωση Monte Carlo ενός συστήματος με δράση $S[\phi]$ γίνεται με πιθανότητα $\exp(-S[\phi])$ όταν η δράση είναι πραγματική, με σκοπό να συλλέγονται μετρήσεις με υψηλή συνεισφορά στη συνάρτηση επιμερισμού. Ένα σύνηθες πρόβλημα είναι ότι η περιοχή των configurations υψηλής συνεισφοράς στο ολοκλήρωμα επιμερισμού Z δεν ταυτίζεται ή είναι κοντά απαραίτητα σε στην περιοχή υψηλής συνεισφοράς στο σταθμισμένο ολοκλήρωμα $Z\langle \mathcal{O} \rangle$. Έτσι ακόμη και αν μπορούσαμε να δειγματοληπτήσουμε με βάρος $\mathcal{O} \exp(-S[\phi])$ θα είχε πρόβλημα

2 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου

το ολοκλήρωμα Z . Όταν οι περιοχές μέγιστης συνεισφοράς στα ολοκληρώματα που εμπλέκονται στον αριθμητικό υπολογισμό της $\langle \mathcal{O} \rangle$ έχουν μικρή επικάλυψη, τότε η στατιστική των μετρήσεων είναι χαμηλή και απαιτείται σοβαρά πολλαπλάσιος χρόνος υπολογισμού της αναμενόμενης τιμής $\langle \mathcal{O} \rangle$ από ότι της συνάρτησης επιμερισμού.

Το πρόβλημα γίνεται εμφανές σε θεωρίες με μιγαδική δράση τόσο στον υπολογισμό της $\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0$ όσο και της $\langle \mathcal{O} \exp(j\Gamma) \rangle_0$.

sign problem

Ο υπολογισμός της $\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0$ είναι πολύ αργός [6, 11] λόγω του διακυμαντικού χαρακτήρα της υπολογιζόμενης ποσότητας, η οποία συμπεριφέρεται περιοδικά εν γένει λόγω του μιγαδικού εκθετικού.¹

Προσεγγίζοντας το θερμοδυναμικό όριο (για επαρκώς μεγάλα μεγέθη πλέγματος),

$$\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0 = \langle \exp(-j\Gamma) \rangle_0 = \frac{Z}{Z_0} \simeq \exp(-\Omega \Delta f_1),$$

όπου Z_0 είναι η συνάρτηση επιμερισμού της phase-quenched θεωρίας

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi]),$$

και Δf είναι εξ' ορισμού η διαφορά της πυκνότητας ελεύθερης ενέργειας μεταξύ πλήρους και phase-quenched θεωρίας.

Υπολογίζοντας το σχετικό σφάλμα από N μετρήσεις στη κανονική συλλογή,

$$\frac{\Delta \langle \exp(j\Gamma) \rangle_0}{\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0} = \frac{\sqrt{\langle \exp(j\Gamma) \exp(-j\Gamma) \rangle_0 - \langle \exp(j\Gamma) \rangle_0 \langle \exp(-j\Gamma) \rangle_0}}{\sqrt{N} \langle \exp(j\Gamma) \rangle_0} \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(\Omega \Delta f_1).$$

συμπεραίνεται ότι για ικανοποιητική ακρίβεια στον υπολογισμό απαιτούνται περίπου τουλάχιστον

$$N \propto (\exp \Omega)^2$$

ασυσχέτιστες μετρήσεις, το οποίο είναι απαγορευτικό για βάρθρωση του πλέγματος σε μια εξομοίωση υλοποιήσιμου χρόνου για το βασικό πλέγμα.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι αντιμετώπισης του προβλήματος του προσήμου στον στοχαστικό υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων, σε διάφορα contexts. Το γεγονός ότι το sign problem στη γενικότητα του ανήκει στα NP-hard problems σημαίνει πως δεν έχει γενική επίλυση σε πολυωνυμικό χρόνο, αυτό φυσικά όμως δεν αποκλείει επίλυση ειδικών προβλημάτων, και τελικά ένα σύνολο θεωριών να επιλύονται από ένα σύνολο αλληλο-επικαλυπτόμενων μεθόδων. Με αλληλο-επικάλυψη εννοούμε τουλάχιστον δύο προσεγγίσεις να εφαρμόζονται σε ένα δεδομένο πρόβλημα, και αυτό ισχύει στην προκειμένη για τις βαθμωτές θεωρίες με μιγαδική δράση και στην χρωμοδυναμική στο όριο μεγάλης βαρυονικής πυκνότητας, το οποίο αποτελεί και μεγάλης προτεραιότητας πρόβλημα προς επίλυση.

2.2 Κβαντική Χρωμοδυναμική

Ένα από τα κυριότερα προβλήματα είναι ο προσδιορισμός του χώρου φάσεων της χρωμοδυναμικής, συγκεκριμένα ως προς τη θερμοκρασία (T ή β) και βαρυονική πυκνότητα (χημικό δυναμικό μ). Στις περιοχές με πεπερασμένη θερμοκρασία και πυκνότητα αναμένεται η φυσική να είναι ανεξάρτητη του χημικού δυναμικού (το φαινόμενο αυτό ονομάζεται Silver-Blaze), το οποίο δύναται να μελετηθεί με διάφορες μεθόδους. Από την άλλη, η περιοχή υψηλού χημικού δυναμικού παρουσιάζει

¹Για κάθε μιγαδική τυχαία μεταβλητή $x \in \mathbb{C}$ με αναμενόμενη τιμή $\langle x \rangle$, η διακύμανση είναι

$$\langle (x - \langle x \rangle)(x - \langle x \rangle)^\dagger \rangle = \langle xx^\dagger - x\langle x \rangle^\dagger - \langle x \rangle x^\dagger + \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger \rangle = \langle xx^\dagger \rangle - \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger - \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger + \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger = \langle xx^\dagger \rangle - \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger. \quad (2.1.2)$$

ιδιαίτερο ενδιαφέρον και παράλληλα αρκετές δυσκολίες, διότι το φανταστικό μέρος της δράσης γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό δυσχεραίνοντας τις εξομοιώσεις Monte Carlo στην περιοχή αυτήν.

Ακολουθεί μια βιβλιογραφική λίστα (όπως καταγράφεται στο [8]) με τις μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα στην προσπάθεια επίλυση του προβλήματος μιγαδικής δράσης στις διάφορες περιοχές του χώρου φάσεων, χωρίς η λίστα να είναι εξαντλημένη, καθώς πρόκειται για ένα πολύ ενεργό πεδίο έρευνας.

χαμηλή βαρυονική πυκνότητα

[14] μέθοδοι reweighting

[15, 16] μέθοδος του αναπτύγματος Taylor

[17, 18] μέθοδος φανταστικού χημικού δυναμικού μ

υψηλή βαρυονική πυκνότητα:

[19, 20, 21] μέθοδος μιγαδικής δυναμικής Langevin (βλ. επίσης [5, 6, 7] καθώς και το υπόλοιπο της παρούσας εργασίας για λεπτομέρειες)

[22] μέθοδοι worm (βλ. επίσης [12] καθώς και υποενότητα 2.3.3 για λεπτομέρειες και γενίκευση του αλγορίθμου worm σε εφαρμογή μεθόδων δυϊκής αναπαράστασης της δράσης)

[23, 24] ενεργές θεωρίες τριών διαστάσεων

[25] μέθοδος ιστογράμματος

[26, 27, 28, 29] μέθοδος παραγοντοποίησης (factorization) ή πυκνότητας καταστάσεων

[30] μέθοδος γενικευμένου φανταστικού χημικού δυναμικού μ

[31] μέθοδος αναπτύγματος της fugacity

[32] μέθοδος διαστατικής ελάττωσης

[33, 34] όριο μεγάλου N_c (αριθμού χρωμάτων)

2.2.1 Υψηλή πυκνότητα μέσου, χαμηλή θερμοκρασία

2.3 Σχετικιστικό αέριο Bose (φαινόμενο Silver-Blaze)

Η ιδέα κλειδί είναι η εισαγωγή μιας νέας παραμέτρου τ η οποία εξυπηρετεί ως κάποιος χρόνος εξέλιξης του πεδίου ϕ (έστω βαθμωτή θεωρία πεδίου), και η οποία εισάγει μια δυναμική στο πεδίο ως γενίκευση της κλασική εξίσωσης κίνησης

$$\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] = 0, \quad (2.3.1)$$

θα έχει δηλαδή τη γενική μορφή

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \phi(\tau) = \mathcal{F}\left(\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi]\right). \quad (2.3.2)$$

Η αντίστοιχη κβαντική θεωρία πεδίου ορίζεται πλήρως από το βασικό Feynman path integral ή συνάρτηση επιμερισμού

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \quad (2.3.3)$$

όπου και κάθε κλασική εξίσωση μεταφράζεται σε εξίσωση αναμενόμενων τιμών. Η γνώση της συνάρτησης επιμερισμού Z καθορίζει και την αναμενόμενη τιμή κάθε παρατηρήσιμης ποσότητας \mathcal{O} ,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \mathcal{O}[\phi]. \quad (2.3.4)$$

2.3.1 Μέθοδος μιγαδικής Langevin

Η παραπάνω συλλογιστική αξιοποιείται από την μέθοδο της μιγαδικής δυναμικής Langevin στον υπολογισμό του (2.3.3) η οποία εισήχθη από τους Parigi και Wu [3] και αναπτύχθηκε αργότερα από Gert Aarts et. al. [6] για την επίλυση του sign problem στο μοντέλο του χβαντικού σχετικιστικού αερίου Bose [5].

Η δυναμική εξίσωση (2.3.2) αποκτά την μορφή μιας εξίσωσης Langevin

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(\tau) = -\frac{\delta}{\delta \phi} S[\phi(\tau)] + \eta(\tau), \quad (2.3.5)$$

όπου η είναι ένα πεδίο θορύβου, η μορφή του δηλαδή δεν είναι συγκεκριμένη αλλά τυχαία στον χώρο των πεδίων με κατανομή που συγκεκριμένα επιλέγεται gaussianή,

$$\rho[\eta] = \rho_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{4} \int d\tau \langle \eta(\tau) | \eta(\tau) \rangle\right), \quad \rho_0 = \int \mathcal{D}\eta \exp\left(-\frac{1}{4} \int d\tau \langle \eta(\tau) | \eta(\tau) \rangle\right), \quad (2.3.6)$$

ή γενικότερα να ικανοποιεί τις πρώτες συναρτήσεις συσχετισμού,

$$\langle \eta(\tau) \rangle = 0 \text{ και } \langle \eta(\tau) \eta(\tau') \rangle = 2\delta(\tau - \tau'). \quad (2.3.7)$$

Η τυχαιότητα του θορύβου μεταφέρεται μέσω της στοχαστικής πια εξίσωσης Langevin (2.3.5) σε τυχαιότητα του πεδίου ϕ το οποίο αποτελεί λύση της εξίσωσης Langevin. Γενικότερα, οποιαδήποτε παρατηρήσιμη ποσότητα \mathcal{O} η οποία προκύπτει ως συναρτησιακό του πεδίου ϕ αποκτάει στοχαστικό χαρακτήρα και έχει νόημα η αναμενόμενη της τιμή πάνω στο ensemble του θορύβου

$$\langle \mathcal{O}(\tau) \rangle = \int \mathcal{D}\eta \rho[\eta] \mathcal{O}[\phi(\tau)], \quad \rho[\eta] = \exp\left(-\frac{1}{4} \langle \eta | \eta \rangle\right), \quad (2.3.8)$$

το οποίο μοιάζει επίσης με μία “συναγή” κβάντωσης του πεδίου ϕ , μόνο που υπάρχει η επιπλέον παράμετρος τ η οποία τώρα ονομάζεται χρόνος Langevin. Λόγω του ασυσχετισμού στο χρόνο του θορύβου, κάθε τ -slice της κατανομής έχει ακριβώς την ίδια μορφή. Σύμφωνα με την εικασία των Parigi και Wu, στο όριο $\tau \rightarrow \infty$ το πεδίο $\phi_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau)$ είναι το πεδίο της εκάστοτε κβαντικής θεωρίας βαθμωτού πεδίου που μελετάται, δηλαδή για κάθε παρατηρήσιμη ποσότητα \mathcal{O} ,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \mathcal{O}(\tau) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \mathcal{O}[\phi], \quad (2.3.9)$$

ανακτάται δηλαδή το Feynman path integral ως όριο μιας στοχαστικής διαδικασίας. Εφαρμοζόμενο στην επίλυση του αριθμητικού sign problem, υπάρχει ελπίδα πως η εξίσωση Langevin (2.3.5), όταν ο χρόνος Langevin διακριτοποιηθεί $\tau = n\epsilon$ για βήμα χρόνου ϵ , παράγει με φυσικό τρόπο μια markovιανή αλυσίδα στον χώρο των ϕ , η οποία οδηγεί στη σημαντική περιοχή για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της συνάρτησης επιμερισμού και (αν δεν υποφέρουν από overlap problem) της αναμενόμενης τιμής της τυχούσας παρατηρήσιμης ποσότητας \mathcal{O} .

Μέχρι τώρα [5] φαίνεται πως στις εξομοιώσεις επιτυγχάνεται θερμοποίηση (στατική ισορροπία η οποία αντιστοιχεί στο θεωρητικό όριο $\tau \rightarrow \infty$), για κατάλληλη επιλογή του βήματος Langevin, και οι παρατηρήσιμες ποσότητες φαίνεται να αναδεικνύουν του φαινόμενο Silver Blaze που είναι γνωστό ότι παρουσιάζει το σχετικιστικό αέριο Bose για κρίσιμο χημικό δυναμικό $\mu_c \simeq 1.15$. Η μελέτη της μεθόδου στο σχετικιστικό αέριο Bose αποτελεί ενισχυτική του [5] εργασία με σκοπό τον επαναφορμαλισμό του προβλήματος σε πιο βολικούς όρους, και επαλήθευση βάση κώδικα γραμμένου από την αρχή.

Για αυτοσυνέπεια του μηχανισμού Langevin στην περίπτωση μιγαδικών πεδίων, είναι αναγκαία η επέκταση των μιγαδικών πεδίων $\phi \in \mathbb{C}$ σε διπλομιγαδικά $\phi \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ (βλ. κεφάλαιο 3), το οποίο είναι ισοδύναμο με την εισαγωγή επιπλέον της i μιγαδικής μονάδας j , τέτοιας ώστε $ij = ji$.²

2.3.2 Lefschetz thimbles

Η μέθοδος αυτή βασίζεται έντονα στη θεωρία Morse και την επέκταση της στους μιγαδικούς από τους Picard και Lefschetz, και συνοψίζεται από τον εναλλακτικό τίτλο “μέθοδος σταθερής φάσης”. Η βασική ιδέα είναι να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα σε μια περιοχή του χώρου των ϕ τέτοια ώστε ο φασικός όρος του εντροπικού όρου να είναι σταθερός, και άρα να βγαίνει εκτός της ολοκλήρωσης.

²Η δομή των quaternion παράγεται με παρόμοιο τρόπο, μόνο που αυτήν τη φορά $ij + ji = 0$, το οποίο συνεπάγεται πως το αντίστοιχο γινόμενο (Hamilton) quaternion είναι μη-μεταθετικό σε αντίθεση με το διπλομιγαδικό.

2.3.2.1 The thimble(s)

Έστω το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}} dx g(x) \exp f(x), \quad (2.3.10)$$

όπου f και g είναι ολομορφικές συναρτήσεις στους μιγαδικούς $z \in \mathbb{C}$. Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα χαρακτηρίζεται από έντονη διακύμανση της ολοκληρωτέας ποσότητας η οποία οφείλεται στην παρουσία του όρου $\exp(i\Im f)$. Με βάση τη θεωρία Picard-Lefschetz, το ολοκλήρωμα \mathcal{I} υπολογίζεται ισοδύναμα σε κάθε καμπύλη $\gamma \subset \mathbb{C}$ η οποία διατηρεί την κλάση ομολογίας του ολοκληρώματος,

$$\mathcal{I} = \oint_{\gamma \subset \mathbb{C}} dz g(x) \exp f(x), \quad (2.3.11)$$

όταν το πραγματικό μέρος της δράσης f είναι φραγμένο, $\sup_{x \in \mathbb{C}} \Re f(x) < \infty$. Ειδικότερα αποδεικνύεται πως κατάλληλη επιλογή της γ είναι η καμπύλη μέγιστης κλίσης της $\Re f$ από κρίσιμο σημείο της, τέτοιο δηλαδή ώστε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} x_a = -\frac{\partial}{\partial x_a} \Re f(x) = -\varepsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial x_b} \Im f(x), \quad (2.3.12)$$

με αρχική συνθήκη $x_a(0) = \chi_a$ όπου χ είναι σαγματικό σημείο της f ,³

$$\frac{\partial}{\partial x_a} \Re f(\chi) = \varepsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial x_b} \Im f(x) = 0 \text{ ισοδύναμα } \sup_{x \in \mathbb{C}} \Re f(x) = \max_{x \in \mathbb{C}} \Re f(x) = \Re f(\chi) \text{ και} \quad (2.3.13)$$

$$\frac{1}{n!} \varepsilon_{(a_i)_{i=1}^n} \varepsilon_{(b_i)_{i=1}^n} \prod_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{a_i}} \frac{\partial}{\partial x_{b_i}} \Re f(\chi) = -\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_a(\chi) \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_a(\chi) \neq 0. \quad (2.3.14)$$

υποθέτοντας πως η $\Re f$ έχει μοναδικό ακρότατο στο χ και αντικαθιστώντας τη συνθήκη Cauchy-Riemann

$$\circ_{abc} \frac{\partial}{\partial x_b} f_c = 0, \quad (2.3.15)$$

όπου \circ είναι ο τανυστής γινομένου μιγαδικών, όταν αυτοί αναπαρίστανται στις συνιστώσες τους (βλ. υποποενότητα 3.1.2.1).

Παρατηρούμε πως για τον μετασχηματισμό του πεδίου ολοκλήρωσης, η κατά τα άλλα πραγματική μεταβλητή ολοκλήρωσης μιγαδοποιείται, $x \rightarrow x_0 + ix_1$. Πολλές φορές στο αρχικό ολοκλήρωμα η δράση f εξαρτάται αποκλειστικά από το x_0 , είναι δηλαδή μια καμπύλη στο \mathbb{C} , η ανάγκη για παραμόρφωση του πεδίου ολοκλήρωσης στο \mathbb{C} με ταυτόχρονη επέκταση του x_0 σε x

Προκύπτει πως η $\Im f$ είναι σταθερή κατά μήκος της γ .

Πράγματι κατά μήκος της γ έχουμε μέγιστη πτώση της $\Re f$, επομένως η εφαπτομένη δίνεται από $\nabla \Re f$. Σε κάθε σημείο $x \in \gamma$, μία κατεύθυνση της ισοσταθμικής της $\Re f(x)$ δίνεται από συνιστώσες

$$\pm \varepsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial x_b} \Re f(x) = \mp \frac{\partial}{\partial x_a} \Im f(x), \quad (2.3.16)$$

επομένως ισοδύναμα από (2.3.12) παρατηρούμε πως η καμπύλη γ μέγιστης κλίσης της $\Re f$ αποτελεί ταυτόχρονα ισοσταθμική της $\Im f$.

Η θεωρία Picard-Lefschetz γενικεύεται και όταν τα ακρότατα της f είναι πολλαπλά. Η υπόθεση είναι η ίδια, πως δηλαδή για κάθε ακρότατο $\chi_\sigma \in \Sigma$, το πραγματικό μέρος της f είναι άνω-φραγμένο, $\Re f(\chi_\sigma) < \infty$, $\forall \sigma \in \Sigma$. Το σύνολο των

³Η ορίζουσα ενός πίνακα A με στοιχεία A_{ab} είναι

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon_{(a_i)_{i=1}^n} \varepsilon_{(b_i)_{i=1}^n} \prod_{i=1}^n A_{a_i b_i}.$$

2 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου

καμπυλών (κύκλων της ομολογίας της f) γ_σ αποτελεί βάση του χώρου των κύκλων της ομολογίας της f πάνω στους οποίους μπορούμε να ολοκληρώσουμε.

Η θεωρία επίσης γενικεύεται και για πολυδιάστατο πεδίο x , όπου οι καμπύλες ολοκλήρωσης γ γίνονται ποια υπερεπιφάνειες \mathcal{J} (thimbles) πάνω στις οποίες $\Im f$ είναι σταθερή. Το ολοκλήρωμα που υπολογίζουμε είναι

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}^{\dim X}} \prod_{i=1}^{\dim X} dx_i g(x) \exp f(x). \quad (2.3.17)$$

Στην περίπτωση πολλαπλών σαγματικών σημείων, η εν λόγω περιοχή ολοκλήρωσης δίνεται από ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των thimbles στα διάφορα σαγματικά σημεία,⁴

$$\mathcal{C} = \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \mathcal{J}_\sigma, \quad n_\sigma \in \mathbb{Z}, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (2.3.18)$$

2.3.2.2 Εφαρμογή στη θεωρία πεδίου

Καταλαβαίνοντας πως η μέθοδος προορίζεται για εξομείωση Monte Carlo, έχοντας υπόψη ότι δουλεύουμε σε πλέγμα, η ανωτέρω γενίκευση στις πολλές διαστάσεις εφαρμόζεται κι εδώ, επιτρέποντας τον αφηρημένο συμβολισμό

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S[\phi]), \quad (2.3.19)$$

όπου στην περίπτωση μας $g[\phi] \equiv \mathcal{O}[\phi]$ και $f[\phi] \equiv -S[\phi]$ κατ' αναλογία με τα προηγούμενα. Έτσι αποσπώμαστε από τα μιγαδικά πεδία $\phi \in \mathbb{C}^X$ και τα επεκτείνουμε σε διπλομιγαδικά $\phi \in (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^X$ (βλ. υποποενότητα 3.1.2.1), μέσα στον οποίο χώρο βρίσκεται το thimble \mathcal{C} , το οποίο αποτελεί το νέο πεδίο ολοκλήρωσης κατά της θεωρία Picard-Lefschetz.

Στη γενική περίπτωση όμως υπάρχουν κάποια προβλήματα που εμποδίζουν την απευθείας εξομείωση:

- Δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί markovιανή αλυσίδα η οποία να κινείται στο \mathcal{C} στην γενική περίπτωση. Εικάζεται πως αρκεί να κινηθούμε στο βασικό thimble \mathcal{J}_0 το οποίο ανήκει στο ολικό μέγιστο φ_0 της $\Re S$. [8]
- Η μέθοδος μέγιστης κλίσης περιλαμβάνει και τοπική γύρω από τα ακρότατα διαταρακτική ανάπτυξη της δράσης, το οποίο αναιρεί το σκοπό της εξομείωσης Monte Carlo για μη-διαταρακτική θεωρία πεδίου και επομένως αγνοείται, αυξάνοντας την πολυπλοκότητα του υπολογισμού.
- Η απαλλαγή της εναλλασσόμενης φάσης δεν γίνεται δίχως artifacts. Πάνω στο thimble το στοιχείο όγκου $\mathcal{D}\phi$ λαμβάνει μια φάση το ίδιο, δηλαδή όπως και είναι φυσικό αυτό που επιτυγχάνεται είναι μεταφορά του προβλήματος από τη δράση στο μέτρο. Η παρουσία της παραμένουσας αυτής φάσης δεν είναι τόσο σοβαρή όσο η αρχική φάση στον εντροπικό παράγοντα, πάραυτα η πολυπλοκότητα του υπολογισμού είναι αρκετά μεγάλη ακόμη.
- Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της συνάρτησης επιμερισμού πάνω στο thimble \mathcal{J}_0 χρησιμοποιείται (!) δυναμική Langevin με τον θόρυβο σε κάθε βήμα κατάλληλα επιλεγμένο/επεξεργασμένο ώστε κατά την παραγωγή αλυσίδας configurations να παραμείνουμε πάνω στο thimble. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά μη τετριμμένη, και η θεωρητική της βάση είναι η παράλληλη μεταφορά κατά τη διαφορικο-γεωμετρική έννοια πάνω στη πολλαπλότητα που ονομάζουμε thimble.

Επί του παρόντος έχουν εξαχθεί αποτελέσματα συναφή με τα αποτελέσματα της μιγαδικής Langevin. [9] Οι δύο μέθοδοι παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες αλλά και ουσιώδεις διαφορές. (περισσότερες λεπτομέρειες: [10])

2.3.3 Δυϊκές μέθοδοι

2.3.3.1 Αναπαράσταση ροής

Σε ότι ακολουθεί υιοθετείται προσωρινά φορμαλισμός \cdot_x αντί του $\langle x|\cdot$ για την εξάρτηση από τη (πλεγματική) θέση (βλ. σελ. 2). Συνεπώς εν προκειμένω η συνάρτηση επιμερισμού γράφεται

$$Z = \frac{1}{2\pi} \prod_x \int_{\mathbb{C}} d\phi_x e^{-S}, \quad (2.3.20)$$

⁴ Ακέραιος γραμμικός συνδυασμός, διότι σε βασικούς τοπολογικούς χώρους εμφανίζεται η ακέραια ομάδα \mathbb{Z} ως υποομάδα των ομάδων ομολογίας των, για κάθε "κύκλο" του τοπολογικού χώρου.

όπου η δράση S δίνεται από το χωροχρονικό ολοκλήρωμα της lagrangiaικής πυκνότητας \mathcal{L} ,

$$S = \sum_x \mathcal{L}_x, \quad (2.3.21)$$

οπότε και στην περίπτωση πεπερασμένου πλέγματος ο εντροπικός παράγοντας γίνεται

$$e^{-S} = \exp\left(-\sum_x \mathcal{L}_x\right) = \prod_x \exp(-\mathcal{L}_x) = \prod_x \sum_{n_x} \frac{1}{n_x!} (-1)^{n_x} (\mathcal{L}_x)^{n_x} = \sum_{(n)} (-1)^{\sum_x n_x} \prod_x \frac{1}{n_x!} (\mathcal{L}_x)^{n_x}, \quad (2.3.22)$$

όπου $(n) = (n_x)_{x \in \mathbb{L}}$ αντιπροσωπεύει το τυχόν configuration των n_x όπως φαίνεται και από την ισότητα αθροισμάτων

$$\prod_x \sum_{n_x} = \sum_{(n)} \prod_x. \quad (2.3.23)$$

Η (2.3.22) συνοψίζει γενικά την ιδέα της αναπαράστασης ροής (n) . Στη γενική μορφή δράσης \mathcal{L} δε φαίνεται κανένα φανερό πλεονέκτημα, ο σκοπός όμως για ειδικότερα προβλήματα είναι να εκφραστεί η συνάρτηση επιμερισμού ως ολοκλήρωμα ποια όχι των configurations πεδίου ϕ , αλλά των configurations n όπου και η δράση είναι απαλλαγμένη από το μιγαδικό μέρος.⁵ Η πιο απλή γενική μορφή δράσης η οποία να περιλαμβάνει μιγαδικό μέρος είναι η διγραμμική στο πεδίο

$$S = \sum_x \sum_{\bar{x}} \phi_x^\dagger A_{x\bar{x}} \phi_{\bar{x}} = \sum_x \sum_{\bar{x}} \phi_x^\dagger A_{(x\bar{x})} \phi_{\bar{x}} - \sum_x \sum_{\bar{x}} \phi_x^\dagger A_{[x\bar{x}]} \phi_{\bar{x}}, \quad (2.3.24)$$

όπου το πραγματικό και μιγαδικό μέρος διακρίνονται από το ερμητιανό $A_{(x\bar{x})}$ και το αντιερμητιανό $A_{[x\bar{x}]}$ κομμάτι του $A_{x\bar{x}}$,

$$A_{x\bar{x}} = A_{(x\bar{x})} + A_{[x\bar{x}]} \text{ με } A_{(x\bar{x})} = \frac{1}{2}(A_{x\bar{x}} + A_{\bar{x}x}^\dagger) \text{ και } A_{[x\bar{x}]} = \frac{1}{2}(A_{x\bar{x}} - A_{\bar{x}x}^\dagger). \quad (2.3.25)$$

Οι ανάμεικτοι όροι δεν είναι σπάνιοι στο πραγματικό μέρος της δράσης επομένως το ερμητιανό κομμάτι λαμβάνεται διαγώνιο-ταυτοτικό $A_{(x\bar{x})} = A\delta_{x\bar{x}}$, το οποίο θα γενικεύσουμε σε οποιαδήποτε εξάρτηση $f(\phi_x^\dagger \phi_x)$, ώστε να συμπεριλαμβάνονται αυτο-αλληλεπιδράσεις του πεδίου ϕ ενώ επαναορίζουμε $A_{x\bar{x}} = A_{[x\bar{x}]}$ έτσι ώστε η τελική δράση πυκνότητα γράφεται

$$S = S_0 + S_1 = \sum_x f(\phi_x^\dagger \phi_x) + \sum_x \sum_{\bar{x}} \phi_x^\dagger A_{x\bar{x}} \phi_{\bar{x}}. \quad (2.3.26)$$

Τότε ο εντροπικός παράγοντας αναπτύσσεται περαιτέρω, προσθέτοντας βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχους ποια προς τα πεδία ϕ και ϕ^\dagger . Συγκεκριμένα, το φανταστικό μέρος (το οποίο και προκαλεί το πρόβλημα) αναπτύσσεται ως

$$\begin{aligned} e^{-S_1} &= e^{-\sum_x \sum_{\bar{x}} A_{x\bar{x}} \phi_x^\dagger \phi_{\bar{x}}} = \prod_x \prod_{\bar{x}} e^{-A_{x\bar{x}} \phi_x^\dagger \phi_{\bar{x}}} = \\ &= \prod_x \prod_{\bar{x}} \sum_{n_{x\bar{x}}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (\phi_x^\dagger)^{n_{x\bar{x}}} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} (\phi_{\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} = \sum_{(n)} \left(\prod_x \prod_{\bar{x}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} \right) \prod_x \left((\phi_x^\dagger)^{\sum_{\bar{x}} n_{x\bar{x}}} (\phi_x)^{\sum_{\bar{x}} n_{x\bar{x}}} \right), \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

όπου στο τελευταίο βήμα έγινε εναλλαγή των βουβών δεικτών x και \bar{x} , ενώ

$$e^{-S_0} = e^{-\sum_x f(\phi_x^\dagger \phi_x)} = \prod_x e^{-f(\phi_x^\dagger \phi_x)}. \quad (2.3.28)$$

Σε αυτήν την φάση οι τιμές του μιγαδικού πεδίου, αντί της καθιερωμένης ανάπτυξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\phi = \phi_0 + i\phi_1$, σε πολικές συντεταγμένες $\phi = \Phi \exp(i\varphi)$. Τότε η συνάρτηση επιμερισμού γίνεται

$$Z = \sum_{(n)} \left(\prod_x \prod_{\bar{x}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} \right) \prod_x \int_0^\infty d\Phi_x \Phi_x^{1+2\sum_{\bar{x}} n_{(x\bar{x})}} e^{-f(\Phi_x^2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{-i\phi 2\sum_{\bar{x}} n_{[x\bar{x}]}}. \quad (2.3.29)$$

⁵Είναι φανερό από τελευταίο σκεπτικό γιατί μια τέτοια μέθοδος (και αναπαράσταση) είναι δυνατή μόνο όταν βρισκόμαστε στο πεπερασμένο πλέγμα.

2 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου

Συμβολίζουμε με

$$\zeta_{(n)}(A) \equiv \left(\prod_x \prod_{\bar{x}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} \right) \quad (2.3.30)$$

τον παράγοντα ο οποίος εξαρτάται αποκλειστικά από τη μορφή του φανταστικού μέρους της δράσης, και

$$n_x \equiv 2 \sum_{\bar{x}} n_{(x\bar{x})} \text{ και } \bar{n}_x \equiv 2 \sum_{\bar{x}} n_{[x\bar{x}]}, \quad (2.3.31)$$

έτσι ώστε

$$Z = \sum_{(n)} \zeta_{(n)}(A) \prod_x \int_0^\infty d\Phi_x \Phi_x^{1+n_x} e^{-f(\Phi_x^2)} \prod_x \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi_x e^{-i\varphi_x \bar{n}_x}. \quad (2.3.32)$$

Τα ολοκληρώματα στα μέτρα μιγαδικών της μορφής

$$W(n) = \int_0^\infty d\Phi \Phi^{1+n} e^{-f(\Phi^2)} \quad (2.3.33)$$

υπολογίζονται οικονομικά αριθμητικά, ενώ τα ολοκληρώματα στη φάση μιγαδικών δίνουν συναρτήσεις δέλτα

$$\delta(\bar{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{-i\varphi \bar{n}} \quad (2.3.34)$$

έτσι ώστε η τελική μορφή της συνάρτησης επιμερισμού

$$Z = \sum_{(n)} \left(\prod_x \prod_{\bar{x}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} \right) \prod_x W \left(2 \sum_{\bar{x}} n_{(x\bar{x})} \right) \prod_{\bar{x}} \delta \left(2 \sum_x n_{[x\bar{x}]} \right) \quad (2.3.35)$$

να είναι απαλλαγμένη από την εξάρτηση του πεδίου και παραπλεύρως από το πρόβλημα μιγαδικής δράσης, αφού σε αυτήν την αναπαράσταση δεν υφίσταται παράγοντας φάσης στο άθροισμα (τώρα) της συνάρτησης επιμερισμού.

2.3.3.2 Αλγόριθμος worm

Η απαλλαγή από τον παράγοντα φάσης δεν έγινε χωρίς κόστος: το πεδίο άθροισμα στη συνάρτηση επιμερισμού περιέχει περιορισμούς που επιβάλλονται από τις συναρτήσεις δέλτα οι οποίες αντικατέστησαν το φασικό παράγοντα. Ως εκ τούτου κρίνεται σκόπιμο [12] να χρησιμοποιηθεί μια γενίκευση του αλγορίθμου worm των Προκοφьев-Свистунов [13] για το χειρισμό των περιορισμών του configuration space και παραγωγή κατάλληλης αλυσίδας configurations για τον υπολογισμό της συνάρτησης επιμερισμού, όταν το φανταστικό μέρος έχει την ακόμη ειδικότερη μορφή (σχετικιστικό αέριο Bose, βλ. κεφάλαιο 4)

$$S_1 = - \sum_x \sum_\nu (e^{\mu\delta_{\nu,4}} \phi_x^\dagger \phi_{x+\hat{\nu}} + e^{-\mu\delta_{\nu,4}} \phi_x \phi_{x+\hat{\nu}}^\dagger), \quad (2.3.36)$$

όπου $\hat{\nu} \equiv \partial_\nu$ είναι link προς πλησιέστερο γείτονα στην διεύθυνση ν με φορά που δηλώνεται από το πρόσημο που το συνοδεύει. Εν προκειμένω

$$Z = \sum_{(n)} \sum_{\bar{n}} \left(\prod_x \prod_\nu \frac{1}{(|k_{x,\nu}| + l_{x,\nu})! n_{x,\nu}!} \right) \times \\ \times \prod_x e^{\mu k_{x,4}} W \left(\sum_\nu (|k_{x,\nu}| + |k_{x-\hat{\nu},\nu}| + 2(l_{x,\nu} + l_{x-\hat{\nu},\nu})) \right) \prod_x \delta \left(\sum_\nu (k_{x,\nu} - k_{x-\hat{\nu},\nu}) \right) \quad (2.3.37)$$

όπου $n_{x,\nu} - \bar{n}_{x,\nu} = k_{x,\nu}$ και $n_{x,\nu} + \bar{n}_{x,\nu} = |k_{x,\nu}| + 2l_{x,\nu}$. Στους βαθμούς l εφαρμόζεται απλά ένα Metropolis sweep, ενώ στους k βαθμούς, οι οποίοι δεσμεύονται από τις συναρτήσεις δέλτα, εφαρμόζονται πολλαπλά metropolis-like “flips” σε πρότυπο worm, ή “σκουληριού”. Το σκουληρίκι ξεκινάει από μια τυχαία θέση στο πλέγμα και διαγράφει μονοπάτι τυχαίου περιπατητή. Παρατηρούμε πως ο περιορισμός των k είναι περιορισμός μεταξύ πλησιέστερων γειτόνων, επομένως με κάθε update το σκουληρίκι παραβιάζει τη συνθήκη της δέλτα στην αρχή και στο τέλος του. Το σκουληρίκι συνεχίζει μέχρι να

2.3 Σχετικιστικό αέριο Bose (φαινόμενο Silver-Blaze)

συναντήσει την αρχή με τέτοιο τρόπο ώστε η συνθήκη της δέλτα να ικανοποιείται κατά μήκος του κλειστού μονοπατιού που διέγραψε.

Είναι αξιοσημείωτο πως η αλλαγή μεταβλητών από n και \bar{n} σε k και l έγινε για οικονομικούς λόγους περισσότερο, ώστε η συνθήκη δέλτα να περιέχει όσο το δυνατόν λιγότερα, και να απαιτείται λιγότερη χρήση worm υπολογισμών, όμως όπως γίνεται κατανοητό, η μέθοδος είναι υλοποιήσιμη και στη γενικότερη περίπτωση διγραμμικού φανταστικού μέρους της δράσης, ενδεχομένως με μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.

3 Δυναμική Langevin

3.1 Συνεχής δυναμική Langevin

3.1.1 $\phi \in \mathbb{R}^X$ και $S \in \mathbb{R}$

Έστω ότι διαπραγματευόμαστε μια θεωρία ενός πραγματικού πεδίου ϕ πραγματικής δράσης $S[\phi]$.

Οι ασύζευκτες εξισώσεις Langevin στην αναπαράσταση της θέσης παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi(\tau) \rangle = \langle x | K(\phi(\tau)) \rangle + \langle x | \eta(\tau) \rangle, \quad \langle x | K(\phi) \rangle \equiv -\frac{\delta}{\delta \langle \phi | x \rangle} S[\phi], \quad (3.1.1)$$

όπου $K(\phi)$ είναι ο όρος ολίσθησης (πεδίο, όχι συναρτησιακό) και η όρος θορύβου ο οποίος κανονικοποιείται ως

$$\langle \langle x | \eta(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x | \eta(\tau) \rangle \langle \eta(\tau') | x' \rangle \rangle = 2 \langle x | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.2)$$

Η τυπική απόκλιση της κατανομής πυκνότητας πιθανότητας του θορύβου είναι $\sqrt{2}$ από το *θεώρημα fluctuation-dissipation* [3] για τις μονάδες που χρησιμοποιούνται στη χβαντική θεωρία πεδίου (πλέγματος).

$$\rho[\eta] = \rho_0^{-1} \exp \left(- \int d\tau A[\eta(\tau)] \right), \quad \rho_0 = \int \mathcal{D}\eta \exp \left(- \frac{1}{4} \int d\tau A[\eta(\tau)] \right), \quad (3.1.3)$$

όπου

$$A[\eta] = \frac{1}{4} \langle \eta \eta \rangle \quad (3.1.4)$$

είναι η ελεύθερη (effective) «δράση» του θορύβου η έτσι ώστε η τυπική κατανομή του να είναι gaussianή.

Η εξίσωση (3.1.1) βασικά πρόκειται για πολλές εξισώσεις οι οποίες δεικτοδοτούνται από την εν λόγω αναπαράσταση του πεδίου, στην προκειμένη περίπτωση από τη θέση x . Είναι χρήσιμη πολλές φορές η γενική μορφή της εξίσωσης Langevin με τη εισαγωγή ενός πυρήνα $\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle$ ο οποίος συζεύγει τις εξισώσεις ως προς τη θέση,

$$\langle x | K(\phi) \rangle \equiv - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a | x' \rangle} S[\phi], \quad (3.1.5)$$

και ο οποίος είναι ερμητιανός και θετικά ορισμένος. $\langle x | x' \rangle$ είναι ειδικά ο ταυτοτικός πυρήνας, ενώ αυτό που βλέπουμε εδώ δε διαφέρει από την άλγεβρα πεπερασμένων γραμμικών συστημάτων, όπου οι πυρήνες οι οποίοι αφορούν το ίδιο σύστημα είναι «όμοιοι» μεταξύ τους.

Στην περίπτωση αυτή, το *θεώρημα fluctuation-dissipation* μας λέει πάλι πως

$$\langle \langle x | \eta(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x | \eta(\tau) \rangle \langle \eta(\tau') | x' \rangle \rangle = 2 \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.6)$$

Δεδομένης της δυναμικής Langevin για το πεδίο ϕ , πάμε να δούμε ποια είναι η δυναμική του πεδίου $\phi' = \alpha^{-1} \phi$.

Ανακλιμακώνοντας με παρόμοιο τρόπο το θόρυβο $\eta' = \alpha^{-1} \eta$ στις (3.1.1),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi'(\tau) \rangle = \langle x | K'(\phi'(\tau)) \rangle + \langle x | \eta'(\tau) \rangle, \quad K'[\phi'] = \alpha^{-1} K(\alpha \phi) = -\alpha^{-2} \frac{\delta}{\delta \phi'} S[\alpha \phi']. \quad (3.1.7)$$

Στην προκειμένη περίπτωση αναγνωρίζουμε τη παρουσία του μη τετριμμένου πυρήνα $\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle = \alpha^{-2} \langle x | x' \rangle$, δηλαδή η τυπική απόκλιση του θορύβου είναι πια $\sigma = \sqrt{2} \alpha^{-1}$, σε συνέπεια με την ανακλιμάκωση του θορύβου,

$$\langle \langle x | \eta'(\tau) \rangle \langle \eta'(\tau') | x' \rangle \rangle = \langle \langle x | \alpha^{-1} \eta(\tau) \rangle \langle \alpha^{-1} \eta(\tau') | x' \rangle \rangle = 2 \alpha^{-2} \langle x | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.8)$$

Βλέπουμε ότι το ανακλιμακώμενο πεδίο υπακούει σε υποτυπωδώς διαφορετική δυναμική, με αλλαγμένη ολίσθηση συγκεκριμένα και θόρυβο ο οποίος ενώ διατηρεί τη μορφή του στις εξισώσεις, κρύβει μια διαφορετική τυπική απόκλιση υπακούοντας το *θεώρημα fluctuation-dissipation*. Αυτή η ανάλυση θα μας χρειαστεί αμέσως, όταν αναπτύξουμε το γενικό μη-πραγματικό πεδίο ϕ σε πραγματικές συνιστώσες ϕ_a .

3 Δυναμική Langevin

3.1.2 $\phi \in \mathbb{F}^X$ και $S \in \mathbb{R}$

3.1.2.1 Άλγεβρα βαθμωτών $\phi \in \mathbb{F}$

Έστω ότι τα εν γένει μη-πραγματικά πεδία περιγράφονται από ένα σώμα $\mathbb{F} \simeq \mathbb{R}^f$, δηλαδή ότι το τυχόν πεδίο $\phi \in \mathbb{F}^X$ μπορεί να αναπτυχθεί σε $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = f + 1 \in \mathbb{N}$ το πλήθος πραγματικές συνιστώσες ως

$$\phi \equiv (\phi_a)_{a=0}^f \equiv (f) \sum_{a=0}^f f_a \phi_a, \quad (3.1.9)$$

όπου (f) είναι η κανονικοποίηση της ανάπτυξης σε συνιστώσες και $(f_a)_{a=1}^f$ μια βάση στοιχείων βασισμένη στο γεγονός ότι $\mathbb{F} \simeq \mathbb{R}^f$.¹ Θεωρούμε κατά σύμβαση πως $a \in \mathbb{N}$, δηλαδή η χαμηλότερη τιμή δείκτη είναι το 0.

γινόμενο \cdot στο \mathbb{F}

$\forall \phi, \psi \in \mathbb{F}$ το γινόμενο αυτών $\phi\psi \in \mathbb{F}$ αναπαριστάται στην αναπαράσταση δεικτών με τη βοήθεια του ταυστή γινομένου \circ , τέτοιο ώστε

$$(\phi\psi)_a \equiv (f) \circ_{abc} \phi_b \psi_c. \quad (3.1.10)$$

Ο ταυστής γινομένου μπορεί να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει γινόμενα περισσότερων στοιχείων στο \mathbb{F} ,

$$\left(\prod_{i=1}^n \phi_i \right)_a \equiv (f)^{n-1} \circ_{a(a_i)_{i=1}^n} \prod_{i=1}^n (\phi_i)_{a_i}, \quad (3.1.11)$$

όπου χάρη στην προσεταιριστική ιδιότητα του γινομένου, ο ταυστής γινομένου n στοιχείων του σώματος αποσυντίθεται ως

$$\circ_{a(a_i)_{i=1}^n} = \delta_{ab_0} \prod_{i=1}^{n-1} \circ_{b_{i-1} a_i b_i} \delta_{b_{n-1} a_n}. \quad (3.1.12)$$

Στο εξής θα αναφερόμαστε στους δείκτες $(a_i)_{i=1}^n$ του \circ ως δείκτες εισόδου και στον a ως δείκτη εξόδου για λόγο ότι οι συστέλλονται με του δείκτες των στοιχείων που εισάγονται στο γινόμενο (3.1.11) ενώ ο δε είναι ο δείκτης του αποτελέσματος του εν λόγω γινομένου.

Το γινόμενο στο \mathbb{F} εν γένει δεν είναι μεταθετικό, όταν είναι όμως, ο ταυστής γινομένου είναι συμμετρικός στους δείκτες εισόδου του, δηλαδή $\circ_{abc} = \circ_{a(bc)}$, ή και γενικότερα $\circ_{aa_1 \dots a_n} = \circ_{a(a_1 \dots a_n)}$.

Επιπλέον κάθε συστολή του τυχόντος ταυστή γινομένου $\circ_{aa_1 \dots a_n}$ (και κατά συνέπεια κάθε γινομένου αυτών), ισούται με αντίστοιχο ταυστή γινομένου μικρότερης τάξης το οποίο επάγεται από την απλούστερη περίπτωση της μίας συστολής: Για $i \in \mathbb{N}_n$,

$$\delta_{aa_i} \circ_{aa_1 \dots a_i \dots a_n} = \circ_{a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n}. \quad (3.1.13)$$

Ειδικές περιπτώσεις αποτελούν η $\circ_{ab} = \delta_{ab}$ η οποία αντιπροσωπεύει το γινόμενο ενός στοιχείου, και δίνει κατά συνέπεια το ίδιο το στοιχείο, και η $\circ_a = 1_a f$ η οποία αντιπροσωπεύει το γινόμενο κανενός στοιχείου, και δίνει κατά συνέπεια το ουδέτερο στοιχείο του εν λόγω γινομένου. Το βαθμωτό $\circ = f$ αντιπροσωπεύει την κανονικοποίηση του γινομένου. Αν για παράδειγμα στον ορισμό του γινομένου (3.1.10) η σταθερά ανάπτυξης ενσωματωθεί στον ταυστή γινομένου \circ_{abc} , τότε $\circ = (f)f$, θέτει δηλαδή τη βάση για όλους τους ανώτερους του ταυστές γινομένου.

μέτρο $|\cdot|$ στο \mathbb{F}

Το μέτρο ενός στοιχείου $\phi \in \mathbb{F}$ είναι καλά ορισμένο και συμβολίζεται με $|\phi| \in \mathbb{R}$,

$$|\phi|^2 \equiv (f)^2 \delta_{ab} \phi_a \phi_b. \quad (3.1.14)$$

Το μέτρο σέβεται το γινόμενο του \mathbb{F} ,

$$|\phi\psi| = |\phi||\psi|, \quad (3.1.15)$$

¹Κλασικό παράδειγμα είναι αυτό του $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, όπου $c_0 \equiv 1$ και $c_1 \equiv i$ με $(i) \equiv 1$ τις περισσότερες φορές.

αφού $|\phi\psi|^2 = (\mathbb{f})^2 \delta_{ab}(\mathbb{f}) \circ_{ace} \phi_c \psi_e (\mathbb{f}) \circ_{bdf} \phi_d \psi_f = (\mathbb{f})^2 \delta_{cd} \phi_c \phi_d (\mathbb{f})^2 \delta_{ef} \psi_e \psi_f = |\phi|^2 |\psi|^2$, με την προϋπόθεση όμως ότι

$$\delta_{ab} \circ_{ace} \circ_{bdf} = \delta_{cd} \delta_{ef}, \quad (3.1.16)$$

η οποία καθιστά το σώμα \mathbb{F} Clifford άλγεβρα.

συζυγία \cdot^\dagger στο \mathbb{F}

Χάρη στη διγραμμικότητα του γινομένου στοιχείων στο \mathbb{F} , υπάρχει μοναδικό συζυγές του ϕ στοιχείο ϕ^\dagger τέτοιο ώστε

$$|\phi|^2 = \phi^\dagger \phi = \phi \phi^\dagger. \quad (3.1.17)$$

Η συζυγία αναπαρίσταται με τη βοήθεια του τανυστή συζυγίας \diamond τέτοιο ώστε

$$(\phi^\dagger)_a \equiv \diamond_{ab} \phi_b. \quad (3.1.18)$$

Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $(\phi^\dagger)^\dagger = \phi$, δηλαδή $\diamond_{ab} \diamond_{bc} = \delta_{ac}$. Είναι ενδιαφέρον πως ο τανυστής συζυγίας δεν είναι απαραίτητα συμμετρικός στους δείκτες του.

Η συζυγία σέβεται το μη-μεταθετικό εν γένει γινόμενο, αντιστρέφοντας τη σειρά του γινομένου,

$$(\phi\psi)^\dagger = \psi^\dagger \phi^\dagger, \quad (3.1.19)$$

αφού $(\phi\psi)^\dagger \phi\psi = \psi^\dagger \phi^\dagger \phi\psi = |\phi|^2 \psi^\dagger \psi = |\phi|^2 |\psi|^2 = |\phi\psi|^2$.

Ισοδύναμα σε γραφή τανυστών $\diamond_{ab} \circ_{bcd} = \circ_{afe} \diamond_{fd} \diamond_{ec}$ και επαγωγικά από προσεταιριστική ιδιότητα γινομένου (3.1.12),

$$\diamond_{ab} \circ_{b(b_i)_{i=1}^n} = \circ_{a(a_i)_{i=n}^1} \prod_{i=n}^1 \diamond_{a_i b_i}. \quad (3.1.20)$$

εσωτερικό γινόμενο \cdot^\bullet στο \mathbb{F}

Το «εσωτερικό» γινόμενο στο \mathbb{F} των ϕ και ψ ορίζεται ως το $\psi^\dagger \phi$ και αναπαρίσταται με τη βοήθεια του τανυστή \bullet τέτοιο ώστε

$$(\psi^\dagger \phi)_a \equiv (\mathbb{f}) \bullet_{abc} \phi_b \psi_c = (\mathbb{f}) \circ_{adc} \diamond_{db} \psi_b \phi_c, \quad (3.1.21)$$

Γράφοντας την (3.1.21) σε μορφή αναλλοίωτη της επιλογής του (\mathbb{f}) για $\psi = \phi$,

$$(\mathbb{f})(\phi^\dagger \phi)_a = \bullet_{abc} (\mathbb{f}) \phi_b (\mathbb{f}) \phi_c. \quad (3.1.22)$$

Το $|\phi|^2 \in \mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτο της επιλογής ενώ είναι πραγματικός, δηλαδή μόνο η συνιστώσα 0 του $\phi^\dagger \phi$ επιβιώνει,

$$|\phi|^2 = (\phi^\dagger \phi)_0 = (\mathbb{f}) \bullet_{0bc} \phi_b \phi_c, \quad (3.1.23)$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\bullet_{0ab} \equiv \circ_{0db} \diamond_{da} = \circ_{0ad} \diamond_{db} = \delta_{ab}, \quad (3.1.24)$$

αφού $|\phi|^2 \equiv (\mathbb{f})^2 \delta_{bc} \phi_b \phi_c$ και $\phi^\dagger \phi = \phi \phi^\dagger$. \diamond είναι αντίστροφος του εαυτού του, οπότε η (3.1.24) συνεπάγεται ότι

$$\diamond_{ab} = \circ_{0ab} = \circ_{0(ab)}. \quad (3.1.25)$$

Επειδή $\phi^\dagger \phi = \phi \phi^\dagger$ μπορούμε να συμπεράνουμε γενικά πως

$$\bullet_{a(bc)} = 1_a \bullet_{0bc} = 1_a \delta_{bc}, \quad (3.1.26)$$

το οποίο αντικατοπτρίζει το γεγονός πως $\phi^\dagger \psi + \psi^\dagger \phi \in \mathbb{R}$. Το εσωτερικό γινόμενο όμως είναι πλήρες, δηλαδή $\forall \chi \in \mathbb{F} \exists \phi, \psi \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε $\chi = \phi^\dagger \psi$ οπότε και $\chi + \chi^\dagger \in \mathbb{R} \forall \chi \in \mathbb{F}$, ήτοι

$$\chi_a + \diamond_{ab} \chi_b = (\delta_{ab} + \diamond_{ab}) \chi_b = 2_a \chi_0. \quad (3.1.27)$$

3 Δυναμική Langevin

παράδειγμα: παράγωγος συναρτησιακού

Έστω ένα συναρτησιακό $s : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή $\forall \phi \in \mathbb{F}, s[\phi] \in \mathbb{R}$. Η παράγωγος του συναρτησιακού s με το ϕ είναι από μόνο του στοιχείο του \mathbb{F} , όπως και φαίνεται από την αυτοσυνεπή γραφή της σε συνιστώσες. Συγκεκριμένα έστω

$$k(\phi) = \frac{\delta}{\delta\phi} s[\phi], \quad (3.1.28)$$

οι συνιστώσες του οποίου γράφονται σε αναλλοίωτη μορφή ως προς τη σταθερά ανάπτυξης (f) ως

$$(\|f\|)k_a(\phi) = \frac{\delta}{\delta(\|f\|\phi_a)} s[\phi] \quad \text{ή} \quad k_a(\phi) = (\|f\|)^{-2} \frac{\delta}{\delta\phi_a} s[\phi]. \quad (3.1.29)$$

Σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται για ακόμη μία φορά πως η σταθερά ανάπτυξης (f) ανακύπτει σε μια σχέση βαθμωτών με μη τετριμμένο τρόπο (όπως και στο γινόμενο (3.1.10)).

3.1.2.2 Εξίσωση Langevin

Η μορφή της εξίσωσης Langevin για πραγματικά βαθμωτά πεδία δε κληροδοτείται αυτούσια στα μη-πραγματικά πεδία. Η αποσύζευξη των εξισώσεων φυσικά διατηρείται, οπότε περιοριζόμαστε στον ταυτοτικό πυρήνα $\langle x|K|x' \rangle = \langle x|x' \rangle$. Έστω ότι τελική μορφή της συνολικής εξίσωσης είναι

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x|\phi(\tau) \rangle = \omega \langle x|K(\phi(\tau)) \rangle + \sqrt{\omega} \langle x|\eta(\tau) \rangle, \quad K(\phi) \equiv -\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi], \quad (3.1.30)$$

$$\langle \langle x|\eta(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x|\eta(\tau) \rangle \langle \eta(\tau')|x' \rangle \rangle = 2\omega^{-1} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.31)$$

όπου η σταθερά ω μένει να προσδιοριστεί χάριν αυτοσυνέπειας με το γεγονός ότι μια θεωρία μη-πραγματικού βαθμωτού πεδίου ϕ είναι μια θεωρία πολλών ανεξάρτητων πραγματικών βαθμωτών πεδίων ϕ_a τα οποία αποτελούν τις συνιστώσες του, όπως γίνεται κατανοητό από την υποενότητα 3.1.2.1.

Αναπτύσσοντας την εξίσωση Langevin (3.1.30) σε συνιστώσες,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x|\phi_a(\tau) \rangle = \omega \langle x|K_a(\phi(\tau)) \rangle + \sqrt{\omega} \langle x|\eta_a(\tau) \rangle, \quad K_a(\phi) = -(\|f\|)^{-2} \frac{\delta}{\delta\phi_a} S[\phi], \quad (3.1.32)$$

$$\langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau')|x' \rangle \rangle = 2(\|f\|)^{-2} \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.33)$$

όπου $\alpha_{aa'}$ είναι δέλτα του Kronecker βαθμού μικρότερου της διάστασης του χώρου, δηλαδή $\alpha^2 \equiv \alpha_{aa} = \alpha_{aa'} \alpha_{a'a} \leq \delta_{aa} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.² Αναπτύσσουμε το θόρυβο σε συνιστώσες

$$2\omega^{-1} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau') = \langle \langle x|\eta(\tau) \rangle \langle \eta(\tau')|x' \rangle \rangle = (\|f\|)^2 \alpha_{aa'} \langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau')|x' \rangle \rangle. \quad (3.1.34)$$

οι οποίες υπακούουν στο θεώρημα fluctuation-dissipation των επιμέρους συνιστωσών εξισώσεων Langevin, δηλαδή

$$\langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau')|x' \rangle \rangle = 2(\|f\|)^{-2} \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau') \quad \text{ή} \quad 2\omega^{-1} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau') = 2\alpha_{aa} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (3.1.35)$$

συνεπάγεται ότι $\omega = \alpha^{-2}$.

Στη γενική περίπτωση όπου ο θόρυβος είναι ιστροπικός, $\alpha_{aa'} = \delta_{aa'}$ και $\omega^{-1} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Υπάρχουν περιπτώσεις όμως που κάποιες συνιστώσες του θορύβου μπορεί να είναι μηδενικές, η κρυμμένη μορφή του θορύβου δηλαδή επί της ουσίας καθρεφτίζεται τελικά σε επιπλέον παράγοντα στο συντελεστή ολίσθησης. Χωρίς τον συντελεστή ω , οδηγούμαστε σε εκφυλισμό της εξίσωσης σε πραγματική Langevin επί της ουσίας, αφού $\alpha_{aa} = 1$, δηλαδή μόνο μία από τις εξισώσεις Langevin είναι στην πραγματικότητα στοχαστική.

Εξισώσεις Langevin (συνιστώσες) για το πεδίο $\phi \in \mathbb{F}^X$ και πραγματική δράση $S \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x|\phi_a(\tau) \rangle = \alpha^{-2} \langle x|K_a(\phi(\tau)) \rangle + \alpha^{-1} \langle x|\eta_a(\tau) \rangle, \quad K_a(\phi) = -(\|f\|)^{-2} \frac{\delta}{\delta\phi_a} S[\phi], \quad (3.1.36)$$

$$\langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau')|x' \rangle \rangle = 2(\|f\|)^{-2} \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (3.1.37)$$

²Κάθε σώμα \mathbb{F} έχει διάσταση $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F} = 1$ ως προς τον εαυτό του και $\dim_{\mathbb{G}} \mathbb{F} = n \in \mathbb{N}$ για σώμα \mathbb{G} τέτοιο ώστε $\mathbb{F} \simeq \mathbb{G}^n$.

όπου $\alpha^2 \equiv \alpha_{aa} \leq \delta_{aa} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Οι εξισώσεις Langevin των συνιστωσών ϕ_a παίρνουν την απλούστερη μορφή με κατάλληλη επιλογή σταθεράς ανάπτυξης σε συνιστώσες, $(f) = \alpha^{-1}$. Η δράση (3.1.4) του θορύβου η γίνεται

$$A[\eta] = \frac{1}{4} \alpha^{-2} \langle \eta | \eta \rangle = \frac{1}{4} (f)^2 \alpha^{-2} \langle \alpha_{aa'} \eta_a \eta_{a'} \rangle = \frac{1}{4} \langle \alpha_{aa'} \eta_a \eta_{a'} \rangle \quad (3.1.38)$$

3.1.3 $\phi \in \mathbb{F}^X$ και $S \in \mathbb{G}$

Η περίπτωση της μη-πραγματικής δράσης είναι περίτεχνη για το λόγο πρωτίστως ότι καταστρέφει την αυτοσυνέπεια των εξισώσεων Langevin όπως γράφτηκαν μέχρι τώρα, αφού όλοι οι όροι ανήκουν στο σώμα \mathbb{F} , όλοι εκτός του όρου ολίσθησης ο οποίος για $S \in \mathbb{G}$,³

$$K(\phi) := -\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X \text{ ή } K_{ab}(\phi) \propto \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta\phi_{ac}} S_d[\phi]. \quad (3.1.39)$$

Ένα σώμα είναι πάντα και διανυσματικός χώρος ως προς τον εαυτό του, αλλά και ως υπόσωμά του $\mathbb{H} \leq \mathbb{F}$ μπορεί να είναι, όπως στη παρούσα δουλειά είναι το \mathbb{R} . Μάλιστα διαφέρει και η διάσταση του επαγόμενου διανυσματικού χώρου κάθε φορά, συγκεκριμένα

$$\dim_{\mathbb{H}}(\mathbb{F}) = \frac{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F})}{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})},$$

όπου $\mathbb{R} \leq \mathbb{F}$ και $\mathbb{R} \leq \mathbb{H}$ είναι (ελάχιστο) κοινό υπόσωμά των \mathbb{F} και \mathbb{H} πάνω στο οποίο βασίζονται και τα δύο.

$\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}$ είναι ο ταυστικός χώρος που συνάγεται από τους επιμέρους διανυσματικούς χώρους \mathbb{F} και \mathbb{G} , και διαφέρει ριζικά από το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{F} \times \mathbb{G}$, διαφορά η οποία εύκολα αναδεικνύεται από

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{G} \text{ ενώ } \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F} \times \mathbb{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{G}.$$

Η αυτοσυνέπεια επαναφέρεται με φυσικό τρόπο επεκτείνοντας το πεδίο από το \mathbb{F} στο $\mathbb{F} \times \mathbb{G}$, ή σε φορμαλισμό δεικτών, από ϕ_a σε ϕ_{ab} . Η σταθερά ανάπτυξης σε συνιστώσες γράφεται συνολικά $(fg) \equiv (f)(g)$. Η σταθερά αναλογίας στην (3.1.39) είναι πρωτίστως $(f)^{-2}$ από την ανάπτυξη σε δείκτες του \mathbb{F} , επί $(g)^{-2}$ και όχι $(g)^{-1}$ αφού $S \in \mathbb{G} \leq \mathbb{F} \otimes \mathbb{G}$ και επομένως αναδύεται ένας παράγοντας (g) κατά τη γραφή του γινομένου $\circ_{cbd}(\dots)$, ο οποίος όμως απορροφάται στην αναλλοίωτη γραφή της δράσης $(g)S$. Ο λόγος είναι ότι η κανονικοποίηση της δράσης αφορά τη φυσική και πρέπει να παραμείνει ή ίδια για το πραγματικό της μέρος μετά την επέκτασή.

Εξισώσεις Langevin (συνιστώσες) για το επεκταμένο πεδίο $\phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X$ και μη-πραγματική δράση $S \in \mathbb{G}$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_{ab}(\tau) \rangle = \gamma^{-2} \langle x | K_{ab}(\phi(\tau)) \rangle + \gamma^{-1} \langle x | \eta_{ab}(\tau) \rangle, \quad K_{ab}(\phi) := -(fg)^{-2} \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta\phi_{ac}} (g) S_d[\phi], \quad (3.1.40)$$

$$\langle \langle x | \eta_{ab}(\tau) \rangle \rangle = 0_{ab} \text{ και } \langle \langle x | \eta_{ab}(\tau) \rangle \langle \eta_{a'b'}(\tau') | x' \rangle \rangle = 2(fg)^{-2} \gamma_{aba'b'} \langle x | x' \rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (3.1.41)$$

όπου $\gamma_{aba'b'} \equiv \alpha_{aa'} \beta_{bb'}$ και κατά συνέπεια $\gamma^2 \equiv \gamma_{abab} = \alpha_{aa} \beta_{bb} \leq \delta_{aa} \delta_{bb} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{G} \equiv \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})$.

Για $(f) = \alpha^{-1}$ και $(g) = \beta^{-1}$ ή $(fg) = (f)(g) = \alpha^{-1} \beta^{-1} = \gamma^{-1}$ (αφού $\gamma = \alpha\beta$), $\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle = \langle x | x' \rangle$, οι εξισώσεις Langevin (3.1.40) αποκτούν δηλαδή την απλούστερη δυνατή μορφή.

Το \mathbb{G} -κομμάτι του πεδίου ϕ στην εκάστοτε θεωρία δεν έχει φυσικό νόημα και ως εκ τούτου μπορεί να χρησιμοποιηθεί με οποιοδήποτε συμβατό με το \mathbb{F} -κομμάτι του πεδίου. Για παράδειγμα, το πιο σύνηθες στη βιβλιογραφία [5, 6, 7] είναι ο μηδενισμός του \mathbb{G} -θορύβου, δηλαδή οι συνιστώσες του θορύβου αναπαρίστανται ως $\eta_{ab} = \eta_a 1_b$ με

$$\langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau') | x' \rangle \rangle = 2(f)^{-2} \alpha_{aa'} \langle x | x' \rangle \delta(\tau - \tau') \quad (3.1.42)$$

³Στην περίπτωση ηλίικου πάνω στο σώμα \mathbb{F} έχουμε

$$\frac{\phi}{\psi} = \frac{\psi^\dagger \phi}{|\psi|^2} \text{ ή } \left(\frac{\phi}{\psi} \right)_a = \bullet_{abc} \frac{\psi_b \phi_c}{\psi_d \psi_d} = \bullet_{abc} \frac{\phi_c}{\psi_b} \text{ όταν } \frac{\psi_b}{\psi_d} = \delta_{bd}.$$

3 Δυναμική Langevin

όπου εννοείται πως $\langle g \rangle = 1$ και άρα $\langle fg \rangle = \langle f \rangle$ το οποίο συνάγεται από το απλό γεγονός ότι ο \mathbb{G} -θόρυβος έχει μία συνιστώσα, και η σταθερά ανάπτυξης προεπιλέγεται με αυτήν την επιλογή. Έτσι γίνεται φανερό πως στην κατεύθυνση \mathbb{G} το πεδίο αναπτύσσεται στις συνιστώσες του χωρίς κανονικοποίηση. Οι εν λόγω συνιστώσες ϕ_{-b} αποτελούν φυσικά πεδία, μόνο το «πραγματικό» ϕ_{-0} εκ' των οποίων αφορά τη θεωρία υπό εξέταση, ενώ τα υπόλοιπα είναι βοηθητικά.

Οι εξισώσεις Langevin γράφονται τότε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_{ab}(\tau) \rangle = \alpha^{-2} \langle x | K_{ab}(\phi(\tau)) \rangle + \alpha^{-1} \langle x | \eta_a(\tau) \rangle 1_b, \quad K_{ab}(\phi) := -\langle f \rangle^{-2} \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}} S_d[\phi]. \quad (3.1.43)$$

Δεδομένης της τυχαιότητας του θορύβου, οι εξισώσεις Langevin σέβονται μια συμμετρία συζυγίας-parity [6]

$$\phi_{ab} \longrightarrow -\diamond_{ac} \diamond_{bd} \phi_{cd} \text{ με } K_{ab} \longrightarrow -\diamond_{ac} \diamond_{bd} K_{cd}, \quad (3.1.44)$$

η οποία μηδενίζει όλες τις συναρτήσεις Green δύο σημείων $\langle \langle \phi_{ab} \phi_{cd} \rangle \rangle$ εκτός από αυτές των οποίων τα συμμετέχοντα πεδία αλλάζουν ταυτόχρονα πρόσημο με τον εν λόγω μετασχηματισμό συμμετρίας δίνοντας [6]

$$\langle \langle \phi_{ab} \phi_{cd} \rangle \rangle \propto \delta_{ac} \delta_{bd} + \varepsilon_{ac} \varepsilon_{bd}. \quad (3.1.45)$$

3.2 Εξίσωση Fökker-Planck

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ή της υποβόσκουσας αλγεβρικής δομής και όπου κρίνεται απαραίτητο, οι αλγεβρικοί δείκτες θα παραλείπονται. Για το λόγο αυτό (και για λόγους re-usability) επανεισάγεται ο πυρήνας \mathcal{K} στην εξίσωση Langevin, ο οποίος είναι σημαντικό να θυμηθούμε πως είναι αναγκαία ερμητιανός και θετικά ορισμένος.

Εξίσωση Langevin για πεδία $\phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X$ και δράση $S \in \mathbb{G}$ με θόρυβο $\eta \in \mathbb{F}^X$ και πυρήνα $\mathcal{K} \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{F})^X$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle = \langle x | \eta_a(\tau) \rangle + \langle x | K_a(\phi(\tau)) \rangle, \quad \langle x | K_a(\phi) \rangle = - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a | x' \rangle} S[\phi] \quad (3.2.1)$$

$$\langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \rangle = 0 \text{ και } \langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau) | x' \rangle \rangle = 2\alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau') \quad (3.2.2)$$

Η λύση της εξίσωσης δεν είναι μοναδική, ανήκει κατά βάση σε μια κατανομή λύσεων, με «πυκνότητα πιθανότητας» $\langle \phi | \rho(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$, κατανομή η οποία παράγεται χάρη στο στοχαστικό μέρος της εξίσωσης: τον θόρυβο η . Κατά σύμβαση όταν πεδίο και χρόνος Langevin γράφονται ως ένα, αποτελεί λύση της εξίσωσης Langevin, και ειδικότερα το στιγμιότυπο $\phi(\tau)$ της εν λόγω λύσης, η οποία έχει επιπλέον μια κρυφή εξάρτηση *ίσων χρόνων* από τον θόρυβο $\eta(\tau)$. Αντιθέτως, η πυκνότητα ρ εξαρτάται από το χρόνο Langevin και τα πεδία explicitly, δίνοντας επιμέρους πυκνότητες πεδίων ίσου χρόνου (τ -slices).

Σε μία στοχαστική εξίσωση, το θέμα δεν είναι τόσο αν ένα συγκεκριμένο πεδίο ϕ είναι λύση ή όχι αλλά ποια είναι η πιθανότητα του να είναι λύση. Με λίγα λόγια όλος ο χώρος $(\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^{X \times \mathbb{R}}$ είναι ανοιχτός στην εξίσωση Langevin:

$\forall \phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^{X \times \mathbb{R}}, \exists \eta \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^{X \times \mathbb{R}}$ με κατανομή πιθανότητας που δίνεται από τη δράση

$$A[\eta(\tau)] = \frac{1}{4} \langle \eta(\tau) | \mathcal{K}^{-1} | \eta(\tau) \rangle = \frac{1}{4} \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a(\tau) \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'}(\tau) \rangle \rangle \quad (3.2.3)$$

τέτοιος ώστε ϕ είναι λύση της εξίσωσης Langevin με θόρυβο η , όπου \mathcal{K}^{-1} είναι ο αντίστροφος του \mathcal{K} ,

$$\langle x | \mathcal{K} | \mathcal{K}^{-1} | x' \rangle = \langle x | \mathcal{K}^{-1} | \mathcal{K} | x' \rangle = \langle x | x' \rangle \quad (3.2.4)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση γίνεται στην προκειμένη:

$$Z[\xi] \equiv \left\langle \exp \left(\frac{1}{2} (\langle \xi | \phi \rangle + \langle \phi | \xi \rangle) \right) \right\rangle = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(- \frac{1}{2} \langle \phi | \mathcal{K}^{-1} | \phi \rangle + \frac{1}{2} (\langle \xi | \phi \rangle + \langle \phi | \xi \rangle) \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right),$$

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle\right),$$

έτσι ώστε $Z[0] = 1$.

$$\begin{aligned} (\langle\xi|\mathcal{K} - \langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|(\phi) - \mathcal{K}|\xi\rangle) &= \langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle - \langle\xi|\mathcal{K}|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle - \langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\mathcal{K}|\xi\rangle + \langle\xi|\mathcal{K}|\mathcal{K}^{-1}|\mathcal{K}|\xi\rangle \\ &= \langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle - \langle\xi|\phi\rangle - \langle\phi|\xi\rangle + \langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle. \end{aligned}$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $\psi = \phi - \mathcal{K}\xi$, $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\psi$, έχουμε

$$-\frac{1}{2}\langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle + \frac{1}{2}(\langle\xi|\phi\rangle + \langle\phi|\xi\rangle) = -\frac{1}{2}\langle\psi|\mathcal{K}^{-1}|\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle.$$

Τελώντας την αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα της γεννήτριας συνάρτησης

$$\frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle + \frac{1}{2}(\langle\xi|\phi\rangle + \langle\phi|\xi\rangle)\right) = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\psi \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\psi|\mathcal{K}^{-1}|\psi\rangle\right) \exp\left(\frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle\right).$$

Όμως

$$Z_0 \equiv \int \mathcal{D}\psi \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\psi|\mathcal{K}^{-1}|\psi\rangle\right),$$

επομένως

$$Z[\xi] = \exp\left(\frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle\right).$$

Οι συναρτήσεις Green ελεύθερων πεδίων γράφονται τότε ως συναρτησιακές παράγωγοι της γεννήτριας συνάρτησης (1.2.4),

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \langle x_i|\phi\rangle \langle\phi|x'_i\rangle \right\rangle = \prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta\langle x'_i|\xi\rangle} \frac{\delta}{\delta\langle\xi|x_i\rangle} Z[0],$$

με συγκεκριμένη δράση

$$S[\phi] = -\frac{1}{2}\langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle.$$

Η δράση A του θορύβου η είναι διαγώνια ως προς το χρόνο Langevin τ επομένως όλοι οι υπολογισμοί μπορούν να διαχωριστούν σε ίσους χρόνους, και ο χρόνος τ αγνοείται σε ότι ακολουθεί.

Συνήθως αυτό που συμβαίνει είναι ο ελεύθερος όρος \exp επιβιώνει πάντοτε στις διαφορίσεις και γίνεται μονάδα όταν $\xi = 0$.

$$\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle = \int_X d^{\dim X} x \int_X d^{\dim X} x' \langle\xi|x\rangle \langle x|\mathcal{K}|x'\rangle \langle x'|\xi\rangle.$$

Ως ενδιαμέσο βήμα υπολογισμού δείχνουμε κάτι το οποίο είναι ήδη γνωστό,

$$\langle\langle x|\eta\rangle\rangle = \frac{\delta}{\delta\langle\xi|x\rangle} Z[\xi] = \frac{\delta}{\delta\langle\xi|x\rangle} \exp\left(\frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle\right) = \frac{1}{2} \frac{\delta\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle}{\delta\langle\xi|x\rangle} \exp\left(\frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle\right).$$

Από τη στιγμή που \mathcal{K} ερμητιανός,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\delta \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle \xi | x \rangle} &= \int_X d^{\dim X} x' \int_X d^{\dim X} x'' \frac{\delta \langle \xi | x'' \rangle}{\delta \langle \xi | x \rangle} \langle x'' | \mathcal{K} | x' \rangle \langle x' | \xi \rangle \\ &= \int_X d^{\dim X} x' \int_X d^{\dim X} x'' \langle x | x'' \rangle \langle x'' | \mathcal{K} | x' \rangle \langle x' | \xi \rangle \\ &= \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \langle x' | \xi \rangle \\ &= \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle, \end{aligned}$$

επομένως

$$\langle \langle x | \eta \rangle \rangle = \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right) = 0 \text{ για } \xi = 0. \quad (3.2.5)$$

Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για τον υπολογισμό στη συνέχεια της συνάρτησης συσχετισμού του θορύβου

$$\begin{aligned} \langle \langle x | \eta \rangle \langle \eta | x' \rangle \rangle &= \frac{\delta}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \frac{\delta}{\delta \langle \xi | x \rangle} Z[\xi] = \frac{\delta}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \left(\langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right) \right) = \\ &= \frac{\delta \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right) + \frac{1}{2} \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \frac{\delta \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας κατά παράγοντες,

$$\frac{\delta}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \left(\langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right) \right) = \frac{\delta \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right) + \frac{1}{2} \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \frac{\delta \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right). \quad (3.2.6)$$

Ομοίως,

$$\frac{1}{2} \frac{\delta \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} = \langle \xi | \mathcal{K} | x' \rangle, \quad (3.2.7)$$

ενώ

$$\frac{\delta \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} = \int_X d^{\dim X} x'' \langle x | \mathcal{K} | x'' \rangle \frac{\delta \langle x'' | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} = \int_X d^{\dim X} x'' \langle x | \mathcal{K} | x'' \rangle \langle x'' | x' \rangle = \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle. \quad (3.2.8)$$

Αντικαθιστώντας,

$$\langle \langle x | \eta \rangle \langle \eta | x' \rangle \rangle = (\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle + \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \langle \xi | \mathcal{K} | x' \rangle) \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right) = \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \text{ για } \xi = 0. \quad (3.2.9)$$

3.2.1 Το σύμβολο Dirac της κατανομής

Η $\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$ μας λέει ποια είναι η πιθανότητα το πεδίο ϕ στη χρονική στιγμή τ να είναι στιγμιότυπο $\phi(\tau)$ λύσης της εξίσωσης Langevin (3.1.1) δεδομένου ότι ϕ_0 τη χρονική στιγμή τ_0 είναι στιγμιότυπο λύσης της εξίσωσης. Η εξάρτηση δηλαδή μιας λύσης $\phi(\tau)$ από την αρχική συνθήκη $\phi(\tau_0) = \phi_0$ είναι πιθανοφανική και όχι ντετερμινιστική λόγω της στοχαστικής φύσης της εξίσωσης.

Επειδή η εξίσωση Langevin είναι τοπική στο χρόνο τ , καθώς ο θόρυβος είναι ασυσχέτιστος για $\tau = \tau'$ από τη συνθήκη (3.1.2), η \wp είναι markovιανή, [2] δηλαδή

$$\langle \phi | \wp(\tau, \tau'') | \phi'' \rangle = \int \mathcal{D}\phi' \langle \phi | \wp(\tau, \tau') | \phi' \rangle \langle \phi' | \wp(\tau', \tau'') | \phi'' \rangle, \quad (3.2.10)$$

ή ισοδύναμα

$$\wp(\tau, \tau'') = \wp(\tau, \tau') \wp(\tau', \tau'') \quad (3.2.11)$$

το οποίο σημαίνει πως η \wp μπορεί να δομηθεί σε μικρά βήματα χρόνου, το οποίο θυμίζει πολύ τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζουμε άτυπα τα path integrals. Από (3.2.10) γίνεται κατανοητό πως ο συμβολισμός $\langle \cdot \cdot \rangle$ εδώ συμπίπτει με αυτόν της αναμενόμενη τιμής, δηλαδή το path integral και όχι το ολοκλήρωμα ως προς το χωροχρόνο. Σε αυτό το context για παράδειγμα,

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \delta[\phi - \phi'], \quad (3.2.12)$$

όπου $\delta[\phi - \phi']$ είναι η (φορμαλιστικά) συναρτησιακή συνάρτηση δέλτα, δηλαδή $\forall \mathcal{O}$,

$$\int \mathcal{D}\phi \delta[\phi - \phi'] \mathcal{O}[\phi] = \mathcal{O}[\phi]. \quad (3.2.13)$$

Έτσι τα σύμβολα $|\cdot\rangle$ και $\langle\cdot|$ είναι όντως kets και bras. [2]

Η (3.2.10) μαζί με τη συμμετρία μετατόπισης στο χρόνο, ο τελεστής $\wp(\tau, \tau_0)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\wp(\tau, \tau_0) = \exp(-(\tau - \tau_0)H), \quad (3.2.14)$$

όπου ο τελεστής H ονομάζεται hamiltonιανή Fökker-Planck και η (3.2.14) ικανοποιεί την επονομαζόμενη εξίσωση Fökker-Planck με καθορισμένη αρχική συνθήκη,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \wp(\tau, \tau_0) = -H \wp(\tau, \tau_0), \quad \wp(\tau_0, \tau_0) = 1. \quad (3.2.15)$$

Η εύρεση της hamiltonιανής Fökker-Planck συνάδει με την εύρεση της εξίσωσης Fökker-Planck η οποία μεταφράζεται στο hamiltonιανό φορμαλισμό

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = - \int \mathcal{D}\phi' \langle \phi | H | \phi' \rangle \langle \phi' | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle, \quad \langle \phi | \wp(\tau_0, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \langle \phi | \phi_0 \rangle, \quad (3.2.16)$$

και αποτελεί αντικείμενο της ανάλυσης που ακολουθεί. Προσοχή εφίσταται στο γεγονός πως η hamiltonιανή H δεν είναι ερμητιανή, διαφορετικά στο δεξί μέλος της εξίσωσης Fökker-Planck θα είχαμε τον μεταθέτη $[H | \wp]$.

3.2.2 Εξαγωγή της εξίσωσης Fökker-Planck

Λόγω στοχαστικής φύσης του πεδίου παύει να έχει νόημα ο υπολογισμός οποιουδήποτε παρατηρήσιμου μεγέθους \mathcal{O} συναρτήσε του πεδίου ϕ (όπως γίνεται στο όριο της κβαντικής θεωρίας πεδίου), και αποκτά νόημα η μέση τιμή του εν λόγω μεγέθους πάνω σε όλα τα πιθανά ϕ . Η κατανομή αυτή, η οποία ταυτίζεται με τη ζητούμενη $\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$ ορίζεται τότε $\forall \mathcal{O}$

$$\langle \mathcal{O}(\tau) \rangle \equiv \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \mathcal{O}[\phi(\tau)] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \langle \phi_0 | \wp(\tau_0, \tau) | \phi \rangle, \quad (3.2.17)$$

ή εναλλακτικά

$$\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \langle \phi | \phi(\tau) \rangle, \quad (3.2.18)$$

όπου ο θόρυβος ως ασυσχέτιστος στον χρόνο Langevin λαμβάνεται στατικός στις αναμενόμενες τιμές,

$$\varrho[\eta] = \rho_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{4} \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle\right), \quad \varrho_0 = \int \mathcal{D}\eta \exp\left(-\frac{1}{4} \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle\right). \quad (3.2.19)$$

Τότε η κατανομή πιθανότητας $\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$ ικανοποιεί την εξίσωση Fökker-Planck,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\alpha_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \delta_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle, \quad (3.2.20)$$

ή ισοδύναμα

$$\langle \phi | H | \phi' \rangle = - \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\alpha_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \delta_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \phi' \rangle. \quad (3.2.21)$$

Παραγωγίζοντας $\langle \mathcal{O}(\tau) \rangle$ και εφαρμόζοντας κανόνα αλυσίδας του Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O}[\phi(\tau)] \rangle = \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_a(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_a(\tau)} \mathcal{O}(\tau) \right\rangle \right\rangle \quad (3.2.22)$$

3 Δυναμική Langevin

Για κάθε χρονική στιγμή τ και χάρη στον ασυσχετισμό $\langle \eta(\tau)\eta(\tau') \rangle \propto \delta(\tau - \tau')$, η επιμέρους κατανομή του θορύβου $\eta(\tau)$ είναι ταυτόσημη και της μορφής

$$\varrho[\eta] \equiv \varrho_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle \eta | \mathcal{K}^{-1} | \eta \rangle\right), \quad \varrho_0^{-1} \equiv \int \mathcal{D}\eta \exp\left(-\frac{1}{4}\langle \eta | \mathcal{K}^{-1} | \eta \rangle\right) \quad (3.2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O}(\tau) \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \mathcal{O}[\phi(\tau)] = \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{O}[\phi(\tau)] \equiv \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{O}(\tau) \right\rangle \right\rangle \quad (3.2.24)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση Langevin (3.1.1),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O}(\tau) \rangle = \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \eta_a(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \mathcal{O}(\tau) - \delta_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi_a(\tau)} S[\phi(\tau)] \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \right\rangle \mathcal{O}(\tau) \right\rangle. \quad (3.2.25)$$

$\forall \mathcal{O} : \mathbb{F}^X \rightarrow \mathbb{F}^X : \phi \mapsto \mathcal{O}(\phi)$,

$$\langle \alpha_{aa'} \langle \eta_a(\tau) \mathcal{O}_{a'}(\phi(\tau)) \rangle \rangle = 2 \left\langle \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta_a(\tau)} \left\langle \phi_{a''}(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a''}(\tau)} \right\rangle \mathcal{K} \mathcal{O}_{a'}(\phi(\tau)) \right\rangle \right\rangle \right\rangle \right\rangle. \quad (3.2.26)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας παραλείπεται ο χρόνος Langevin τ στη γενική ισχύ της αποδεικτέας σχέσης.

Εισάγοντας τον προβολικό τελεστή $\mathcal{K}^{-1}|x\rangle\langle x|\mathcal{K}$,

$$\langle \alpha_{aa'} \langle \eta_a \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle \rangle = \langle \alpha_{aa'} \langle \langle \langle \eta_a \mathcal{K}^{-1} \mathcal{K} \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle \rangle \rangle \rangle = \int \mathcal{D}\eta \int_X d^{\dim X} x \varrho[\eta] \langle \eta_a | \mathcal{K}^{-1} | x \rangle \alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle$$

αναδύεται ο όρος $\langle \eta_a | \mathcal{K}^{-1} | x \rangle \alpha_{aa'}$ ο οποίος μοιάζει με την συναρτησιακή παράγωγο της «δράσης» $\alpha_{aa'} \langle \langle \eta_a \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle$. Πράγματι,

$$\frac{\delta}{\delta \langle x | \eta_a \rangle} \varrho[\eta] = -\frac{1}{4} \alpha_{a''a'} \frac{\delta \langle \langle \eta_{a''} \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle}{\delta \langle x | \eta_a \rangle} \varrho[\eta] = -\frac{1}{2} \varrho[\eta] \langle \eta_a | \mathcal{K}^{-1} | x \rangle \alpha_{aa'}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{aa'} \langle \eta_a \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle \rangle &= -2 \int \mathcal{D}\eta \int_X d^{\dim X} x \frac{\delta}{\delta \langle x | \eta_a \rangle} \varrho[\eta] \alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle = \\ &= 2 \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta_a} \mathcal{K} \mathcal{O}_{a'}(\phi) \right\rangle \right\rangle = 2 \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta_a} \left\langle \phi_{a''} \frac{\delta}{\delta \phi_{a''}} \right\rangle \mathcal{K} \mathcal{O}_{a'}(\phi) \right\rangle \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Κάνοντας της αντικατάσταση

$$\mathcal{O}_a(\phi) = \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{O}[\phi] \quad (3.2.27)$$

στην (3.2.26), έχουμε

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \eta_a(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \mathcal{O}(\tau) \right\rangle &= 2 \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta_a(\tau)} \left\langle \phi_{a''}(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a''}(\tau)} \right\rangle \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \right\rangle \mathcal{O}[\phi(\tau)] \right\rangle \equiv \\ &\equiv 2 \langle \alpha_{aa'} \langle \langle \Phi_{aa''}(\tau, \tau) \Delta_{a'a''}(\tau, \tau) \rangle \rangle \mathcal{O}(\tau) \rangle \quad (3.2.28) \end{aligned}$$

όπου

$$\langle x | \Phi_{aa'}(\tau, \tau') | x' \rangle \equiv \frac{\delta}{\delta \langle x' | \eta_{a'}(\tau') \rangle} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle, \quad (3.2.29)$$

$$\langle x|\Delta_{aa'}(\tau, \tau')|x'\rangle \equiv \int_X d^{\dim X} x'' \frac{\delta}{\delta\langle x'|\phi_{a'}(\tau')\rangle} \langle x|\mathcal{K}|x''\rangle \frac{\delta}{\delta\langle \phi_a(\tau)|x''\rangle}. \quad (3.2.30)$$

Τελώνοντας την εξίσωση Langevin (3.2.1) με συναρτησιακή παράγωγο θορύβου η , η τυπική διαφορική εξίσωση που υπακούει η Φ είναι

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x|\Phi_{aa'}(\tau, \tau')|x'\rangle = \alpha_{aa'} \langle x|x'\rangle \delta(\tau - \tau') - \int_X d^{\dim X} x'' \langle x|\Delta_{aa'}(\tau, \tau')|x''\rangle S[\phi(\tau)] \langle x''|\Phi_{a''a'}(\tau, \tau')|x'\rangle. \quad (3.2.31)$$

Πράγματι, με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας ο όρος ολίσθησης γίνεται

$$\frac{\delta}{\delta\langle x'|\eta_{a'}\rangle} \frac{\delta}{\delta\langle \phi_a|x\rangle} S[\phi] = \int_X d^{\dim X} x'' \frac{\delta}{\delta\langle x''|\phi_{a''}\rangle} \frac{\delta}{\delta\langle \phi_a|x\rangle} S[\phi] \frac{\delta}{\delta\langle x'|\eta_{a'}\rangle} \langle x''|\phi_{a''}\rangle.$$

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης που αντιστοιχεί στην (3.2.31) είναι της μορφής

$$\langle x|\Phi_{aa'}(\tau, \tau')|x'\rangle = \int_X d^{\dim X} x'' \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \langle x|\Delta_{aa'}(\tau'', \tau')|x''\rangle S[\phi(\tau'')]\right) \langle x''|\Phi_{a''a'}(\tau_0, \tau')|x'\rangle, \quad (3.2.32)$$

με αρχική συνθήκη η οποία προκύπτει από την επιλογή αρχικής συνθήκης για την εξίσωση Langevin,

$$\langle x|\Phi_{aa'}(\tau_0, \tau')|x'\rangle \equiv \frac{\delta}{\delta\langle x'|\eta_{a'}(\tau')\rangle} \langle x|\phi_a(\tau_0)\rangle. \quad (3.2.33)$$

Ξεχνώντας προς το παρόν την πλεγματοική θέση και την άλγεβρα των πεδίων, δηλαδή $\delta_{aa'} \langle x|x'\rangle = 1$, η (3.2.31) γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \Phi(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') - \Delta(\tau, \tau') S[\phi(\tau)] \Phi(\tau, \tau'),$$

η γενική λύση στο ομογενές κομμάτι της οποίας γράφεται

$$\Phi(\tau, \tau') = \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \Phi(\tau_0, \tau'),$$

με αρχική συνθήκη $\Phi(\tau_0, \tau')$ η οποία καθορίζεται από την αρχική συνθήκη $\phi(\tau_0)$. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο Langevin

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} \Phi(\tau, \tau') &= \frac{\partial}{\partial\tau} \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \Phi(\tau_0, \tau') = \\ &= \Delta(\tau, \tau') S[\phi(\tau)] \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right). \end{aligned}$$

Μια ειδική λύση της μη-ομογενούς ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών είναι για $\tau, \tau' > \tau_0$

$$\Phi(\tau, \tau') = \exp\left(-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \theta(\tau - \tau').$$

Έχοντας διατηρήσει τη σειρά γινομένων, με προσεκτική επαναφορά της άλγεβρας των πεδίων και της πλεγματοικής θέσης, προκύπτει η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης, η οποία γράφεται

$$\Phi(\tau, \tau') = \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \Phi(\tau_0, \tau') + \exp\left(-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \theta(\tau - \tau').$$

Για $\phi(\tau_0) = \eta(\tau_0)$, $\Phi(\tau_0, \tau') = \delta(\tau_0 - \tau')$ ή για $\phi(\tau_0) = 0$, $\Phi(\tau_0, \tau') = 0$ έχουμε την ειδική λύση μόνο.

3 Δυναμική Langevin

Η επιλογή της αρχικής συνθήκης γίνεται με γνώμονα την επιλογή αρχικής συνθήκης για το πεδίο ϕ . Μια συνήθης επιλογή (hot configuration) είναι

$$\phi(\tau_0) = \eta(\tau_0) \text{ οπότε } \langle x|\Phi_{aa'}(\tau_0, \tau')|x' \rangle = \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \delta(\tau_0 - \tau'). \quad (3.2.34)$$

Με την επιλογή αυτή, η λύση της (3.2.31) είναι

$$\langle x|\Phi_{aa'}(\tau, \tau')|x' \rangle = \int d^{\dim X} x'' \exp\left(-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' \langle x|\Delta_{aa''}(\tau'', \tau')|x'' \rangle S[\phi(\tau'')]\right) \alpha_{aa''} \langle x''|x' \rangle \theta(\tau - \tau'). \quad (3.2.35)$$

Για $\tau = \tau' > \tau_0$, [2]

$$\langle x|\Phi_{aa'}(\tau, \tau)|x' \rangle = \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \theta(0) \equiv \frac{1}{2} \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle. \quad (3.2.36)$$

Η ίδια λύση προκύπτει και με την επιλογή (cold configuration)

$$\phi(\tau_0) = 0 \text{ οπότε } \langle x|\Phi_{aa'}(\tau_0, \tau')|x' \rangle = 0. \quad (3.2.37)$$

Επομένως,

$$\left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \eta_a(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \mathcal{O}(\tau) \right\rangle = \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi_a(\tau)} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \right\rangle \mathcal{O}(\tau) \right\rangle, \quad (3.2.38)$$

και έχουμε με αυτόν τον τρόπο συνάγει μια εξίσωση χρονικής εξέλιξης του $\langle \mathcal{O}(\tau) \rangle$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O}(\tau) \rangle = -\langle H^\dagger \mathcal{O}(\tau) \rangle, \quad (3.2.39)$$

όπου ορίζουμε τη δυϊκή hamiltonιανή

$$\langle \phi|H^\dagger|\phi' \rangle \equiv -\left\langle \left\langle \left(\frac{\delta}{\delta \phi_a} \alpha_{aa'} - \frac{\delta}{\delta \phi_a} S[\phi] \delta_{aa'} \right) \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} \right\rangle \right\rangle \langle \phi|\phi' \rangle. \quad (3.2.40)$$

Ορίζεται ο τελεστής ορμής

$$\pi_a = -i \frac{\delta}{\delta \phi_b} \text{ ή } \frac{\delta}{\delta \phi_a} = i\pi_b \text{ με } \frac{\delta}{\delta \phi_a} \frac{\delta}{\delta \phi_a} = -\pi_a \pi_a.$$

Η δυϊκή hamiltonιανή H^\dagger γράφεται τότε για πραγματικά πεδία ϕ με $k \equiv -(\delta/\delta\phi)S[\phi]$, όπου $\pi^\dagger = -\pi$,

$$\langle \phi|H^\dagger|\phi' \rangle = \langle \langle (\pi_a \alpha_{aa'} - i k_a \delta_{aa'}) \mathcal{K} \pi_{a'} \rangle \rangle \langle \phi|\phi' \rangle = -\langle \pi_a \alpha_{aa'} - i k_a \delta_{aa'} | \mathcal{K} | \pi_{a'} \rangle \langle \phi|\phi' \rangle,$$

ως συζυγό-μορφή της hamiltonιανής H

$$\langle \phi|H|\phi' \rangle = \langle \langle \pi_a \mathcal{K} (\alpha_{aa'} \pi_{a'} + i \delta_{aa'} k_{a'}) \rangle \rangle \langle \phi|\phi' \rangle = -\langle \pi_a | \mathcal{K} | \alpha_{aa'} \pi_{a'} + i \delta_{aa'} k_{a'} \rangle \langle \phi|\phi' \rangle,$$

το οποίο γίνεται ακριβές όταν $\alpha = 1$ δεδομένου ότι $k^\dagger = k$,

$$\langle \pi_a | \mathcal{K} | \pi_a + i k_a \rangle^\dagger = \langle \pi_a - i k_a | \mathcal{K} | \pi_a \rangle,$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί καταχρηστικά ο συμβολισμός $\langle \cdot | \cdot \rangle \equiv \langle \cdot^\dagger | \cdot \rangle$ ειδικά μόνο για τα μιγαδικά πεδία που εμφανίζονται ως συνιστώσες της ορμής εδώ, και για να φανεί η ιδιότητα της συζυγίας.

Αναπτύσσοντας την (3.2.39),

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi|\rho(\tau, \tau_0)|\phi_0 \rangle \mathcal{O}[\phi] = \int \mathcal{D}\phi \langle \phi|\rho(\tau, \tau_0)|\phi_0 \rangle \left\langle \left\langle \left(\frac{\delta}{\delta \phi_a} \alpha_{aa'} - \frac{\delta}{\delta \phi_a} S[\phi] \delta_{aa'} \right) \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} \right\rangle \right\rangle \mathcal{O}[\phi]. \quad (3.2.41)$$

και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες συνάγεται η εξίσωση Fökker-Planck (3.2.20).

Η ολοκληρωτέα ποσότητα στο δεξί μέλος της (3.2.41) είναι της μορφής

$$\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} - \wp \frac{\delta}{\delta\phi} S \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O}$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και αγνοώντας όρους που δίνουν ολικές παραγώγους στην τελική ολοκληρωτέα ποσότητα, μία φορά τον πρώτο όρο

$$\wp \frac{\delta}{\delta\phi} S \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} = \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} S \right) - \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} S \wp \right)$$

$$\int \mathcal{D}\phi \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} S \right) \right\rangle = 0,$$

και δύο φορές για το δεύτερο,

$$\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} = \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} \right) - \frac{\delta}{\delta\phi} \wp \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} = \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} - \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} \wp \right) + \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi} \wp$$

$$\int \mathcal{D}\phi \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} - \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} \wp \right) \right\rangle = 0,$$

συνεπάγεται ότι

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial\tau} \wp = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{\delta}{\delta\phi} S \right) \right\rangle \wp$$

$\forall \mathcal{O}$ παρατηρήσιμη ποσότητα. Επαναφέροντας τη δομή των πεδίων ϕ καταλήγουμε στην εξίσωση Fökker-Planck.

3.2.3 Η κατάσταση ισορροπίας για $\tau \rightarrow \infty$ και το Feynman path integral

Η εξαγωγή της εξίσωσης Fökker-Planck είναι από μόνη της εξαντλητική, και δεν έχουμε προχωρήσει ακόμη σε ενδεχόμενες λύσεις της. Ευτυχώς, το σημείο που χρειάζεται προσοχή είναι οι στατικές λύσεις της εξίσωσης Fökker-Planck, οι οποίες στατικές κατανομές $\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$ θα δούμε πως ταυτίζονται με το Feynman path integral.

3.2.3.1 Ενδείξεις από εξίσωση Langevin

Αν λάβουμε αναμενόμενες τιμές της (απλής) εξίσωσης Langevin, κατάσταση ισορροπίας σημαίνει

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\tau} x | \phi_a(\tau) \right\rangle = \left\langle x | \eta_a(\tau) - \int d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a(\tau) | x' \rangle} S[\phi(\tau)] \right\rangle = 0, \quad (3.2.42)$$

δηλαδή για ταυτοτικό πυρήνα $\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle = \langle x | x' \rangle$,

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a(\tau) | x \rangle} S[\phi(\tau)] \right\rangle = 0. \quad (3.2.43)$$

Παρεμπιπτόντως

$$\frac{\delta}{\delta \langle \phi_a | x \rangle} S[\phi] = 0 \quad (3.2.44)$$

ισοδυναμεί με τις εξισώσεις κίνησης της κλασικής θεωρίας πεδίου δράσης $S[\phi]$, το οποίο αποτελεί μια ποιοτική ένδειξη του λόγου για τον οποίο προσεγγίζουμε την κβαντική θεωρία πεδίου (κατά ολοκλήρωμα Feynman) με την κατάσταση

3 Δυναμική Langevin

ισορροπίας της εξέλιξης Langevin. Αυτό που επιθυμούμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Langevin είναι να υπάρχει το όριο

$$\langle\langle x|\psi_a \rangle\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle\langle x|\phi_a(\tau) \rangle\rangle \quad (3.2.45)$$

στο οποίο το πεδίο ψ είναι στατικά πιθανοφανικό ως προς τον πλασματικό χρόνο Langevin τ .

3.2.3.2 Στατική κατανομή Fökker-Planck

Στο εξής θα παραλείπεται ο χρόνος τ_0 της αρχικής συνθήκης από το σύμβολο της Fökker-Planck $\langle\phi|\varrho(\tau, \tau_0)|\phi_0\rangle$, λόγω συμμετρίας μεταφοράς χρόνου της εξίσωσης Langevin η οποία επιτρέπει ορισμό των αρχικών συνθηκών για $\tau_0 = 0$ και ανεξαρτησίας των ορίων $\tau \rightarrow \infty$ ως προς το χρόνο αυτό, δηλαδή το σύμβολο ανάγεται σε $\langle\phi|\varrho(\tau)|\phi_0\rangle$.

Υποθέτοντας ότι το όριο

$$\varrho_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varrho(\tau) \quad (3.2.46)$$

υπάρχει, αποτελεί όπως είναι φυσικό στατική λύση της εξίσωσης Fökker-Planck, ή χρησιμοποιώντας τη hamiltonιανή μορφή (3.2.16) της εξίσωσης,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tau} \varrho_\infty |\phi_0\rangle = H \varrho_\infty |\phi_0\rangle, \quad (3.2.47)$$

γίνεται κατανοητό πως η $|0\rangle \equiv \varrho_\infty |\phi_0\rangle$ είναι δεξιά ιδιοκατάσταση του τελεστή της hamiltonιανής H με ιδιοτιμή 0, αφού η (3.2.47) είναι ανεπηρέαστη από την επιλογή αρχικών συνθηκών, γιατί βρισκόμαστε μακριά στο χρόνο Langevin σε ισορροπία και η διαδικασία είναι Markovιανή,

$$H|0\rangle = 0. \quad (3.2.48)$$

Η αναπαράσταση τη στατικής κατανομής είναι

$$\langle\phi|0\rangle = \langle\phi|\varrho_\infty|\phi_0\rangle \equiv \varrho_\infty[\phi]. \quad (3.2.49)$$

Η αναζήτηση αριστερής ιδιοκατάστασης της hamiltonιανής \mathcal{H} δίνεται από τη συζυγή εξίσωση Fökker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varrho^\dagger = -\varrho^\dagger H^\dagger = -(H\varrho)^\dagger, \quad (3.2.50)$$

τη δράση δηλαδή του τελεστή $H\varrho$ στα αριστερά στο σύμβολο

$$\langle\phi|H\varrho|\phi_0\rangle = \langle\phi|\varrho \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi} + \frac{\delta}{\delta \phi} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle |\phi_0\rangle = 0. \quad (3.2.51)$$

Βλέπουμε τότε πως $\langle 0| = \langle\phi|\varrho_\infty$ έτσι ώστε

$$\langle 0|H = 0. \quad (3.2.52)$$

Το αντίστοιχο πλάτος

$$\langle 0|\phi\rangle = \langle\phi|\varrho_\infty|\phi\rangle = 1, \quad (3.2.53)$$

ερμηνεύεται ως πιθανότητα 1 το ϕ να είναι λύση ισορροπίας, όταν η αρχική συνθήκη δίνεται στην ισορροπία και είναι ακριβώς ϕ , δηλαδή με τον τρόπο που ορίζεται η πιθανότητα $\langle\phi|\varrho_\infty|\phi'\rangle$ όπου το bra συνιστά τη ζητούμενη συνθήκη ενώ το ket τη δεδομένη, όταν αυτές συμπίπτουν εξ' ορισμού η πιθανότητα είναι 1.

Από αρχή διατήρησης της πιθανότητας

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\partial}{\partial \tau} \langle\phi|\varrho(\tau)|\phi_0\rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\phi' \langle\phi|H|\phi'\rangle \langle\phi'|\varrho(\tau)|\phi_0\rangle = 0, \quad \forall \varrho$$

προκύπτει ότι υπάρχει σταθερή αριστερή ιδιοκατάσταση $\langle 0|$ ιδιοτιμής 0 όντως υπάρχει αφού,

$$\int \mathcal{D}\phi \langle\phi|H|\phi'\rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \langle 0|\phi\rangle \langle\phi|H|\phi'\rangle = \langle 0|H|\phi'\rangle = 0, \quad \forall \phi' \quad (3.2.54)$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\langle 0|0\rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \langle 0|\phi\rangle \langle \phi|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi \rho_\infty[\phi] < \infty$$

το οποίο ισοδυναμεί με τον καλό ορισμό της στατικής κατανομή ή διαφορετικά την ύπαρξη της για τη δεδομένη στοχαστική εξέλιξη Langevin.

Έστω $|\eta\rangle$ η γενική (δεξιά) ιδιοκατάσταση της hamiltonιανής H με ιδιοτιμή E ,

$$H|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle.$$

Τότε από διατήρηση πιθανότητας (3.2.54)

$$\langle 0|H|\eta\rangle = \eta\langle 0|\eta\rangle = 0,$$

είτε $\eta = 0$ για το οποίο $|\eta\rangle = |0\rangle$, είτε $\langle 0|\eta\rangle = 0$, το οποίο δεν έρχεται σε αντίθεση με το αποτέλεσμα $\langle 0|\phi\rangle = 1$ το οποίο αφορά μόνο τα πεδία ϕ ενώ ο χώρος των καταστάσεων είναι ποια αυτών των κατανομών πάνω στα πεδία ϕ , τα οποία και αποτελούν βάση του νέου αυτού χώρου καταστάσεων.

Δεδομένου ότι $\langle \eta|\eta\rangle \geq 0$ και $\langle \eta|H|\eta\rangle \in \mathbb{F}$ εν γένει, από τη σχέση

$$\eta\langle \eta|\eta\rangle = \langle \eta|H|\eta\rangle,$$

προκύπτει ότι το πραγματικό μέρος η_0 του φάσματος της hamiltonιανής H είναι μη-αρνητικό, $\eta_0 \geq 0$ αν και μόνο αν το πραγματικό μέρος της hamiltonιανής είναι θετικά ορισμένο, δηλαδή $\langle \eta_0|H_0|\eta_0\rangle \geq 0$.

Όπως προαναφέρθηκε η ύπαρξη της στατικής κατανομής ισοδυναμεί με την ύπαρξη της ιδιοτιμής $\eta = 0$ στο φάσμα της hamiltonιανής H . Διαφορετικά, η αντίστοιχη στοχαστική εξέλιξη οδηγεί σε ασυμπτωτικά αποκλίνουσα εξέλιξη πεδίου.

Μεγάλη προσοχή εφίσταται τη (κατά)χρήση του συμβόλου $\langle \eta|H|\eta\rangle$, διότι ο τελεστής H δεν είναι εν γένει ερμητιανός (συμμετρικός), επομένως στο σύμβολο αυτό στα αριστερά δρα ο H^\dagger .

Το πραγματικό μέρος του φάσματος της hamiltonιανής Fökker-Planck είναι μη-αρνητικό, αφού

$$\langle \eta_0|H_0|\eta_0\rangle = \langle \eta_0|\langle\langle\alpha_{aa'}\pi_a\mathcal{K}\pi_{a'}\rangle\rangle|\eta_0\rangle = \langle\langle\alpha_{aa'}\varpi_a\mathcal{K}\varpi_{a'}\rangle\rangle\langle \eta_0|\eta_0\rangle \geq 0, \quad (3.2.55)$$

όπου $\pi_a|\eta\rangle = \varpi_a|\eta\rangle$, μιας και ο τελεστής συναρτησιακής παραγώγου μετατίθεται με το πραγματικό μέρος της hamiltonιανής (κινητικός όρος), έχει δηλαδή το ίδιο φάσμα, με $\varpi_a \in \mathbb{R}$ αφού κατά μετασχηματισμό Fourier,

$$\langle \varpi|\pi_a|\eta\rangle = \int \mathcal{D}\phi \langle \varpi|\phi\rangle \langle \phi|\pi_a|\eta_0\rangle, \quad (3.2.56)$$

όπου $\langle \varpi|\phi\rangle = \exp(-i\varpi_a\phi_a)$ ο πυρήνας μετασχηματισμού Fourier όπου $\varpi_a \in \mathbb{R}$ και

$$\langle \phi|\pi_a|\eta_0\rangle = -i\frac{\delta}{\delta\phi_a}\langle \phi|\eta_0\rangle \quad (3.2.57)$$

η αναπαράσταση του τελεστή π_a ως προς ϕ , οπότε με παραγοντική ολοκλήρωση

$$-i \int \mathcal{D}\phi \exp(-i\varpi_a\phi_a) \frac{\delta}{\delta\phi_a} \langle \phi|\eta_0\rangle = i \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi_a} \exp(-i\varpi_a\phi_a) \langle \phi|\eta_0\rangle = \varpi_a \int \mathcal{D}\phi \exp(-i\varpi_a\phi_a) \langle \phi|\eta_0\rangle, \quad (3.2.58)$$

και συνεπώς

$$\langle \varpi|\pi_a|\eta_0\rangle = \varpi_a \int \mathcal{D}\phi \langle \varpi|\phi\rangle \langle \phi|\eta_0\rangle = \varpi_a \langle \varpi|\eta\rangle, \quad (3.2.59)$$

όπως και ήταν αναμενόμενο, πέραν αυτού όμως διαφαίνεται και το γεγονός ότι το φάσμα του τελεστή της ορμής είναι όντως πραγματικό.

3 Δυναμική Langevin

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, η εξίσωση Fökker-Planck έχει στατική λύση ισορροπίας για $\tau \rightarrow \infty$ αν η τιμή 0 περιλαμβάνεται στο φάσμα τη hamiltonιανής Fökker-Planck.⁴ Συγκεκριμένα για πλήρη θόρυβο ($\alpha_{aa'} = \delta_{aa'}$), παρατηρείται πως στατική λύση υπάρχει και είναι της μορφής

$$\varrho_\infty[\phi] = \frac{\exp(-S[\phi])}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi])}. \quad (3.2.60)$$

Πράγματι,

$$\frac{\delta}{\delta\phi} \varrho_\infty(\phi) = -\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \varrho_\infty(\phi),$$

και

$$\frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi} \varrho_\infty(\phi) = -\frac{\delta}{\delta\phi} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \varrho_\infty(\phi) \right),$$

οπότε και

$$\frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \right) \varrho_\infty(\phi) = 0.$$

Παρατηρούμε πως η παρουσία του πυρήνα \mathcal{K} δεν επηρεάζει την στατική λύση

Η στατική λύση (όταν υπάρχει) ϱ_∞ κανονικοποιείται (φορμαλιστικά)⁵ ως

$$\langle 0|0 \rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \varrho_\infty[\phi] = 1. \quad (3.2.61)$$

Οπότε βάση του ορισμού (3.2.17) η μέτρηση της μέσης τιμής μιας παρατηρήσιμης ποσότητας \mathcal{O} με ανεξάρτητες μετρήσεις σε ισορροπία στο στατιστικό σύνολο που παράγει ο θόρυβος στον χώρο των πεδίων ϕ μέσω της εξίσωσης Langevin (3.2.1) ισούται με την αναμενόμενη τιμή της ποσότητας στο φορμαλισμό ολοκληρωμάτων Feynman.

3.2.3.3 Θεωρία βαθμωτού πεδίου $\phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X$, θορύβου $\eta \in \mathbb{F}^X$ και δράσης $S[\phi] \in \mathbb{G}$

Ενδιαφέρον έχει η περίπτωση της επεκταμένης δράσης, ειδικά όταν ο θόρυβος επιλεχτεί «πραγματικός». Σε ότι ακολουθεί, θα συμβολίσουμε τις «πραγματικές συνιστώσες» $\cdot_a = \cdot_a$.

Εξίσωση Langevin:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x | \phi_{ab}(\tau) \rangle = \langle x | K_{ab}(\phi) \rangle + \langle x | \eta_a(\tau) \rangle 1_b, \quad \langle x | K_{ab}(\phi) \rangle = - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta \langle \phi_{ac} | x' \rangle} S_d[\phi], \quad (3.2.62)$$

$$\langle \langle x | \eta_{ab}(\tau) \rangle \langle \eta_{a'b'}(\tau) | x' \rangle \rangle = 2\gamma_{aba'b'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.2.63)$$

Στην περίπτωση λήψης πραγματικού θορύβου, $\gamma_{aba'b'} = \delta_{aa'} 1_b 1_{b'}$.

Εξίσωση Fökker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle \phi | \varrho(\tau) | \phi_0 \rangle = \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi_a} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta\phi_a} + \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta\phi_{ab}} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta\phi_{ac}} S_d[\phi] \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \varrho(\tau) | \phi_0 \rangle \quad (3.2.64)$$

⁴Μάλιστα, αν η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση είναι εκφυλισμένη, τότε υπάρχουν πολλαπλές διαφορετικές στατικές λύσεις, όπως συμβαίνει με την περίπτωση πολλών εξισώσεων Langevin (για παράδειγμα στην μιγαδική δυναμική Langevin) όταν κάποιες συνιστώσες θορύβου παραλείπονται, δηλαδή $\alpha_{aa} < \delta_{aa}$.

⁵Φορμαλιστικής, γιατί ο παρανομαστής δεν είναι καλά ορισμένος παρά μόνο όταν όλο αυτό το μη-καλά ορισμένο μέτρο ϱ εισαχθεί στο ολοκλήρωμα Feynman.

minimal working example: $\phi \in \mathbb{F}$ and $S \in \mathbb{R}$ with $\alpha_{aa} \leq \delta_{aa}$

Η εξίσωση Langevin γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle = \langle x | K_a(\phi) \rangle + \langle x | \eta_a(\tau) \rangle, \quad \langle x | K_a(\phi) \rangle = - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a | x' \rangle} S[\phi], \quad (3.2.65)$$

$$\langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau) | x' \rangle \rangle = 2\alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.2.66)$$

όπου κάποιες συνιστώσες θορύβου είναι 0. Η αντίστοιχη εξίσωση Fökker-Planck γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \left\langle \left\langle \alpha_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) + (1 - \alpha)_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle \quad (3.2.67)$$

όπου $(1 - \alpha)_{aa'} = \delta_{aa'} - \alpha_{aa'}$ η συμπληρωματική αυτής του θορύβου δέλτα συνάρτηση. Στην παρούσα μορφή είναι εύκολο να δούμε πως η στατική λύση θα αποτελείται από δύο τμήματα,

$$\wp_{\infty}[\phi] \propto \exp(-\alpha \perp S[\phi]) \exp(-(1 - \alpha) \perp T[\phi]), \quad (3.2.68)$$

όπου το σύμβολο $\alpha \perp$ ορίζει ως προς ποια δέλτα τελείται η συστολή δεικτών, για παράδειγμα $\alpha \perp \langle \phi_a \phi_{a'} \rangle = \langle \alpha_{aa'} \phi_a \phi_{a'} \rangle$.

Είναι φανερό από τη μορφή της εξίσωσης (3.2.67) πως μόνο το $\alpha \perp$ -κομμάτι της δράσης εμφανίζεται στο καθιερωμένο εκθετικό του path integral, αφού ικανοποιεί τη στατική εξίσωση

$$\left\langle \left\langle \alpha_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle \exp(-S[\phi]) = 0, \quad (3.2.69)$$

ενώ το υπόλοιπο αποτελεί λύση της

$$\left\langle \left\langle (1 - \alpha)_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right\rangle \right\rangle \exp(-T[\phi]) = 0, \quad (3.2.70)$$

η οποία οδηγεί στην

$$\left\langle \left\langle (1 - \alpha)_{aa'} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi_a} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] - \frac{\delta}{\delta \phi_a} T[\phi] \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle = 0 \quad (3.2.71)$$

θα ολοκληρώσει την πλήρη στατική λύση της αντίστοιχης εξίσωσης Fökker-Planck η οποία εν γένει διαφέρει από το χαρακτηριστικό εκθετικό $\exp(-S[\phi])$ του καθιερωμένου path integral, γεγονός το οποίο μας υποδεικνύει πως για κάθε βαθμό ελευθερίας της θεωρίας που εξετάζουμε χρειάζεται να αντιστοιχίσουμε και ένα θόρυβο ώστε να ανακτήσουμε τη θεωρία στο όριο άπειρου χρόνου της εξέλιξης Langevin.

minimal working example: $\phi \in \mathbb{R}$ and $S \in \mathbb{G}$ (forcing $\phi \in \mathbb{G}$ with $\beta_{aa} \leq \delta_{aa}$)

Το γεγονός ότι η δράση είναι μη-πραγματική επιβάλλει με βάση την υποενότητα 3.1.3 την επέκταση του πεδίου σε $\phi \in \mathbb{G}$ με συνιστώσες ϕ_a . Η εξίσωση Langevin γίνεται τότε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle = \langle x | K_a(\phi) \rangle + \langle x | \eta_a(\tau) \rangle, \quad \langle x | K_a(\phi) \rangle = - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \bullet_{abc} \frac{\delta}{\delta \langle \phi_b | x' \rangle} S_c[\phi], \quad (3.2.72)$$

$$\langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau) | x' \rangle \rangle = 2\beta_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (3.2.73)$$

όπου κάποιες συνιστώσες θορύβου λαμβάνονται 0 με τη χρήση του συμβόλου β αντί του α σε συμφωνία με την υποενότητα 3.1.3, έτσι ώστε να φαίνεται πως οι βαθμοί ελευθερίας τους οποίου αντιπροσωπεύει ο δείκτης a είναι πλασματικοί (εκτός του 0) στην προκειμένη περίπτωση. Η αντίστοιχη εξίσωση Fökker-Planck γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \left\langle \left\langle \beta_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \bullet_{a'bc} \frac{\delta}{\delta \phi_b} S_c[\phi] \right) + (1 - \beta)_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \bullet_{a'bc} \frac{\delta}{\delta \phi_b} S_c[\phi] \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle. \quad (3.2.74)$$

Η λύση του πρώτου τμήματος της στατικής εξίσωσης γίνεται μη-τετράμηνη τώρα, είναι αυτή όμως η οποία αποτελεί την κατανομή πιθανότητας.

3 Δυναμική Langevin

Είναι γεγονός πως (χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.1.9)) η εκθετική απεικόνιση έχει νόημα στου μιγαδικούς ως

$$\exp \phi \equiv \exp \sum_a g_a \phi_a = \prod_a \exp(g_a \phi_a), \quad (3.2.75)$$

η οποία όμως δεν επιδέχεται ερμηνεία πιθανότητας, παρόλο που εξυπηρετεί στην κβάντωση της εν λόγω βαθμωτής θεωρίας. Οι αρχικές συνιστώσες S_c της S είναι αναλλοίωτα συναρτησιακά του $\phi \in \mathbb{R}$, επαναπροσδιορίζονται με επιπλέον εξαρτήσεις από τις υπόλοιπες συνιστώσες ϕ_a του $\phi \in \mathbb{G}$, όταν αυτό επεκταθεί. Υπό το πρίσμα αυτό και υποθέτοντας ότι το \mathbb{G} -γινόμενο είναι συμμετρικό βλέπουμε πως η $\exp(-S[\phi])$ είναι επίσης λύσης της εξίσωσης Fökker-Planck, αφού

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi} \exp(-S[\phi]) &\equiv \frac{\delta}{\delta \phi} \exp\left(-\sum_c g_c S_c[\phi]\right) \equiv \frac{\delta}{\delta \phi} \prod_c \exp(-g_c S_c[\phi]) = \\ &= \sum_c \frac{\delta}{\delta \phi} \exp(-g_c S_c[\phi]) \prod_{b \neq c} \exp(g_b S_b[\phi]) = -\sum_c g_c \frac{\delta}{\delta \phi} S_c[\phi] \prod_b \exp(-g_b S_b[\phi]) = -\frac{\delta}{\delta \phi} S[\phi] \exp(-S[\phi]), \end{aligned} \quad (3.2.76)$$

το οποίο μας λέει πως η $\exp(-S[\phi])$ είναι στατική λύση της μιγαδικής εξίσωσης Fökker-Planck πριν την επέκταση του πεδίου ϕ ,

$$\left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi} + \frac{\delta}{\delta \phi} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle \exp(-S[\phi]) = 0, \quad (3.2.77)$$

η οποία όπως και είναι επόμενο έχει τη μορφή της πραγματικής εξίσωσης Fökker-Planck εκτός του γεγονότος πως $S \in \mathbb{G}$.

3.3 Διακριτή δυναμική Langevin

Διακριτοποιώντας το χωροχρόνο σε πλέγμα σταθεράς ℓ καθιστά όλα τα πεδία ως διανύσματα, με σύνθετο δείκτη θέσης και άλγεβρας. Διακριτοποιώντας επιπλέον και το χρόνο Langevin $\tau = n\epsilon$ σταθερού βήματος ϵ , καθιστά όλο το μηχανισμό μια Markovιανή αλυσίδα, διαχειρίσιμη σε μια εξομοίωση Monte Carlo. Έχουμε τις εξής αντιστοιχίες:

$$\tau = n\epsilon$$

$$\begin{aligned} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle &\dots\dots\dots \langle x | \phi_a \rangle_n \\ \frac{\partial^N}{\partial \tau^N} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle &\dots\dots\dots \sum_m \binom{n}{m} (-1)^m \epsilon^n \langle x | \phi_a \rangle_{n+m} \\ \int d\tau \langle \phi_a(\tau) | \phi_a(\tau) \rangle &\dots\dots\dots \sum_n \epsilon \langle \phi_a | \phi_a \rangle_n \\ \delta(\tau - \tau') &\dots\dots\dots \epsilon^{-1} \delta_{nn'} \end{aligned}$$

$\forall f$ συνάρτηση του χρόνου Langevin $\tau = n\epsilon$, ορίζεται

$$f_n = \frac{1}{\epsilon} \int_{\tau}^{\tau+\epsilon} d\tau f(\tau). \quad (3.3.1)$$

Συγκεκριμένα, επανορίζοντας τον θόρυβο ως $\bar{\eta} = \sqrt{\epsilon} \eta$,

$$\langle \langle x | \bar{\eta}_a \rangle_n \langle \bar{\eta}_{a'} | x' \rangle_{n'} \rangle = 2\alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta_{nn'}. \quad (3.3.2)$$

Ο επανορισμός του θορύβου γίνεται ώστε να μην περιλαμβάνεται η σταθερά χρόνου Langevin ϵ στον ορισμό του θορύβου. Ο εκθέτης στην κατανομή του θορύβου γίνεται

$$\int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a(\tau) \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'}(\tau) \rangle \rangle = \sum_{n=n_0}^{\infty} \epsilon \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} \langle \langle \alpha_{aa'} \bar{\eta}_a \mathcal{K}^{-1} \bar{\eta}_{a'} \rangle \rangle_n \quad (3.3.3)$$

Συνεπώς η διακριτή εξίσωση Langevin γίνεται

$$\langle x|\phi_a\rangle_{n+1} = \langle x|\phi_a\rangle_n + \epsilon \langle x|\mathcal{K}|K_a(\phi_n)\rangle + \sqrt{\epsilon} \langle x|\eta_a\rangle_n, \quad K_a(\phi) = -\nabla S(\phi), \quad (3.3.4)$$

όπου η συναρτησιακή παράγωγος στον όρο ολίσθησης μετατράπηκε σε απλή βαθμίδα λόγω το ότι το πεδίο (συνάρτηση) μετατράπηκε σε διάνυσμα στο πλέγμα. Το σύμβολο συστολής $\langle \cdot | \cdot \rangle$ εξαρτάται όπως είναι κατανοητό από τη πλεγματική σταθερά ℓ , και πιο συγκεκριμένα από το στοιχείο όγκου του πλέγματος $\ell^{\dim X}$, και είναι φυσικά απλά ένα άθροισμα πάνω στην πλεγματική θέση.

3.3.1 Μεταβλητό βήμα χρόνου Langevin ϵ_n

Όπως αναγράφεται και σε πρόσφατη σχετικά βιβλιογραφία [6], πολλές φορές η μέθοδος Langevin αποτυγχάνει να συγκλίνει για αρκετά μεγάλο χρονικό βήμα ϵ . Πολλές φορές το αναγκαίο μέγιστο βήμα είναι τόσο μικρό που καθιστά αδύνατο το σύστημα να ξεκολλήσει από το thermalization stage, καθώς χρειάζονται πάρα πολλά iterations τέτοιου μικρού χρονικού βήματος για να χτιστεί μια χρονική διαφορά. Μια μερική προσέγγιση προτείνεται [6] με τη χρήση προσαρμοστικού βήματος, ανάλογα με το πότε οι συντελεστές ολίσθησης (οι οποίοι επηρεάζουν ως επί το πλείστον το βήμα Langevin) έχουν την τάση να ξεφύγουν αποκλίνοντας. Έτσι, φροντίζοντας το γινόμενο ϵK να κρατηθεί σε λογικά όρια, ρυθμίζοντας κατάλληλα το ϵ , λύνεται το πρόβλημα της σύγκλισης, αλλά όχι της ευστάθειας, δηλαδή της εγκυρότητας του ορίου των observables μέσω των εξισώσεων Langevin με τις αληθινές expectation values.

Διακριτή μορφή των εξισώσεων Langevin για διακριτό χρόνο Langevin n , μεταβλητού βήματος ϵ_n :

$$\langle x|\phi_a\rangle_{n+1} = \langle x|\phi_a\rangle_n + \epsilon_n \langle x|\mathcal{K}|K_a(\phi_n)\rangle + \sqrt{\epsilon_n} \langle x|\eta_a\rangle_n, \quad K_a(\phi) = -\nabla S(\phi), \quad (3.3.5)$$

όπου το σχήμα διακριτοποίησης του χρόνου Langevin γίνεται

$$\tau = N\epsilon = \sum_{n=1}^N \epsilon_n, \quad (3.3.6)$$

όπου το βήμα χρόνου ϵ_n ρυθμίζεται σε κάθε βήμα Langevin έτσι ώστε να αντισταθμίσει μεγάλες τιμές στους όρους ολίσθησης,

$$\epsilon_n K_n = \mathcal{M}_n, \quad K_n = \|\Omega^{-1}|K(\phi_n)|^2\|_p. \quad (3.3.7)$$

$p \in \mathbb{N}$ είναι η τάξη της νόρμας που λαμβάνεται ειδικά για το K και διαφέρει από την καθιερωμένη νόρμα του εσωτερικού γινομένου $\|\cdot\| \equiv \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle} \equiv \|\cdot\|_1$ ($p = 1$), και

$$\|\cdot\|_p^p \equiv \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} |x| \cdot (x)|^{2p}. \quad (3.3.8)$$

$\epsilon^{-1}\mathcal{M}$ αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη τιμή του K , όπως αυτή εκτιμάται με την εκτιμήτρια που αποτελεί η εξομοίωση Langevin. Συνήθως τίθεται αυθαίρετα και συνολικά ως μια σταθερά, αφού ούτε η μέση τιμή του χρονικού βήματος ούτε και η αναμενόμενη τιμή της ολίσθησης είναι γνωστά εκ' των προτέρων, η ρύθμιση της οποίας εφιστά μέγιστη προσοχή, με σημαντικό ενδεχόμενο αποτυχίας κατά μη-κατάλληλη επιλογή.

Υπάρχει όμως εναλλακτική προσαρμογής του βήματος. Ξεκινά η εξομοίωση από ένα αρχικό βήμα ϵ_0 , με το οποίο τρέχει το πρώτο βήμα, συνεπώς ο πήγης τίθεται στην αρχή της εξομοίωσης. Η προσέγγιση αυτή είναι λίγο αδέξια για τον βασικό λόγο ότι η σύγκλιση της μεθόδου Langevin εξαρτάται πάρα πολύ από τις αρχικές συνθήκες, επομένως ο καθορισμός της σταθεράς \mathcal{M} βρίσκεται στο έλεος της συμπεριφορά της εξομοίωσης σε αυτό το πρώτο βήμα.

3.3.1.1 η μέση ολίσθηση $\epsilon^{-1}\mathcal{M}$

Το παραπάνω σχεπτικό όμως μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω. Πρωτίστως είναι γνωστό ότι για αρκετά μικρό ϵ , η μέθοδος συγκλίνει, έτσι ξεκινώντας με ένα αρχικά πολύ μικρό ϵ σχετικό με τις παραμέτρους της εξομοίωσης, είναι δυνατόν να

3 Δυναμική Langevin

τεθεί ένας καλό πήχης για το μεταβλητό βήμα. Ακόμη καλύτερα όμως, ο πήχης μπορεί να τεθεί στατιστικά από το μέσο όρο πολλών βημάτων ενός αρχικού και αρκετά μικρού (ή όχι απαραίτητα αυτήν τη φορά) ϵ_0 ,⁶

$$\langle K \rangle_N \equiv \sum_{n=1}^N f_n K_n, \quad f_n = \tau^{-1} \epsilon_n. \quad (3.3.9)$$

Η μορφή (3.3.9) είναι προσαρμοσμένη στο μεταβλητό βήμα χρόνου αποδίδοντας τα κατάλληλα βάρη (συχνότητες) στην εκτίμηση της μέσης τιμής ολίσθησης.⁷

Ας δούμε προσεκτικά πως συμπεριφέρεται η δυναμικά εκτιμώμενη αναμενόμενη τιμή της ολίσθησης: Έστω ότι ξεκινάμε από μια αρχική εκτίμηση $K_0 = \langle K \rangle_0 = 1$, με ένα σεβαστό ϵ_0 . Εξετάζουμε τι γίνεται στην περίπτωση που η εξομοίωση πάει να διαφύγει τελείως, έστω δηλαδή ότι από το πρώτο βήμα κιόλας $K_1 = 10^{10}$. Αυτομάτως με βάση όσα έχουμε πει, $\langle K \rangle_1 = 5 \cdot 10^9$, η αναμενόμενη τιμή δηλαδή έχει πάει στη μέση. Βλέπουμε πως αυτό αυξάνει πολύ σημαντικά τον πήχη, ρισκάροντας στο επόμενο βήμα να μην πάρουμε αρκετά μικρό ϵ_1 ώστε να αντιμετωπιστεί η διαφυγή στο άπειρο.

Υπάρχει όμως η δυνατότητα, αν ξεχάσουμε για λίγο την προέλευση της αναμενόμενης τιμής $\langle \cdot \rangle$ από τη συνεχή θεωρία πεδίου, να επιλέξουμε να πάρουμε την αρμονική αναμενόμενη τιμή $\langle \! \! \langle \cdot \! \! \rangle \rangle$ της ολίσθησης,⁸

$$\langle \! \! \langle K \! \! \rangle \! \rangle_N \equiv \prod_{n=1}^N K_n^{f_n}, \quad f_n = \tau^{-1} \epsilon_n. \quad (3.3.10)$$

Από την τελευταία έκφραση φαίνεται ότι πρακτικά η αρμονική μέση τιμή είναι κανονική μέση τιμή στην τάξη μεγέθους. Στο παράδειγμα που προηγήθηκε, θα έχουμε $\langle \! \! \langle K \! \! \rangle \! \rangle_1 = 10^5$, στο μέσο των τάξεων μεγέθους δηλαδή. Όπως είναι κατανοητό, αυτό το κριτήριο αντιμετωπίζει πολύ πιο δραστικά τη διαφυγή της ολίσθησης με ρίσκο αυτή τη φορά να κολλήσει ίσως στην αρχή η εξομοίωση με απίστευτα μικρά βήματα ϵ , όμως η σύγκλιση ποια είναι σχεδόν εγγυημένη.

Επίσης η χρήση $\langle \! \! \langle K \! \! \rangle \! \rangle_0 = 1$ ως αρχική εκτίμηση είναι πιο διαισθητική: πέραν το γεγονός ότι το πρώτο ϵ που χρησιμοποιείται είναι το μέσο ϵ , όπως και είναι επιθυμητό, η τιμή 1 βρίσκεται στο «μέσο» του \mathbb{R}_+ με τον ίδιο τρόπο που το 0 βρίσκεται στο μέσο του \mathbb{R} όπως αυτό μεταφέρεται από την εκθετική απεικόνιση. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται κατανοητό πως στη μορφή ϵK του κριτηρίου, ο αρμονικός μέσος είναι πιο κατάλληλος από τον απλό μέσο.

⁶ $\forall N \in \mathbb{N}, \forall (0 \leq f_n \leq 1)_{n=1}^N$ συχνότητες απάντησης για $\forall (x_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ δείγμα,

$$\langle x \rangle_N = \sum_{n=1}^N f_n x_n = f_N x_N + \sum_{n=1}^{N-1} f_n x_n = f_N x_N + \langle x \rangle_{N-1} (1 - f_N).$$

⁷ Παρατηρούμε πως ενώ ο χρόνος Langevin (μπορεί ενδεχομένως να) έχει διαστάσεις, οι συχνότητες παραμένουν αδιάστατες, διασφαλίζοντας την αυτοσυνέπεια του αποτελέσματος.

⁸ $\forall N \in \mathbb{N}, \forall (0 \leq f_n \leq 1)_{n=1}^N$ συχνότητες απάντησης για $\forall (x_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ δείγμα,

$$\langle \! \! \langle x \! \! \rangle \! \rangle_N = \prod_{n=1}^N x_n^{f_n} = x_N^{f_N} \prod_{n=1}^{N-1} x_n^{f_n} = x_N^{f_N} \langle \! \! \langle x \! \! \rangle \! \rangle_{N-1}^{1-f_N}.$$

Η καταλληλότητα της επιλογής αυτής φαίνεται σε πολλά επίπεδα. Η κανονική μέση τιμή είναι φτιαγμένη για τιμές στο \mathbb{R} αφού το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το 0, ενώ στον πολλαπλασιασμό είναι το 1. Όμως $\alpha^0 = 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, και για την ακρίβεια η απεικόνιση \exp μας μεταφέρει από τη γνωστή μέση τιμή στην αρμονική,

$$\exp \langle x \rangle_N = \exp \sum_{n=1}^N f_n x_n = \prod_{n=1}^N (\exp x_n)^{f_n} = \langle \! \! \langle \exp x \! \! \rangle \! \rangle_N \quad \text{ή} \quad \log \langle \! \! \langle x \! \! \rangle \! \rangle_N = \log \prod_{n=1}^N x_n^{f_n} = \sum_{n=1}^N f_n \log x_n = \langle \log x \rangle_N.$$

4 Σχετικιστικό αέριο Bose

4.1 Δυναμική Langevin στο σχετικιστικό αέριο Bose

4.1.1 Δράση S στο πλέγμα $\mathbb{L} \leftarrow X$

Η δράση του σχετικιστικού αερίου Bose στο πλέγμα,

$$S[\phi] = \langle \phi | \square | \phi \rangle + (m^2 - \mu^2) \langle \phi | \phi \rangle + \lambda \langle \phi \phi | \phi \phi \rangle + \mathcal{J} \mu (\langle \phi | \triangleright_{\dim \mathbb{L}} \phi \rangle - \langle \triangleright_{\dim \mathbb{L}} \phi | \phi \rangle), \quad (4.1.1)$$

ανεπτυγμένη σε συνιστώσες είναι

$$S[\phi] = (\ell)^2 \langle \phi_a \square \phi_a \rangle + (m^2 - \mu^2) (\ell)^2 \langle \phi_a \phi_a \rangle + \lambda (\ell)^4 \langle \phi_b \phi_c \phi_b \phi_c \rangle + 2\mu (\ell)^2 \varepsilon_{bc} \mathcal{J} \langle \phi_b \triangleright_{\dim \mathbb{L}} \phi_c \rangle. \quad (4.1.2)$$

Ο τετραγωνικός όρος που εμφανίζεται στη δράση είναι εξ' ορισμού

$$\langle \phi_a \phi_a \rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_a (\phi_a(x))^2.$$

Ο κινητικός όρος είναι,

$$\begin{aligned} \langle \phi_a \square \phi_a \rangle &= \langle \triangleright_{\alpha} \phi_a \triangleright_{\alpha} \phi_a \rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \ell^{-2} \sum_a (\phi_a(x + \ell \partial_{\alpha}) - \phi_a(x))^2 \\ &= \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \ell^{-2} \sum_a ((\phi_a(x + \ell \partial_{\alpha}))^2 + (\phi_a(x))^2 - 2\phi_a(x)\phi_a(x + \ell \partial_{\alpha})) \\ &= 2 \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \ell^{-2} \sum_a ((\phi_a(x))^2 - \phi_a(x) \exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_a(x)) \\ &= 2\ell^{-2} \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_a \left((\phi_a(x))^2 \dim X - \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \phi_a(x) \exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_a(x) \right) \\ &= 2\ell^{-2} \left(\langle \phi_a \phi_a \rangle \dim X - \sum_{\alpha=1}^{\dim \mathbb{L}} \langle \phi_a \exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_a \rangle \right). \end{aligned}$$

Ο όρος αλληλεπίδρασης είναι,

$$\langle \phi_b \phi_b \phi_c \phi_c \rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_b (\phi_b(x))^2 \sum_c (\phi_c(x))^2 = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_b \sum_c (\phi_b(x) \phi_c(x)) (\phi_b(x) \phi_c(x)) = \langle \phi_b \phi_c \phi_b \phi_c \rangle.$$

Τέλος ο όρος χημικού δυναμικού γίνεται,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{bc} \langle \phi_b \triangleright_{\dim \mathbb{L}} \phi_c \rangle &= \sum_b \sum_c \varepsilon_{bc} \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \phi_b(x) \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \delta_{\alpha \dim X} \triangleright_{\alpha} \phi_c(x) \\ &= \sum_b \sum_c \varepsilon_{bc} \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \phi_b(x) \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \ell^{-1} (\exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_c(x) - \phi_c(x)) \\ &= \ell^{-1} \varepsilon_{bc} \left(\sum_{\alpha=1}^{\dim X} \delta_{\alpha \dim X} \langle \phi_b \exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_c \rangle - \langle \phi_b \phi_c \rangle \right) \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τους όμοιους όρους στη δράση, και επεκτείνοντας όρο προς όρο, έχουμε του όρους

$$-2\ell^{-2}(\delta_{bc} - j\ell\mu\varepsilon_{bc}\delta_{\alpha \dim X})\langle\phi_b \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_c\rangle$$

$$-2\ell^{-2}\left(\frac{1}{2}(\ell\mu)^2\delta_{bc} + j\ell\mu\varepsilon_{bc}\right)\langle\phi_b\phi_c\rangle$$

Οι γραμμικοί παράγοντες των ανωτέρων όρων, αντικαθίστανται από αντίστοιχους παράγοντες βιθμίδας,

$$\ell^{-1}(\delta_{bc} \cosh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X}) - \varepsilon_{bc} \sinh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})) =$$

$$= \delta_{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})^{2n}}{(2n)!} - j\varepsilon_{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})^{2n+1}}{(2n+1)!} \simeq \ell^{-1}\delta_{bc} - \varepsilon_{bc}\mu\delta_{\alpha \dim X},$$

$$j\varepsilon_{bc} \sinh(\ell\mu) + \delta_{bc} \cosh(\ell\mu) - \delta_{bc} = j\varepsilon_{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell\mu)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \delta_{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell\mu)^{2n}}{(2n)!} - \delta_{bc} \simeq \frac{1}{2}(\ell\mu)^2\delta_{bc} + \ell\mu\varepsilon_{bc}$$

Αγνοώντας την σταθερά ανάπτυξης (j), η δράση του σχετικιστικού αερίου Bose στο lattice είναι:

$$S[\phi] \equiv S_0[\phi] + jS_1[\phi] = (2\ell^{-2} \dim X + m^2)\langle\phi_a\phi_a\rangle + \lambda\langle\phi_b\phi_c\phi_b\phi_c\rangle -$$

$$- 2\ell^{-2} \sum_{\alpha=1}^{\dim X} ((\delta_{bc} \cosh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X}) - j\varepsilon_{bc} \sinh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X}))\langle\phi_b \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_c\rangle +$$

$$+ (j\varepsilon_{bc} \sinh(\ell\mu) + \delta_{bc} \cosh(\ell\mu) - \delta_{bc})\langle\phi_b\phi_c\rangle) \quad (4.1.3)$$

Στην πραγματικότητα όμως, χρησιμοποιείται μια ισοδύναμη στο συνεχές και θερμοδυναμικό όριο δράση του σχετικιστικού αερίου Bose με $\varkappa_{\dim X} = 2\ell^{-2} \dim X + m^2$,

$$S[\phi] = \varkappa_{\dim X} (\|\imath\|^2)\langle\phi_a\phi_a\rangle + \lambda(\|\imath\|^4)\langle\phi_b\phi_c\phi_b\phi_c\rangle$$

$$- 2\ell^{-2} \sum_{\alpha=1}^{\dim X-1} (\|\imath\|^2)\langle\phi_a \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_a\rangle - 2\ell^{-2} \sum_{\alpha=1}^{\dim X} (\cosh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})\delta_{bc} - j \sinh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})\varepsilon_{bc})(\|\imath\|^2)\langle\phi_b \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_c\rangle.$$

$$(4.1.4)$$

Ο πολλαπλασιασμός της μονάδας j με τυχόν μιγαδικό $\phi \in \mathbb{C}$ γράφεται σε φορμαλισμό δεικτών $(j\phi)_a = (\|\jmath\|)\varepsilon_{ab}\phi_b$.

Με την αντικατάσταση/ανάπτυξη $\phi_a \rightarrow \phi_{ab}$ και

$$\langle\phi_{a_1}\phi_{a_1}\dots\phi_{a_n}\phi_{a_n}\rangle \rightarrow \langle\phi_{a_1}\phi_{a_1}\dots\phi_{a_n}\phi_{a_n}\rangle_a = (\|\jmath\|)^{2n-1} \circ_{ab_1\dots b_n c_1\dots c_n} \langle\phi_{a_1 b_1}\phi_{a_1 c_1}\dots\phi_{a_n b_n}\phi_{a_n c_n}\rangle \quad (4.1.5)$$

συνάγεται η μορφή της δράσης $S \in \mathbb{G}$ στο επεκταμένο πεδίο $\phi \in (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^X$,

$$(\|\jmath\|)S_b[\phi] = \varkappa_{\dim X} (\|\imath\jmath\|^2) \circ_{bcd} \langle\phi_{ec}\phi_{ed}\rangle + \lambda(\|\imath\jmath\|^4) \circ_{bij} \circ_{icd} \circ_{jef} \langle\phi_{gc}\phi_{hd}\phi_{ge}\phi_{hf}\rangle$$

$$- 2\ell^{-2} (\|\imath\jmath\|^2) \sum_{\alpha=1}^{\dim X} ((\cosh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X}) + 1 - \delta_{\alpha \dim X})\delta_{bc}\delta_{fg} + \sinh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})\varepsilon_{bc}\varepsilon_{fg}) \circ_{cde} \langle\phi_{fd} \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_{ge}\rangle. \quad (4.1.6)$$

4.1.2 Εξισώσεις Langevin του σχετικιστικού αερίου Bose

Γίνεται η επιλογή $(\|\imath\|) = \alpha^{-1}$ και $(\|\jmath\|) = \beta^{-1}$ προς απλούστευση των εξισώσεων Langevin (συνιστώσες). Λαμβάνοντας «πραγματικό» (μη-επεκταμένο) θόρυβο, από (3.1.43) ήδη $\beta = 1$, ενώ $\alpha = \sqrt{2}$.

4.1.2.1 Συντελεστές ολίσθησης K_{ab}

Η πλεγματική δράση γράφεται

$$S_d[\phi] = \frac{1}{2} \varkappa_{\dim X} \circ_{def} \langle \phi_{ge} \phi_{gf} \rangle + \frac{1}{4} \lambda \circ_{defgh} \langle \phi_{ie} \phi_{jf} \phi_{ig} \phi_{jh} \rangle - \sum_{\alpha=1}^{\dim X} (\cosh(\ell \mu \delta_\alpha \dim X) \delta_{de} \circ_{efg} \delta_{hi} + \sinh(\ell \mu \delta_\alpha \dim X) \varepsilon_{de} \circ_{efg} \varepsilon_{hi}) \langle \phi_{hf} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{ig} \rangle. \quad (4.1.7)$$

Από τη γενική μορφή (3.1.43) των εξισώσεων Langevin για διπλομιγαδικό βαθμωτό πεδίο, συνάγονται οι συντελεστές ολίσθησης

$$K_{ab}(\phi(x)) \equiv -\bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} S_d[\phi] = -\varkappa_{\dim X} \phi_{ab}(x) - \lambda \circ_{bcde} \phi_{ac}(x) \phi_{fd}(x) \phi_{fe}(x) + \ell^{-2} \sum_{\alpha=1}^{\dim X} (\cosh(\mu \delta_\alpha \dim X) \cosh(\ell \partial_\alpha) \delta_{ac} \delta_{bd} \phi_{cd}(x) + \sinh(\mu \delta_\alpha \dim X) \sinh(\ell \partial_\alpha) \varepsilon_{ac} \varepsilon_{bd} \phi_{cd}(x)), \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } 2 \cosh(\ell \partial_\mu) \phi(x) &= \exp(+\ell \partial_\mu) \phi(x) + \exp(-\ell \partial_\mu) \phi(x) = \phi(x + \ell \partial_\mu) + \phi(x - \ell \partial_\mu), \\ \text{και } 2 \sinh(\ell \partial_\mu) \phi(x) &= \exp(+\ell \partial_\mu) \phi(x) - \exp(-\ell \partial_\mu) \phi(x) = \phi(x + \ell \partial_\mu) - \phi(x - \ell \partial_\mu). \end{aligned}$$

$$K_{ab}(\phi(x)) = -\bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} S_d[\phi], \quad \bullet_{bcd} = \circ_{cdb}$$

Γενικά για το τυχόν συναρτησιακό της μορφής $\langle \phi_{a_1} \cdots \phi_{a_n} \rangle$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n \phi_{a_i} \right\rangle &= \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \int_X d^{\dim X} y \prod_{i=1}^n \phi_{a_i}(y) = \int_X d^{\dim X} y \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \prod_{i=1}^n \phi_{a_i}(y) = \\ &= \int_X d^{\dim X} y \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \phi_{a_i}(y) \prod_{j \neq i} \phi_{a_j}(y) = \int_X d^{\dim X} y \sum_{i=1}^n \delta_{aa_i} \delta(x-y) \prod_{j \neq i} \phi_{a_j}(y) = \sum_{i=1}^n \delta_{aa_i} \prod_{j \neq i} \phi_{a_j}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet_{bcd} \circ_{def} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} \langle \phi_{ge} \phi_{gf} \rangle &= 2\phi_{ab}(x), \\ &= \circ_{cbd} \circ_{def} (\delta_{ag} \delta_{ce} \phi_{gf}(x) + \delta_{ag} \delta_{cf} \phi_{ge}(x)) \\ &= \circ_{cbd} \circ_{def} (\delta_{ce} \phi_{af}(x) + \delta_{cf} \phi_{ae}(x)) \\ &= \circ_{cbd} \circ_{dcf} \phi_{af}(x) + \circ_{cbd} \circ_{dec} \phi_{ae}(x) \\ &= \delta_{bf} \phi_{af}(x) + \delta_{be} \phi_{ae}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet_{bcd} \circ_{defgh} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} \langle \phi_{ie} \phi_{jf} \phi_{ig} \phi_{jh} \rangle &= 4 \circ_{bcde} \phi_{ac}(x) \phi_{fd}(x) \phi_{fe}(x), \\ &= \circ_{cbd} \circ_{defgh} (\delta_{ai} \delta_{ce} \phi_{jf}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{jh}(x) + \delta_{aj} \delta_{cf} \phi_{ie}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{jh}(x) \\ &\quad + \delta_{ai} \delta_{cg} \phi_{ie}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{jh}(x) + \delta_{aj} \delta_{ch} \phi_{ie}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{ig}(x)) \\ &= \circ_{cbd} \circ_{defgh} (\delta_{ce} \phi_{jf}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{jh}(x) + \delta_{cf} \phi_{ie}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{ah}(x) \\ &\quad + \delta_{cg} \phi_{ae}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{jh}(x) + \delta_{ch} \phi_{ie}(x) \phi_{af}(x) \phi_{ig}(x)) \\ &= \circ_{cbd} \circ_{dcfgh} \phi_{jf}(x) \phi_{ag}(x) \phi_{jh}(x) + \circ_{cbd} \circ_{decgh} \phi_{ie}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{ah}(x) \\ &\quad + \circ_{cbd} \circ_{defch} \phi_{ae}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{jh}(x) + \circ_{cbd} \circ_{defgc} \phi_{ie}(x) \phi_{af}(x) \phi_{ig}(x) \\ &= \circ_{bfggh} \phi_{jf}(x) \phi_{ag}(x) \phi_{jh}(x) + \circ_{begh} \phi_{ie}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{ah}(x) \\ &\quad + \circ_{befh} \phi_{ae}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{jh}(x) + \circ_{befg} \phi_{ie}(x) \phi_{af}(x) \phi_{ig}(x). \end{aligned}$$

Ειδικότερα για μετατοπισμένους όρους της μορφής $\langle \phi_b \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_c \rangle$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \langle \phi_b \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_c \rangle &= \int_X d^{\dim X} y \left(\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \phi_b(y) \phi_c(y + \ell \partial_\alpha) + \phi_b(y) \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \phi_c(y + \ell \partial_\alpha) \right) = \\ &= \int_X d^{\dim X} y \left(\delta_{ab} \delta(x - y) \phi_c(y + \ell \partial_\alpha) + \phi_b(y) \delta_{ac} \delta(x - \ell \partial_\alpha - y) \right) = \delta_{ab} \phi_c(x + \ell \partial_\alpha) + \delta_{ac} \phi_b(x - \ell \partial_\alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet_{bcd} \delta_{de} \circ_{efg} \delta_{hi} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} \langle \phi_{hf} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{ig} \rangle &= 2 \cosh(\ell \partial_\mu) \delta_{ac} \delta_{bd} \phi_{cd}(x), \\ &= \circ_{cbd} \delta_{de} \circ_{efg} \delta_{hi} (\delta_{ah} \delta_{cf} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \delta_{ai} \delta_{cg} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu)) \\ &= \circ_{cbd} \delta_{de} \circ_{efg} (\delta_{ai} \delta_{cf} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \delta_{ah} \delta_{cg} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu)) \\ &= \circ_{cbd} \delta_{de} \circ_{ecg} \delta_{ai} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \circ_{cbd} \delta_{de} \circ_{efc} \delta_{ah} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu) \\ &= \delta_{ai} \delta_{bg} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \delta_{ah} \delta_{bf} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet_{bcd} \varepsilon_{de} \circ_{efg} \varepsilon_{hi} \frac{\delta}{\delta \langle x | \phi_{ac} \rangle} \langle \phi_{hf} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{ig} \rangle &= 2 \sinh(\ell \partial_\mu) \varepsilon_{ac} \varepsilon_{bd} \phi_{cd}(x), \\ &= \circ_{cbd} \varepsilon_{de} \circ_{efg} (\varepsilon_{hi} (\delta_{ah} \delta_{cf} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \delta_{ai} \delta_{cg} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu)) \\ &= \circ_{cbd} \varepsilon_{de} \circ_{efg} (\varepsilon_{ai} \delta_{cf} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) - \varepsilon_{ah} \delta_{cg} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu)) \\ &= \circ_{cbd} \varepsilon_{de} \circ_{ecg} \varepsilon_{ai} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) - \circ_{cbd} \varepsilon_{de} \circ_{efc} \varepsilon_{ah} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu) \\ &= \varepsilon_{ai} \varepsilon_{bg} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) - \varepsilon_{ah} \varepsilon_{bf} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu). \end{aligned}$$

όπου $\circ_{cad} \varepsilon_{de} \circ_{ecb} = (\circ_{cad} \circ_{dce} = \delta_{ae}) \varepsilon_{eb} = \varepsilon_{ab}$ αφού ο εν λόγω ταυσιτής αντιπροσωπεύει τριπλό γινόμενο με την παρεμβολή μιγαδικής μονάδας στο ενδιάμεσο, ήτοι $\forall \phi, \chi, \psi \in \mathbb{C}, \psi(\iota(\chi\phi)) = \psi((\chi\phi))\iota$.

4.1.2.2 Παρατηρήσιμα μεγέθη (n_a, ρ_a)

Για κάθε εξωτερική παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$ της συνάρτησης επιμερισμού Z ,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log_e Z \equiv \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \alpha} Z = \left\langle -\frac{\partial}{\partial \alpha} S \right\rangle \equiv -\frac{\partial}{\partial \alpha} \langle S \rangle. \quad (4.1.9)$$

Πυκνότητα σωματιδίων:

$$\begin{aligned} \langle n_a \rangle &\equiv \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial (\ell \mu)} \log_e Z, \quad \Omega n_a := -\frac{\partial}{\partial (\ell \mu)} S_a = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \sinh(\ell \mu \delta_\alpha \dim X) \delta_{ab} \circ_{bcd} \delta_{ef} \langle \phi_{ec} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{fd} \rangle + \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \cosh(\ell \mu \delta_\alpha \dim X) \varepsilon_{ab} \circ_{bcd} \varepsilon_{ef} \langle \phi_{ec} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{fd} \rangle \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

Πλάτος πεδίου:

$$\langle \rho_a \rangle \equiv \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial ((\ell m)^2)} \log_e Z, \quad \Omega \rho_a := \frac{\partial}{\partial ((\ell m)^2)} S_a = \frac{1}{2} \circ_{abc} \langle \phi_{db} \phi_{dc} \rangle \quad (4.1.11)$$

Η σχέση(3.1.45) ταυτοποιεί τις μη-μηδενικές συναρτήσεις συσχετισμού, αυτό όμως δε σημαίνει πως αυτές είναι και ίσες, όπως και ξεγελάει η παρουσία των δ και ε . Προς αποφυγή σύγχυσης, οι μη μηδενικές συνιστώσες των εν λόγω ταυσιτών θεωρούνται μη ίσες, ειδικά εν προκειμένω, ώστε να φαίνεται ποιοι όροι διαχωρίζονται και επιβιώνουν και ποιοι μηδενίζονται.

Για το πλάτος πεδίου τα πράγματα είναι εύκολα,

$$\circ_{abc} \langle \langle \phi_{db} \phi_{dc} \rangle \rangle \propto \circ_{abc} \delta_{dd} \delta_{bc} + \circ_{abc} \varepsilon_{dd} \varepsilon_{bc} \propto \mathbf{r}_{00} \delta_{00} \circ_{a00} + \mathbf{r}_{11} \delta_{11} \circ_{a11} = 1_a (\mathbf{r}_{00} - \mathbf{r}_{11}) \quad (4.1.12)$$

όπου \mathbf{r}_{bc} είναι οι επιμέρους σταθερές αναλογίας των $\langle \langle \phi_{db} \phi_{dc} \rangle \rangle$ από (3.1.45). Συνεπώς $\langle \rho_1 \rangle = 0$.

Στη σχέση (3.1.45) δε φαίνεται, όμως οι συναρτήσεις συσχετισμού δεν έχουνε κάποια ειδική εξάρτηση από κάποια αναπαράσταση, επομένως ότι είναι μη-μηδενικό, είναι και για μετατοπισμένα πεδία το ίδιο, όπως για παράδειγμα στον όρο που εμφανίζεται στη πυκνότητα,

$$\begin{aligned} \delta_{ab} \circ_{bcd} \delta_{ef} \langle \langle \phi_{ec} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{fd} \rangle \rangle \\ \propto \delta_{ab} \circ_{bcd} \delta_{ef} \delta_{ef} \delta_{cd} + \delta_{ab} \circ_{bcd} \delta_{ef} \varepsilon_{ef} \varepsilon_{cd} \propto +\delta_{ab} (\mathbf{n}_{00} \delta_{00} \circ_{b00} + \mathbf{n}_{11} \delta_{11} \circ_{b11}) = 1_a (\mathbf{n}_{00} - \mathbf{n}_{11}) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab} \circ_{bcd} \varepsilon_{ef} \langle \langle \phi_{ec} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{fd} \rangle \rangle \\ \propto \varepsilon_{ab} \circ_{bcd} \varepsilon_{ef} \delta_{ef} \delta_{cd} + \varepsilon_{ab} \circ_{bcd} \varepsilon_{ef} \varepsilon_{ef} \varepsilon_{cd} \propto -\varepsilon_{ab} (\mathbf{n}'_{01} \varepsilon_{01} \circ_{b01} + \mathbf{n}'_{10} \varepsilon_{10} \circ_{b10}) = J_a (\mathbf{n}'_{01} - \mathbf{n}'_{10}) \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

όπου $\mathbf{n}'_{01} = \mathbf{n}'_{10}$ αφού $\langle \langle \phi_{a0} \phi_{a1} \rangle \rangle = \langle \langle \phi_{a1} \phi_{a0} \rangle \rangle$ και άρα $\langle n_1 \rangle = 0$.

Το συμπέρασμα [6] είναι πως παρ' όλη την επέκταση των πεδίων σε διπλομιγαδικά με παράλληλη επέκταση των παρατηρήσιμων μεγεθών σε μιγαδικά, οι αναμενόμενες τιμές των τελευταίων εξακολουθούν να είναι πραγματικές, σε συνέπεια με το φυσικό αποτέλεσμα που περιμέναμε (μετρησιμότητα φυσικού μεγέθους), γεγονός που καθιστά τη δυναμική Langevin φαινομενολογικά αυτοσυνεπή υποθέτοντας μηχανισμό κβάντωσης.

4.2 Εξομοίωση δυναμικής Langevin σχετικιστικού αερίου Bose

Ο αλγόριθμος εξομοίωσης της δυναμικής Langevin του σχετικιστικού αερίου Bose χωρίζεται σε τρία βασικά στάδια:

Initialization Σε αυτό το στάδιο χτίζεται το πλέγμα εξομοίωσης και τα απαραίτητα πεδία και βοηθητικές παράμετροι αρχικοποιούνται.

Langevin evolution Στο κύριο σώμα του προγράμματος, το σύστημα ανανεώνεται κατά το διακριτό πρότυπο δυναμικής Langevin ενώ παράλληλα και κατ' επιλογή υπολογίζονται διάφορες παρατηρήσιμες ποσότητες για μετέπειτα επεξεργασία.

Finalization Όταν ολοκληρωθεί η εξομοίωση, αποθηκεύουμε την κατάσταση του συστήματος για μετέπειτα εξομοίωση, ενώ γίνονται τελικοί υπολογισμοί πάνω στα δεδομένα παρατηρήσιμων μεγεθών.

Στην περιγραφή του αλγορίθμου που ακολουθεί, παραλείπονται τεχνικές λεπτομέρειες που αφορούν την ομαλή λειτουργία του προγράμματος, καθώς και οποιαδήποτε βοηθητική διαδικασία, αν αυτή κρίνεται εκτός εμβέλειας της φυσικής περιγραφής. Πέρα από τις μονάδες κβαντικής θεωρίας πεδίου όπου $c = \hbar = 1$, υποτίθεται επιπλέον πως η πλεγματοτική σταθερά $\ell = 1$.

4.2.1 Initialization

Με το διακόπτη status επιλέγεται αν θα ξεκινήσει νέα εξομοίωση ή θα συνεχιστεί μια παλαιότερη από το σημείο που η τελευταία τερμάτισε.

νέα εξομοίωση

Η εξομοίωση ξεκινά διαβάζοντας τις παραμέτρους του προβλήματος πρωτίστως, δηλαδή

- τη μάζα m του πεδίου που περιγράφει το αέριο,
- τη σύζευξη αυτό-αλληλεπίδρασης του πεδίου και
- το χημικό δυναμικό μ

4 Σχετικιστικό αέριο Bose

Ακολούθως όπως είναι επόμενο για πεπερασμένα υπολογιστικά συστήματα, διαβάζεται η προτιμητέα διάρκεια της εξομοίωσης σε βήματα¹ N και το μέγεθος βήματος Langevin ϵ στη κλίμακα που ορίζεται από τις σχετικές μονάδες όπως περιγράφονται παραπάνω.

Αφού αρχικοποιηθεί το σύστημα, ετοιμάζεται το έδαφος της εξομοίωσής του, δηλαδή κατασκευάζεται και αποθηκεύεται το πλέγμα \mathbb{L} ,² αντιστοιχίζοντας σε κάθε πλεγματική θέση μνήμης i :

- τις πλεγματικές θέσεις μνήμης των πλησιέστερων γειτόνων του,³ $j_{a\pm}(i)$
- τις (ευκλείδεια) χωροχρονικές συντεταγμένες του,⁴ $x_\alpha(i)$, έχοντας υπόψη $\ell = 1$

Να πούμε εδώ πως η αναπαράσταση που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του πλέγματος, και κατά συνέπεια της εξομοίωσης ολόκληρης, είναι αυτή της θέσης.

Τέλος, για νέα εξομοίωση, το πεδίο αρχικοποιείται με ένα φυσιολογικό για τη φόρμα των εξισώσεων Langevin: συμβολίζοντας πάντα με $|\eta\rangle$ ένα θορυβημένο πεδίου διαφορετικό κατ' ανάγκη χωρίς καμία σημασία σε ποιο βήμα βρίσκεται η εξομοίωση, $|\phi\rangle_0 := |\eta\rangle$, επιλογή η οποία σε όρους στατιστική φυσικής θα μπορούσε να αντιστοιχηθεί σε «hot» κατάσταση του συστήματος. Μια διαφορετική επιλογή θα μπορούσε να είναι η «cold» κατάσταση $|\phi\rangle_0 := 0$.

Σε αυτήν την φάση, η εξομοίωση είναι έτοιμη να ξεκινήσει και να δώσει το πρώτο ανανεωμένο κατά Langevin πεδίο $|\phi\rangle_1$.

παλαιά εξομοίωση

Η μόνη διαφορά με τη νέα εξομοίωση είναι ότι αρχική συνθήκη του πεδίου αποτελεί η τελευταία κατάσταση του συστήματος την τελευταία φορά που έτρεξε ίδιου τύπου εξομοίωση (ταυτόσημες παράμετροι και πλέγμα), $|\phi\rangle_0 := |\phi\rangle_N$, ώστε να συνεχίσει η εξομοίωση σαν να μην έχει σταματήσει ποτέ. Χρήσιμο σε περίπτωση για παράδειγμα που διαπιστώσουμε ότι το σύστημα δε «θερμοποιήθηκε» ακόμη⁵ και χρειάζεται να τρέξει κι άλλο.

μεταβλητό βήμα χρόνου Langevin ϵ

Όπως φαίνεται από τους ορισμούς (3.3.9) ή (3.3.10), ο χρόνος που εισάγεται στο πρόγραμμα, σε περίπτωση που επιλεγεί μεταβλητό βήμα, ερμηνεύεται ως μέσο $\bar{\epsilon}$ και ταυτόχρονα αρχικό ϵ_0 βήμα της εξομοίωσης, το οποίο καθιστά απαραίτητη και την αρχικοποίηση της νόρμας των συντελεστών ολίσθησης γύρω από μια «μαντεψιά», η πιο φυσιολογική εκ των οποίων είναι ο φυσικός μέσος της αρμονικής μέσης τιμής, $K_0 = 1$.⁶ Σε περίπτωση συνέχισης παλαιότερης εξομοίωσης, η νόρμα αρχικοποιείται με βάση την τελευταία εκτιμώμενη μέση τιμή, $K_0 = \langle K \rangle_N$, ενώ συνεχίζεται η εκτίμησή της και στη συνέχεια.

4.2.2 Langevin evolution

Δεδομένων των παραμέτρων του συστήματος, όπως διαβάστηκαν στο πρώτο στάδιο, μπορεί να κατασκευαστεί η εξίσωση Langevin όρο προς όρο, δίνοντας με βάση το πεδίο $|\phi\rangle_n$ το επόμενο πεδίο $|\phi\rangle_{n+1}$ σύμφωνα με (??). Αν το βήμα της εξομοίωσης είναι σταθερό, πριν ολοκληρωθεί το βήμα, υπολογίζεται η δράση και διάφορα παρατηρήσιμα μεγέθη, όπως η πυκνότητα του αερίου, n , και η νόρμα τετράγωνο του πεδίου, ρ , τα οποία χρησιμοποιούνται αργότερα για την αξιολόγηση του αποτελέσματος της εξομοίωσης.⁷

Η υλοποίηση της εξομοίωσης παίρνει δύο παράλληλες μορφές, ανάλογα με την επιλογή λογισμικού των πεδίων:

- σε 4 πραγματικές συνιστώσες $\phi_{ab} := \gamma^{-1}(\phi_{00} + i\phi_{10} + j\phi_{01} + ij\phi_{11})$, $\gamma = \sqrt{2}$ που αναπαριστούν το διπλομιγαδικό πεδίο

¹ είτε πρόκειται για μεταβλητό βήμα, είτε για σταθερό

² Το μέγεθος του πλέγματος είναι hardcoded στο πρόγραμμα.

³ ±γιατί οι πλησιέστεροι γείτονες span αμφίπλευρα προς κάθε ανεξάρτητη διεύθυνση

⁴ το οποίο κατ' επέκταση ορίζει και τις χωροχρονικές συντεταγμένες των πλησιέστερων γειτόνων, όπως φαίνεται ότι χρειάζονται για παράδειγμα στους συντελεστές ολίσθησης (??)

⁵ να έχει φτάσει δηλαδή στην περιοχή του χώρου των καταστάσεων όπου υπάρχει μεγαλύτερη συνεισφορά στη στατιστική

⁶ Για την κανονική μέση τιμή θα ήτανε $K_0 = 0$, τιμή προβληματική τόσο για καθαρά μη αρνητικές ποσότητες (οριακή) όσο και για το κριτήριο μεταβλητού βήματος (3.3.6), ενθαρρύνοντας για μία ακόμη φορά την επιλογή της αρμονικής μέσης τιμής.

⁷ Η μέτρηση παρατηρήσιμων έχει νόημα και στην περίπτωση του μεταβλητού βήματος, μόνο όμως για παρακολούθηση της εξομοίωσης και όχι για εξαγωγή στατιστικών μεγεθών, καθώς στην τελευταία περίπτωση θα χρειαζότανε συντελεστές βάρους για κάθε μέτρηση. Όχι ότι δε μπορεί να γίνει, αλλά το μεταβλητό βήμα εξυπηρετεί την θερμοποίηση του συστήματος και μόνο ούτως ή άλλως, και μάλιστα μόνο το αρχικό στάδιο, στο οποίο και υπάρχει κίνδυνος απόκλισης της εξομοίωσης.

- σε 2 μιγαδικές συνιστώσες, κάθε μία εκ' των οποίων αναπαριστά ένα φυσιολογικό μιγαδικό πεδίο, όπως πριν την επέκταση σε διπλομιγαδικούς, δηλαδή γίνεται ανάπτυξη ως προς τον δεύτερο δείκτη και γράφεται $\phi_{_b} := \beta^{-1}(\phi_{_0} + j\phi_{_1})$, $\beta = 1$

Στην τελευταία γραφή, επιλέχθηκε η απόκρυψη δεικτών να γίνει φανερή με τη χρήση κενής θέσης $_$, ώστε να είναι ξεκάθαρο ως προς ποια μιγαδική μονάδα αναπτύσσουμε κάθε φορά

\mathbb{R}^4 (4 πραγματικές συνιστώσες)

ανάπτυξη σε πραγματικές συνιστώσες:

$$\phi_{ab} := \gamma^{-1}(\phi_{00} + i\phi_{10} + j\phi_{01} + ij\phi_{11}) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(\phi_{00} + i\phi_{10}) + j\alpha^{-1}(\phi_{01} + i\phi_{11})), \alpha = \sqrt{2} \text{ και } \beta = 1, \gamma = \alpha\beta \quad (4.2.1)$$

Όπως γίνεται κατανοητό με αυτόν τον τρόπο λογισμού, τα πάντα γίνονται σε συνιστώσες και έτσι η κανονικοποίηση δε φαίνεται παρά μόνο στις αναλλοίωτες ποσότητες, όπως η νόρμα και διάφορες ποσότητες οι οποίες μπορούν και εκφράζονται σε αφηρημένη μορφή.⁸

$\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ (2 j-μιγαδικές συνιστώσες)

ανάπτυξη ως προς επιμέρους μιγαδικές μονάδες:

$$\phi_{a_} := \alpha^{-1}(\phi_{0_} + i\phi_{1_}) \text{ και } \phi_{_b} := \beta^{-1}(\phi_{_0} + j\phi_{_1}) \quad (4.2.2)$$

μετάβαση από την μία ανάπτυξη στην άλλη:

$$\phi_{0_} = \alpha\beta^{-1}(\Re\phi_{_0} + j\Re\phi_{_1}) \text{ ή } \phi_{_0} = \alpha^{-1}\beta(\Re\phi_{0_} + j\Re\phi_{1_}) \quad (4.2.3)$$

$$\phi_{1_} = \alpha\beta^{-1}(\Im\phi_{_0} + j\Im\phi_{_1}) \text{ ή } \phi_{_1} = \alpha^{-1}\beta(\Im\phi_{0_} + j\Im\phi_{1_}) \quad (4.2.4)$$

4.2.3 Finalization

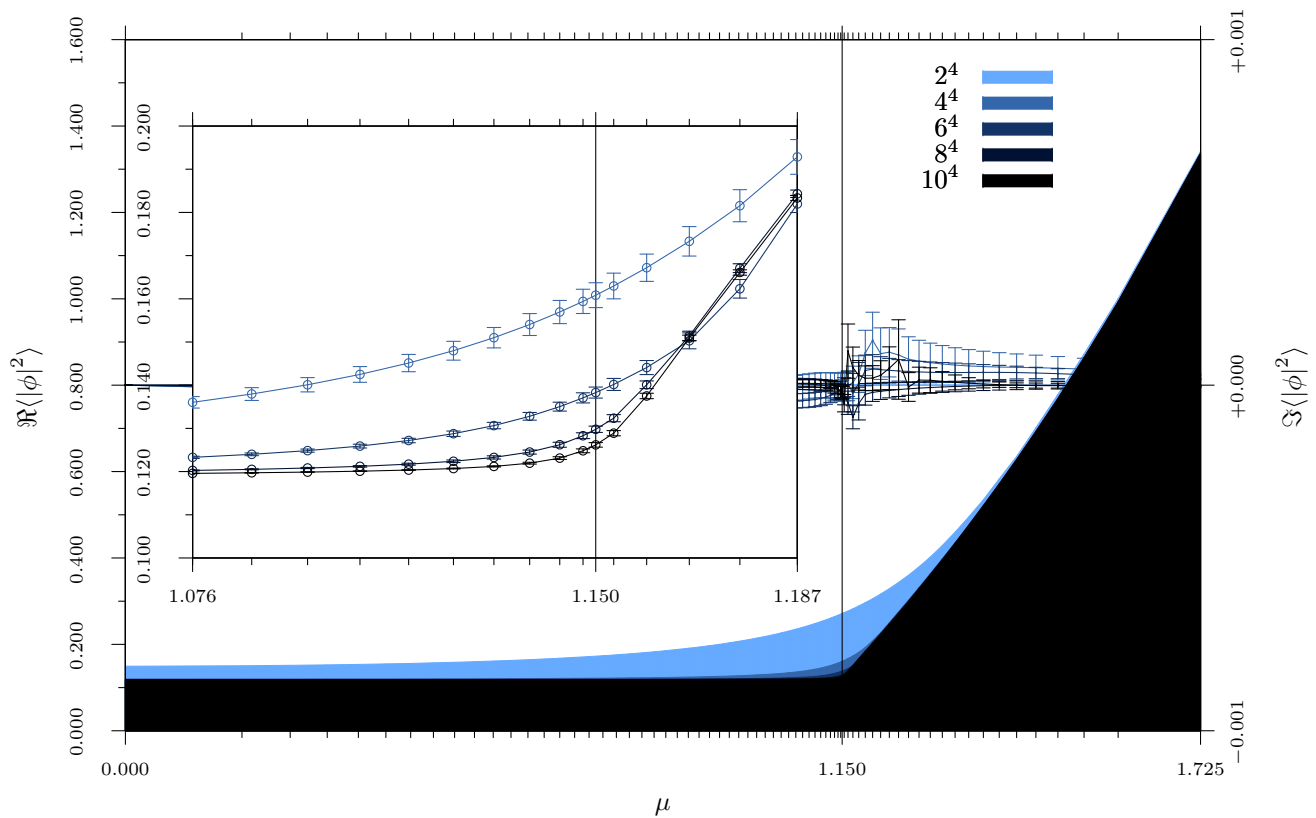
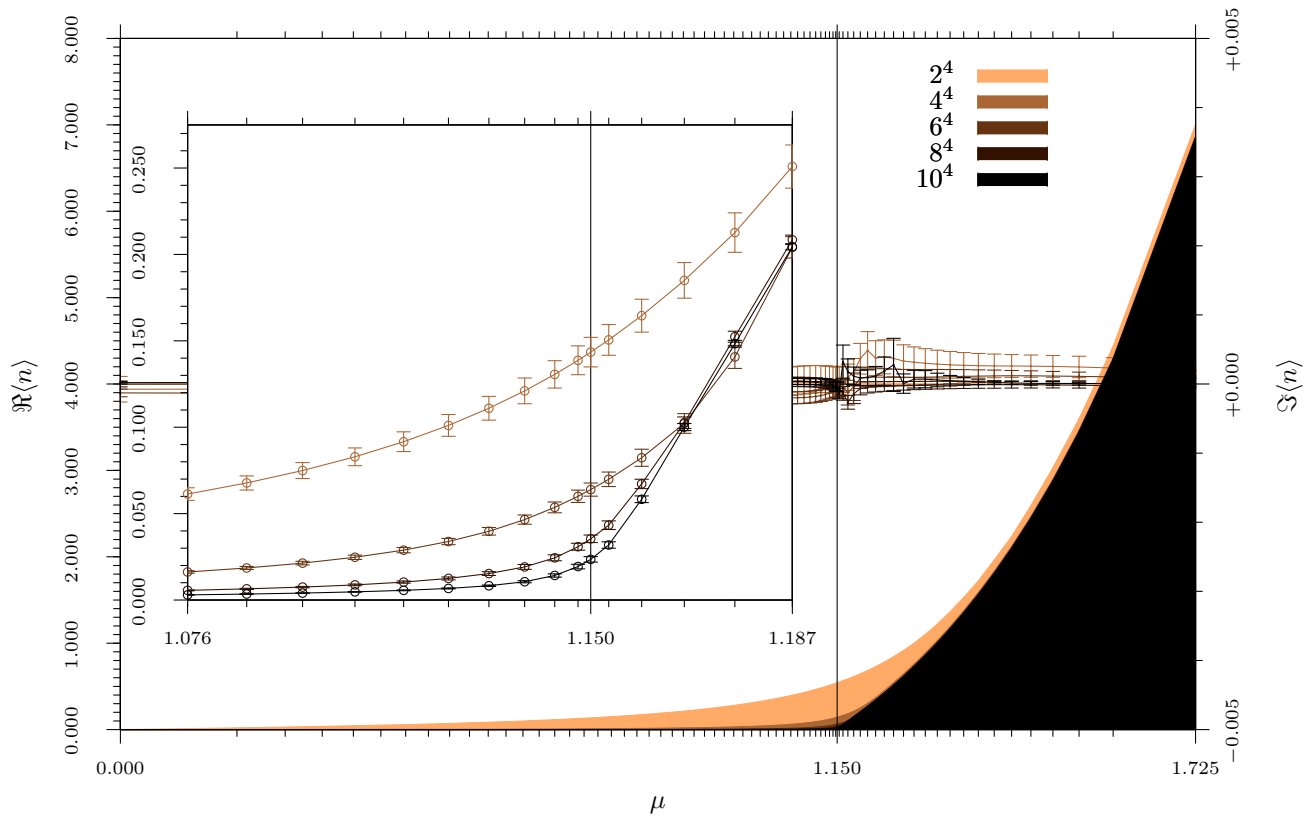
Το τελευταίο βήμα έχει γίνει και το τελευταίο πεδίο $|\phi\rangle_N$ αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση/συνέχεια. Τέλος, υπολογίζονται μέσες τιμές και σφάλματα των παρατηρήσιμων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο jack-knife για την αποφυγή του μερικού αυτοσυσχετισμού των μετρήσεων.

4.3 Αποτελέσματα

Το σχετικιστικό αέριο Bose εμφανίζει το φαινόμενο Silver Blaze όπως αναδεικνύεται στα [5, 9, 12]. Ειδικότερα σε αυτό το paper αναπαράγουμε τα αποτελέσματα του [5] σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια/ανάλυση γύρω από το αναμενόμενο κρίσιμο σημείο του φαινομένου, και τα αποτελέσματα φαίνεται να συμφωνούν με το [5] και να αναπαράγουν γενικά το διάγραμμα φάσης του σχετικιστικού αερίου Bose. Προσοχή στα φαινόμενα πεπερασμένης διάστασης του πλέγματος, όπου είναι εκπληκτικό πως, παρόλη την τεράστια εξομάλυνση που υφίσταται, το ελάχιστο πλέγμα 2^4 εξακολουθεί να αναδεικνύει το φαινόμενο!

⁸Στον αφηρημένο λογισμό δεικτών που παρουσιάστηκε εδώ, οι σταθερές κανονικοποίησης έχουν ενσωματωθεί στους τανυστές των πράξεων, διατηρώντας της αυτοσυνέπεια του φορμαλισμού και καθιστώντας εύκολη την εξαγωγή των σωστών ανεπτυγμένων μορφών.

4 Σχετιστικό αέριο Bose



Bibliography

- [1] ISTVÁN MONTVAY, GERNOT MÜNSTER.
Quantum Fields on a Lattice.
Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
Cambridge University Press. (1994)
doi.org/10.1017/CBO9780511470783
- [2] JEAN ZINN-JUSTIN.
Quantum Field Theory and Critical Phenomena.
Clarendon Press, International Series of Monographs on Physics 113.
Oxford University Press, USA, forth edition. (2002)
- [3] POUL H. DAMGAARD, HELMUTH HÜFFEL.
Stochastic Quantization.
PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters) 152, Nos. 5 & 6 (1987) 227-398.
North-Holland, Amsterdam.
- [4] RYOGO KUBO.
The fluctuation-dissipation theorem.
1966 Rep. Prog. Phys. 29 255.
[doi:10.1088/0034-4885/29/1/306/](https://doi.org/10.1088/0034-4885/29/1/306/)
- [5] GERT AARTS.
Can stochastic quantization evade the sign problem? – the relativistic Bose gas at finite chemical potential.
[arXiv:0810.2089v2](https://arxiv.org/abs/0810.2089v2) [hep-lat] 12 March 2009
- [6] GERT AARTS.
Complex Langevin dynamics at finite chemical potential: mean field analysis in the relativistic Bose gas.
[arXiv:0902.4686v2](https://arxiv.org/abs/0902.4686v2) [hep-lat] 5 May 2009
- [7] GERT AARTS, FRANK A. JAMES, ERHARD SEILER, ION-OLIMPIU STAMATESCU.
Adaptive stepsize and instabilities in complex Langevin dynamics.
[arXiv:0912.0617v2](https://arxiv.org/abs/0912.0617v2) [hep-lat] 17 March 2010
- [8] MARCO CRISTOFORETTI, FRANCESCO DI RENZO, LUIGI SCORZATO.
High density QCD on a Lefschetz thimble?
[arXiv:1205.3996v3](https://arxiv.org/abs/1205.3996v3) [hep-lat] 27 September 2012
- [9] MARCO CRISTOFORETTI, FRANCESCO DI RENZO, ABHISHEK MUKHERJEE, LUIGI SCORZATO.
Monte Carlo simulations on the Lefschetz thimble: taming the sign problem.
[arXiv:1303.7204v2](https://arxiv.org/abs/1303.7204v2) [hep-lat] 14 November 2013
- [10] GERT AARTS.
Lefschetz thimbles and stochastic quantisation: Complex actions in the complex plane.
[arXiv:1308.4811v1](https://arxiv.org/abs/1308.4811v1) [hep-lat] 22 August 2013
- [11] SHAILESH CHANDRASEKHARAN, UWE-JENS WIESE.
Meron-Cluster Solution of Fermion Sign Problems.
[arXiv:cond-mat/9902128v2](https://arxiv.org/abs/conform-mat/9902128v2) [cond-mat.stat-mech] 11 October 1999
- [12] CHRISTOF CATTRINGER, THOMAS KLOIBER.
Lattice study of the Silver Blaze phenomenon for a charged scalar ϕ^4 field.
[arXiv:1206.2954v2](https://arxiv.org/abs/1206.2954v2) [hep-lat] 12 December 2012

Bibliography

- [13] N. PROKOF'EV, B. SVISTUNOV.
[Phys. Rev. Lett. 87 \(2001\) 160601](#)
- [14] Z. FODOR, S. KATZ.
[Phys.Lett. B534, 87 \(2002\)](#), [hep-lat/0104001](#)
- [15] C. ALLTON, S. EJIRI, S. HANDS, O. KACZMAREK, F. KARSCH, E. LAERMANN, C. SCHMIDT, L. SCORZATO.
[Phys.Rev. D66, 074507 \(2002\)](#), [hep-lat/0204010](#)
- [16] R. V. GAVAI AND S. GUPTA.
[Phys.Rev. D68, 034506 \(2003\)](#), [hep-lat/0204010](#)
- [17] P. DE FORCRAND, O. PHILIPSEN.
[Nucl.Phys. B642, 290 \(2002\)](#), [hep-lat/0205016](#)
- [18] M. D'ELIA, M.-P. LOMBARDO.
[Phys.Rev. D67, 014505 \(2003\)](#), [hep-lat/0205016](#)
- [19] J. R. KLAUDER, W. P. PETERSEN.
[J.Stat.Phys. 39, 53 \(1985\)](#)
- [20] G. AARTS, I.-O. STAMATESCU.
[JHEP 0809, 018 \(2008\)](#), [arXiv:0807.1597](#) [hep-lat]
- [21] G. GURALNIK, C. PEHLEVAN.
[Nucl.Phys. B822, 349 \(2009\)](#), [arXiv:0902.1503](#) [hep-lat]
- [22] S. CHANDRASEKHARAN.
[Phys.Rev. D82, 025007 \(2010\)](#), [arXiv:0910.5736](#) [hep-lat]
- [23] J. LANGELAGE, S. LOTTINI, O. PHILIPSEN.
[JHEP 1102, 057 \(2011\)](#), [arXiv:1010.0951](#) [hep-lat]
- [24] M. FROMM, J. LANGELAGE, S. LOTTINI, O. PHILIPSEN.
[JHEP 1201, 042 \(2012\)](#), [arXiv:1111.4953](#) [hep-lat]
- [25] S. EJIRI.
[Phys.Rev. D77, 014508 \(2008\)](#), [arXiv:0706.3549](#) [hep-lat]
- [26] K. ANAGNOSTOPOULOS, J. NISHIMURA.
[Phys.Rev. D66, 106008 \(2002\)](#), [hep-th/0108041](#)
- [27] J. AMBJORN, K. ANAGNOSTOPOULOS, J. NISHIMURA, J. VERBAARSCHOT.
[JHEP 0210, 062 \(2002\)](#), [hep-lat/0208025](#)
- [28] K. N. ANAGNOSTOPOULOS, T. AZUMA, J. NISHIMURA.
[JHEP 1110, 126 \(2011\)](#), [arXiv:1108.1534](#) [hep-lat]
- [29] Z. FODOR, S. D. KATZ, C. SCHMIDT.
[JHEP 0703, 121 \(2007\)](#), [hep-lat/0701022](#)
- [30] V. AZCOITI, G. DI CARLO, A. GALANTE, V. LALIENA.
[Nucl.Phys. B723, 77 \(2005\)](#), [hep-lat/0503010](#)
- [31] J. DANZER, C. GATTRINGER.
[Phys.Rev. D86, 014502 \(2012\)](#), [arXiv:1204.1020](#) [hep-lat]
- [32] K. NAGATA, S. MOTOKI, Y. NAKAGAWA, A. NAKAMURA, T. SAITO.
XQCD-J Collaboration (2012), [arXiv:1204.1412](#) [hep-lat]
- [33] A. ARMONI, A. PATELLA.
[Phys.Rev. D85, 125021 \(2012\)](#), [arXiv:1204.2405](#) [hep-th]
- [34] M. HANADA, Y. MATSUO, N. YAMAMOTO.
[arXiv:1205.1030](#)