

# Προσομοιώσεις Monte Carlo Κβαντικού Βαθμωτού Πεδίου στο Πλέγμα



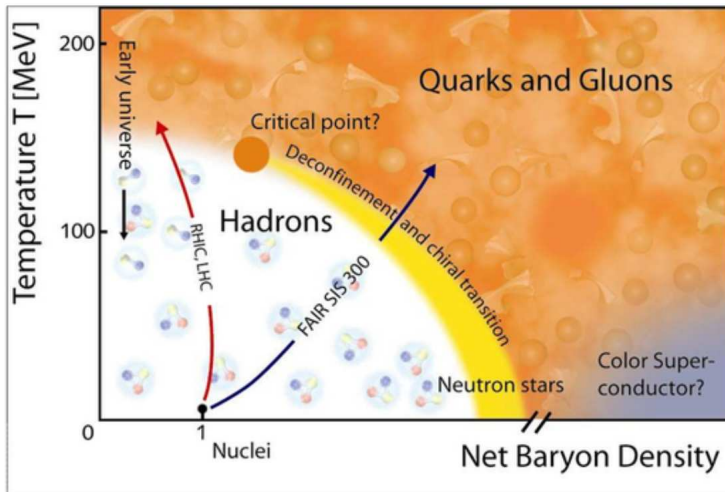
Χρίστος Σταθόπουλος  
Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Αναγνωστόπουλος

Δ.Π.Μ.Σ. "Φυσική και τεχνολογικές εφαρμογές"  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο - ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος

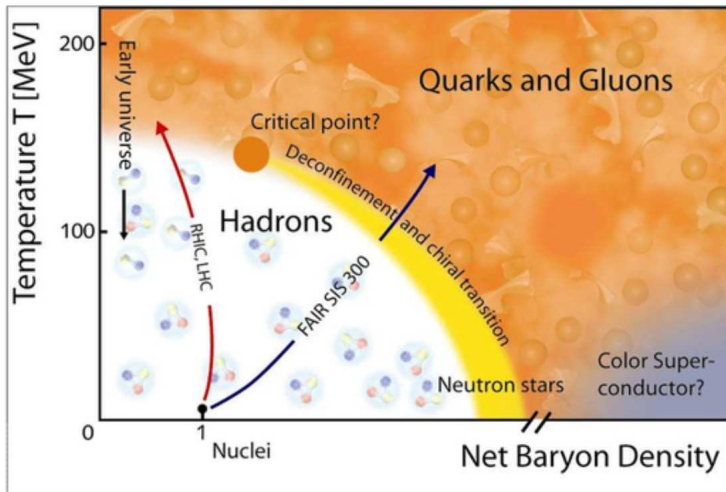
Αθήνα, Μάρτιος 2016

- 1 **Κίνητρο**
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσήμου
- 2 **Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.**
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 **Αριθμητικές Προσομοιώσεις**
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 **Περίληψη & Συμπεράσματα**

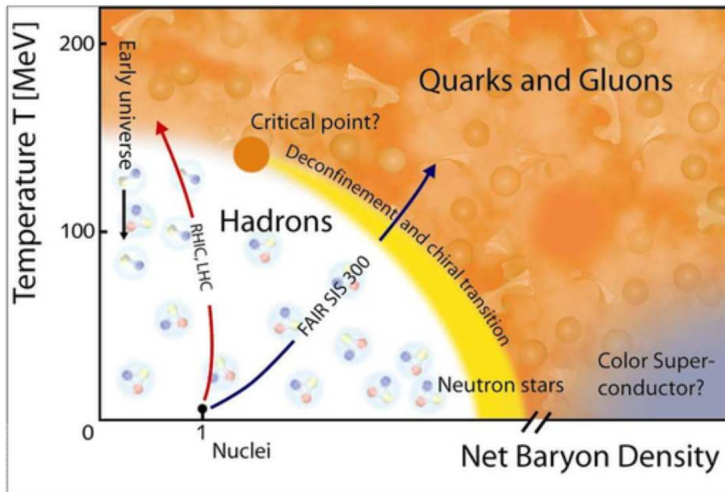
- 1 **Κίνητρο**
  - QCD
    - Το πρόβλημα του Προσέμου
- 2 **Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.**
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 **Αριθμητικές Προσομοιώσεις**
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 **Περίληψη & Συμπεράσματα**



- Χώρος των φάσεων μὴ πλήρως καθορισμένος
- Τυπικές μέθοδοι Lattice Monte Carlo ὄχι ἄμεσα εφαρμόσιμες.
- Εφαρμόσιμες μόνο σε χαμηλή πυκνότητα ἢ υψηλές θερμοκρασίες.



- Χώρος των φάσεων μη πλήρως καθορισμένος
- Τυπικές μέθοδοι Lattice Monte Carlo όχι άμεσα εφαρμόσιμες.
- Εφαρμόσιμες μόνο σε χαμηλή πυκνότητα ή υψηλές θερμοκρασίες.



- Χώρος των φάσεων μὴ πλήρως καθορισμένος
- Τυπικές μέθοδοι Lattice Monte Carlo ὄχι ἄμεσα εφαρμόσιμες.
- Εφαρμόσιμες μόνο σε χαμηλή πυκνότητα ἢ υψηλές θερμοκρασίες.

## 1 Κίνητρο

- QCD

- Το πρόβλημα του Προσήμου

## 2 Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.

- Στατιστική για κβαντικά συστήματα
- Δυναμική του Πεδίου
- Ολοκλήρωμα διαδρομής
- Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
- Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα

## 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις

- Δειγματοληψία
- Re-weighting
- Markov Chain Monte Carlo
- Metropolis
- Παρατηρήσιμες Ποσότητες
- Περίοδος Θέρμανσης
- Αυτοσυσχετίσεις
- Αποτελέσματα προσομοίωσης
  - Phase Quenched Model
  - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου

## 4 Περίληψη & Συμπεράσματα

## Πρόβλημα του προσήμου

- Τυπικές μέθοδοι Lattice Monte Carlo απαιτούν ερμηνία των παραγόντων  $e^{-S}$  ως βαρών πιθανότητας για καταστάσεις του κβαντικού πεδίου.
- Τι συμβαίνει όταν  $S \in \mathbb{C}$ ;



## Πρόβλημα του προσήμου

- Τυπικές μέθοδοι Lattice Monte Carlo απαιτούν ερμηνία των παραγόντων  $e^{-S}$  ως βαρών πιθανότητας για καταστάσεις του κβαντικού πεδίου.
- Τι συμβαίνει όταν  $S \in \mathbb{C}$ ;

## Πρόβλημα του προσήμου

- Τυπικές μέθοδοι Lattice Monte Carlo απαιτούν ερμηνία των παραγόντων  $e^{-S}$  ως βαρών πιθανότητας για καταστάσεις του κβαντικού πεδίου.
- Τι συμβαίνει όταν  $S \in \mathbb{C}$ ;

- 1 Κίνητρο
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσήμου
- 2 **Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.**
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 **Περίληψη & Συμπεράσματα**

## Μεγαλοκανονική Κατανομή ( $\mu VT$ )

- Μεταβαλλόμενη Ενέργεια και Αριθμός Σωματιδίων
- Σταθερή Θερμοκρασία  $T = \beta^{-1}$  και χημικό δυναμικό  $\mu$
- Πίνακας πυκνότητας:

$$\hat{\rho} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$$

- $\hat{H} \rightarrow$  Χαμιλτονιανός τελεστής  $\hat{N} \rightarrow$  Τελεστής αριθμού σωματιδίων
- Συνάρτηση Επιμερισμού

$$Z = \text{Tr} \hat{\rho} = \sum_{\alpha} \langle \alpha | e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} | \alpha \rangle$$

- Παρατηρήσιμες ποσότητες  $\rightarrow$  Από παραγωγή της Συνάρτησης Επιμερισμού.

## Μεγαλοκανονική Κατανομή ( $\mu VT$ )

- Μεταβαλλόμενη Ενέργεια και Αριθμός Σωματιδίων
- Σταθερή Θερμοκρασία  $T = \beta^{-1}$  και χημικό δυναμικό  $\mu$
- Πίνακας πυκνότητας:

$$\hat{\rho} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$$

- $\hat{H} \rightarrow$  Χαμιλτονιανός τελεστής  $\hat{N} \rightarrow$  Τελεστής αριθμού σωματιδίων
- Συνάρτηση Επιμερισμού

$$Z = \text{Tr} \hat{\rho} = \sum_{\alpha} \langle \alpha | e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} | \alpha \rangle$$

- Παρατηρήσιμες ποσότητες  $\rightarrow$  Από παραγωγή της Συνάρτησης Επιμερισμού.

## Μεγαλοκανονική Κατανομή ( $\mu VT$ )

- Μεταβαλλόμενη Ενέργεια και Αριθμός Σωματιδίων
- Σταθερή Θερμοκρασία  $T = \beta^{-1}$  και χημικό δυναμικό  $\mu$
- Πίνακας πυκνότητας:

$$\hat{\rho} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$$

- $\hat{H} \rightarrow$  Χαμιλτονιανός τελεστής  $\hat{N} \rightarrow$  Τελεστής αριθμού σωματιδίων
- Συνάρτηση Επιμερισμού

$$Z = \text{Tr} \hat{\rho} = \sum_a \langle a | e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} | a \rangle$$

- Παρατηρήσιμες ποσότητες  $\rightarrow$  Από παραγωγή της Συνάρτησης Επιμερισμού.

1

## Κίνητρο

- QCD
- Το πρόβλημα του Προσήμου

2

## Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.

- Στατιστική για κβαντικά συστήματα
- **Δυναμική του Πεδίου**
- Ολοκλήρωμα διαδρομής
- Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
- Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα

3

## Αριθμητικές Προσομοιώσεις

- Δειγματοληψία
- Re-weighting
- Markov Chain Monte Carlo
- Metropolis
- Παρατηρήσιμες Ποσότητες
- Περίοδος Θέρμανσης
- Αυτοσυσχετίσεις
- Αποτελέσματα προσομοίωσης
  - Phase Quenched Model
  - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου

4

## Περίληψη &amp; Συμπεράσματα

## Μιγαδικό Βαθμωτό Πεδίο

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2) / \sqrt{2} \quad , \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$$

Λαγκρανζιανή Πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \partial_\nu \phi^* \partial^\nu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$$

U(1) συμμετρία → Θεώρημα Noether

$$j_\nu = i (\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*)$$

Αριθμός Σωματιδίων

$$N = \int d^3x j_0(x) = \int d^3x i [\phi^* \partial_t \phi - \phi (\partial_t \phi)^*]$$

Χαμιλτονιανή Πυκνότητα μέσω μετασχηματισμού Legendre

$$\mathcal{H} = \partial_t \phi^* \partial_t \phi + \nabla \phi^* \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Χαμιλτονιανή  $H = \int d^3x \mathcal{H}$



## Μιγαδικό Βαθμωτό Πεδίο

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2) / \sqrt{2} \quad , \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$$

Λαγκρανζιανή Πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \partial_\nu \phi^* \partial^\nu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$$

U(1) συμμετρία → Θεώρημα Noether

$$j_\nu = i (\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*)$$

Αριθμός Σωματιδίων

$$N = \int d^3x j_0(x) = \int d^3x i [\phi^* \partial_t \phi - \phi (\partial_t \phi)^*]$$

Χαμιλτονιανή Πυκνότητα μέσω μετασχηματισμού Legendre

$$\mathcal{H} = \partial_t \phi^* \partial_t \phi + \nabla \phi^* \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Χαμιλτονιανή  $H = \int d^3x \mathcal{H}$

## Μιγαδικό Βαθμωτό Πεδίο

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2) / \sqrt{2} \quad , \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$$

Λαγκρανζιανή Πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \partial_\nu \phi^* \partial^\nu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$$

U(1) συμμετρία  $\rightarrow$  Θεώρημα Noether

$$j_\nu = i (\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*)$$

Αριθμός Σωματιδίων

$$N = \int d^3x j_0(x) = \int d^3x i [\phi^* \partial_t \phi - \phi (\partial_t \phi)^*]$$

Χαμιλτονιανή Πυκνότητα μέσω μετασχηματισμού Legendre

$$\mathcal{H} = \partial_t \phi^* \partial_t \phi + \nabla \phi^* \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Χαμιλτονιανή  $H = \int d^3x \mathcal{H}$

- 1 Κίνητρο
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσέμου
- 2 **Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.**
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - **Ολοκλήρωμα διαδρομής**
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 **Περίληψη & Συμπεράσματα**

Συνάρτηση Επιμερισμού  $Z = \text{Tr } \hat{\rho} = \sum_{\alpha} \langle \alpha | e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} | \alpha \rangle$

Πεδίο  $\phi$  και Συζυγείς ορμές  $\pi = \frac{\partial \phi}{\partial t}$

Ολοκλήρωμα διαδρομής  $\rightarrow$  Πλάτη Μετάβασης

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\alpha} | e^{-i\mathcal{H}t_f} | \phi_{\alpha} \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_{\alpha}(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x}, t_f) = \phi_{\alpha}(\mathbf{x})} [d\phi] \\ &\times e^{i \int_0^{t_f} dt \int d^3x \left[ \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \pi(\mathbf{x}, t) - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right]} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ως χαμιλτονιανή την

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) \rightarrow \mathcal{H}' = \mathcal{H}(\pi, \phi) - \mu \mathcal{N}(\pi, \phi)$$

και ορίζοντας  $\beta = it_f$  μεταφερόμαστε στον μιγαδικό χρόνο  $\tau = it$   
(Ευκλείδειος Χωρόχρονος)

$$\begin{aligned} Z &= \int [d\pi] \int_{\text{periodic}} [d\phi] \\ &\times e^{\int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \left[ i \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \pi(\mathbf{x}, \tau) - \mathcal{H}(\pi, \phi) + \mu \mathcal{N}(\pi, \phi) \right]} \end{aligned}$$

Συνάρτηση Επιμερισμού  $Z = \text{Tr } \hat{\rho} = \sum_a \langle a | e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} | a \rangle$

Πεδίο  $\phi$  και Συζυγείς ορμές  $\pi = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\phi}}$

Ολοκλήρωμα διαδρομής  $\rightarrow$  Πλάτη Μετάβασης

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-i\mathcal{H}t_f} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(\mathbf{x},0)=\phi_a(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x},t_f)=\phi_a(\mathbf{x})} [d\phi] \\ &\times e^{i \int_0^{t_f} dt \int d^3x \left[ \frac{\partial \phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} \pi(\mathbf{x},t) - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right]} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ως χαμιλτονιανή την

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) \rightarrow \mathcal{H}' = \mathcal{H}(\pi, \phi) - \mu \mathcal{N}(\pi, \phi)$$

και ορίζοντας  $\beta = it_f$  μεταφερόμαστε στον μιγαδικό χρόνο  $\tau = it$   
(Ευκλείδειος Χωρόχρονος)

$$\begin{aligned} Z &= \int [d\pi] \int_{\text{periodic}} [d\phi] \\ &\times e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ i \frac{\partial \phi(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} \pi(\mathbf{x},\tau) - \mathcal{H}(\pi, \phi) + \mu \mathcal{N}(\pi, \phi) \right]} \end{aligned}$$

Συνάρτηση Επιμερισμού  $Z = \text{Tr } \hat{\rho} = \sum_{\alpha} \langle \alpha | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \alpha \rangle$

Πεδίο  $\phi$  και Συζυγείς ορμές  $\pi = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$

Ολοκλήρωμα διαδρομής  $\rightarrow$  Πλάτη Μετάβασης

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\alpha} | e^{-i\mathcal{H}t_f} | \phi_{\alpha} \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(\mathbf{x},0)=\phi_{\alpha}(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x},t_f)=\phi_{\alpha}(\mathbf{x})} [d\phi] \\ &\times e^{i \int_0^{t_f} dt \int d^3x \left[ \frac{\partial \phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} \pi(\mathbf{x},t) - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right]} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ως χαμιλτονιανή την

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) \rightarrow \mathcal{H}' = \mathcal{H}(\pi, \phi) - \mu \mathcal{N}(\pi, \phi)$$

και ορίζοντας  $\beta = it_f$  μεταφερόμαστε στον μιγαδικό χρόνο  $\tau = it$   
(Ευκλείδειος Χωρόχρονος)

$$\begin{aligned} Z &= \int [d\pi] \int_{\text{periodic}} [d\phi] \\ &\times e^{\int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \left[ i \frac{\partial \phi(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} \pi(\mathbf{x},\tau) - \mathcal{H}(\pi, \phi) + \mu \mathcal{N}(\pi, \phi) \right]} \end{aligned}$$

1

## Κίνητρο

- QCD
- Το πρόβλημα του Προσέμου

2

## Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.

- Στατιστική για κβαντικά συστήματα
- Δυναμική του Πεδίου
- Ολοκλήρωμα διαδρομής
- **Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose**
- Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα

3

## Αριθμητικές Προσομοιώσεις

- Δειγματοληψία
- Re-weighting
- Markov Chain Monte Carlo
- Metropolis
- Παρατηρήσιμες Ποσότητες
- Περίοδος Θέρμανσης
- Αυτοσυσχετίσεις
- Αποτελέσματα προσομοίωσης
  - Phase Quenched Model
  - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου

4

## Περίληψη &amp; Συμπεράσματα

Ολοκληρώνοντας τις ορμές παίρνουμε την Συνάρτηση Επιμερισμού

$$Z = \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$$

με την Ευκλείδεια δράση

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E$$

$$\mathcal{L}_E = \partial_\nu \phi^* \partial_\nu \phi + (m^2 - \mu^2) \phi^* \phi + \mu (\phi^* \partial_\tau \phi - \phi \partial_\tau \phi^*) + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Εκτίμητής Παρατηρήσιμης Ποσότητας

$$\langle O \rangle = \frac{\int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\phi O[\phi] e^{-S_E[\phi]}}{\int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}}$$

Βάρη κάθε κατάστασης

$$\rho[\phi] = e^{-S_E[\phi]} \in \mathbb{C}$$



Ολοκληρώνοντας τις ορμές παίρνουμε την Συνάρτηση Επιμερισμού

$$Z = \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$$

με την Ευκλείδεια δράση

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E$$

$$\mathcal{L}_E = \partial_\nu \phi^* \partial_\nu \phi + (m^2 - \mu^2) \phi^* \phi + \mu (\phi^* \partial_\tau \phi - \phi \partial_\tau \phi^*) + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Εκτίμητής Παρατηρήσιμης Ποσότητας

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] e^{-S_E[\phi]}}{\int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}}$$

Βάρη κάθε κατάστασης

$$\rho[\phi] = e^{-S_E[\phi]} \in \mathbb{C}$$

- 1 Κίνητρο
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσήμου
- 2 **Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.**
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - **Διακρίτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα**
- 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 **Περίληψη & Συμπεράσματα**

Για να κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς με τον παράγοντα  $e^{-S_E[\phi]}$

$$S_E = \int d^4x \mathcal{L}_E$$

$$\mathcal{L}_E = \partial_\nu \phi^* \partial_\nu \phi + (m^2 - \mu^2) \phi^* \phi + \mu (\phi^* \partial_\tau \phi - \phi \partial_\tau \phi^*) + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

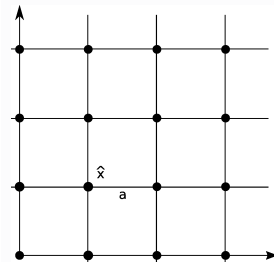
διακριτοποιούμε την δράση σε 4-D χωροχρονικό Πλέγμα!

$$x_\nu \rightarrow n_\nu a, \quad n_\nu \in \mathbb{Z}$$

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi_{\mathbf{x}}$$

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_{\mathbf{x}}^{N_{lat}}$$

$$\partial_\nu \phi(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{1}{a} [\phi_{\mathbf{x}+a\hat{\nu}} - \phi_{\mathbf{x}}]$$



$$N_{lat} = L^4$$

Για να κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς με τον παράγοντα  $e^{-S_E[\phi]}$

$$S_E = \int d^4x \mathcal{L}_E$$

$$\mathcal{L}_E = \partial_\nu \phi^* \partial_\nu \phi + (m^2 - \mu^2) \phi^* \phi + \mu (\phi^* \partial_\tau \phi - \phi \partial_\tau \phi^*) + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

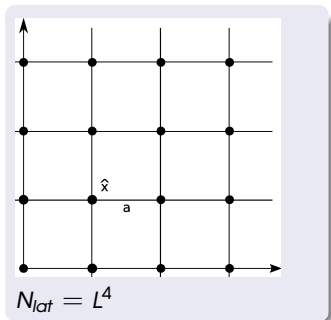
διακριτοποιούμε την δράση σε 4-D χωροχρονικό Πλέγμα!

$$x_\nu \rightarrow n_\nu a, \quad n_\nu \in \mathbb{Z}$$

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi_{\mathbf{x}}$$

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_{\mathbf{x}}^{N_{lat}}$$

$$\partial_\nu \phi(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{1}{a} [\phi_{\mathbf{x}+a\hat{\nu}} - \phi_{\mathbf{x}}]$$



Μετά από ανακλιμάκωση για τα  $\phi$ ,  $m$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  για να παραμείνει η Δράση αδιάστατη, για  $a \rightarrow 0$ , η

$$S_E = \int d^4x \mathcal{L}_E$$

$$\mathcal{L}_E = \partial_\nu \phi^* \partial_\nu \phi + (m^2 - \mu^2) \phi^* \phi + \mu (\phi^* \partial_\tau \phi - \phi \partial_\tau \phi^*) + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

γίνεται

$$S_E = \sum_{\mathbf{x}} \left[ (8 + m^2) \phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}} + \lambda (\phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}})^2 - \sum_{\nu=1}^4 \left( \phi_{\mathbf{x}+\hat{\nu}}^* e^{\mu\delta_{\nu,4}} \phi_{\mathbf{x}} + \phi_{\mathbf{x}}^* e^{-\mu\delta_{\nu,4}} \phi_{\mathbf{x}+\hat{\nu}} \right) \right]$$

1

## Κίνητρο

- QCD
- Το πρόβλημα του Προσήμου

2

## Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.

- Στατιστική για κβαντικά συστήματα
- Δυναμική του Πεδίου
- Ολοκλήρωμα διαδρομής
- Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
- Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα

3

## Αριθμητικές Προσομοιώσεις

- **Δειγματοληψία**
- Re-weighting
- Markov Chain Monte Carlo
- Metropolis
- Παρατηρήσιμες Ποσότητες
- Περίοδος Θέρμανσης
- Αυτοσυσχετίσεις
- Αποτελέσματα προσομοίωσης
  - Phase Quenched Model
  - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου

4

## Περίληψη & Συμπεράσματα



## Εκτιμητής παρατηρήσιμης ποσότητας

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] e^{-S_E[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}} \rightarrow \frac{\sum_{\{\phi_i\}} \mathcal{O}[\phi_i] e^{-S_E[\phi_i]}}{\sum_{\{\phi_i\}} e^{-S_E[\phi_i]}}$$

Άθροισμα σε όλες τις πιθανές διατάξεις  $\phi_i$  του πεδίου με περιοδικές οριακές συνθήκες

Αν ένα σύνολο καταστάσεων πεδίου  $\{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_M\}$  από μία PDF  $\propto e^{-S[\phi_i]} \in \mathbb{R}$  τότε

$$\langle \mathcal{O} \rangle \approx \frac{\sum_{i=1}^M \mathcal{O}[\phi_i] \left(e^{-S[\phi_i]}\right)^{-1} e^{-S[\phi_i]}}{\sum_{i=1}^M \left(e^{-S[\phi_i]}\right)^{-1} e^{-S[\phi_i]}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathcal{O}[\phi_i]$$

αν όμως  $e^{-S_E[\phi_i]} \in \mathbb{C}$ , τι γίνεται;





1

## Κίνητρο

- QCD
- Το πρόβλημα του Προσήμου

2

## Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.

- Στατιστική για κβαντικά συστήματα
- Δυναμική του Πεδίου
- Ολοκλήρωμα διαδρομής
- Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
- Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα

3

## Αριθμητικές Προσομοιώσεις

- Δειγματοληψία
- **Re-weighting**
- Markov Chain Monte Carlo
- Metropolis
- Παρατηρήσιμες Ποσότητες
- Περίοδος Θέρμανσης
- Αυτοσυσχετίσεις
- Αποτελέσματα προσομοίωσης
  - Phase Quenched Model
  - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου

4

## Περίληψη & Συμπεράσματα

## Phase quenched model

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_{\{\phi_i\}} \mathcal{O}[\phi_i] e^{-S_E[\phi_i]}}{\sum_{\{\phi_i\}} e^{-S_E[\phi_i]}} = \frac{\sum_{\{\phi_i\}} \left( \mathcal{O}[\phi_i] e^{-i\Im\{S_E[\phi_i]\}} \right) e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}}}{\sum_{\{\phi_i\}} \left( e^{-i\Im\{S_E[\phi_i]\}} \right) e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}}}$$

Βάρη πιθανότητας  $\rho_{pq} = e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}} > 0$

Importance Sampling:

Για σύνολο  $M$  καταστάσεων  $\{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_M\}$  από PDF  $\propto e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}}$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{full} \approx \frac{\sum_{i=1}^M \mathcal{O}[\phi_i] \left( e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}} \right)^{-1} e^{-S_E[\phi_i]}}{\sum_{i=1}^M \left( e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}} \right)^{-1} e^{-S_E[\phi_i]}} = \frac{\sum_{i=1}^M \mathcal{O}[\phi_i] e^{-i\Im\{S_E[\phi_i]\}}}{\sum_{i=1}^M e^{-i\Im\{S_E[\phi_i]\}}}$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{full} \approx \frac{\langle \mathcal{O} \cdot e^{i\theta_i} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta_i} \rangle_{pq}}, \quad \theta_i = -\Im\{S_E[\phi_i]\}$$

## Phase quenched model

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_{\{\phi_i\}} \mathcal{O}[\phi_i] e^{-S_E[\phi_i]}}{\sum_{\{\phi_i\}} e^{-S_E[\phi_i]}} = \frac{\sum_{\{\phi_i\}} \left( \mathcal{O}[\phi_i] e^{-i\Im\{S_E[\phi_i]\}} \right) e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}}}{\sum_{\{\phi_i\}} \left( e^{-i\Im\{S_E[\phi_i]\}} \right) e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}}}$$

Βάρη πιθανότητας  $\rho_{pq} = e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}} > 0$

### Importance Sampling:

Για σύνολο  $M$  καταστάσεων  $\{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_M\}$  από PDF  $\propto e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}}$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{full} \approx \frac{\sum_{i=1}^M \mathcal{O}[\phi_i] \left( e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}} \right)^{-1} e^{-S_E[\phi_i]}}{\sum_{i=1}^M \left( e^{-\Re\{S_E[\phi_i]\}} \right)^{-1} e^{-S_E[\phi_i]}} = \frac{\sum_{i=1}^M \mathcal{O}[\phi_i] e^{-i\Im\{S_E[\phi_i]\}}}{\sum_{i=1}^M e^{-i\Im\{S_E[\phi_i]\}}}$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{full} \approx \frac{\langle \mathcal{O} \cdot e^{i\theta_i} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta_i} \rangle_{pq}}, \quad \theta_i = -\Im\{S_E[\phi_i]\}$$

- 1 Κίνητρο
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσήμου
- 2 Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - **Markov Chain Monte Carlo**
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 Περίληψη & Συμπεράσματα

Για να κατασκευάσουμε αποδοτικά ένα σύνολο καταστάσεων  $\{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_M\}$  από PDF  $\propto e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}}$  χρησιμοποιούμε **Μαρκοβιανή Αλυσίδα**

$$\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_i \rightarrow \dots \rightarrow \phi_M$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι αν η πιθανότητα μετάβασης από μία κατάσταση  $\phi_i$  σε μία  $\phi_j$ ,  $P(\phi_i \rightarrow \phi_j)$  ικανοποιεί την **Συνθήκη Λεπτομερούς Ισορροπίας**

$$e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}} P(\phi_i \rightarrow \phi_j) = e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_j]\}} P(\phi_j \rightarrow \phi_i)$$

τότε μετά από μια **περίοδο θέρμανσης** η Μ.Κ. ακολουθεί κατανομή  $\propto e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}}$

Σπάμε την πιθανότητα μετάβασης σε

$$P(\phi_i \rightarrow \phi_j) = g(\phi_i \rightarrow \phi_j) A(\phi_i \rightarrow \phi_j)$$

$g(\phi_i \rightarrow \phi_j) \rightarrow$  πιθανότητα επιλογής από ένα σύνολο πιθανών νέων καταστάσεων

$A(\phi_i \rightarrow \phi_j) \rightarrow$  πιθανότητα αποδοχής της επιλεγείσας κατάστασης

Για να κατασκευάσουμε αποδοτικά ένα σύνολο καταστάσεων  $\{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_M\}$  από PDF  $\propto e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}}$  χρησιμοποιούμε **Μαρκοβιανή Αλυσίδα**

$$\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_i \rightarrow \dots \rightarrow \phi_M$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι αν η πιθανότητα μετάβασης από μία κατάσταση  $\phi_i$  σε μία  $\phi_j$ ,  $P(\phi_i \rightarrow \phi_j)$  ικανοποιεί την **Συνθήκη Λεπτομερούς Ισορροπίας**

$$e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}} P(\phi_i \rightarrow \phi_j) = e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_j]\}} P(\phi_j \rightarrow \phi_i)$$

τότε μετά από μια **περίοδο θέρμανσης** η Μ.Κ. ακολουθεί κατανομή  $\propto e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}}$

Σπάμε την πιθανότητα μετάβασης σε

$$P(\phi_i \rightarrow \phi_j) = g(\phi_i \rightarrow \phi_j) A(\phi_i \rightarrow \phi_j)$$

$g(\phi_i \rightarrow \phi_j) \rightarrow$  πιθανότητα επιλογής από ένα σύνολο πιθανών νέων καταστάσεων

$A(\phi_i \rightarrow \phi_j) \rightarrow$  πιθανότητα αποδοχής της επιλεγείσας κατάστασης

Για να κατασκευάσουμε αποδοτικά ένα σύνολο καταστάσεων  $\{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_M\}$  από PDF  $\propto e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}}$  χρησιμοποιούμε **Μαρκοβιανή Αλυσίδα**

$$\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_i \rightarrow \dots \rightarrow \phi_M$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι αν η πιθανότητα μετάβασης από μία κατάσταση  $\phi_i$  σε μία  $\phi_j$ ,  $P(\phi_i \rightarrow \phi_j)$  ικανοποιεί την **Συνθήκη Λεπτομερούς Ισορροπίας**

$$e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}} P(\phi_i \rightarrow \phi_j) = e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_j]\}} P(\phi_j \rightarrow \phi_i)$$

τότε μετά από μια **περίοδο θέρμανσης** η Μ.Κ. ακολουθεί κατανομή  $\propto e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_i]\}}$

Σπάμε την πιθανότητα μετάβασης σε

$$P(\phi_i \rightarrow \phi_j) = g(\phi_i \rightarrow \phi_j) A(\phi_i \rightarrow \phi_j)$$

$g(\phi_i \rightarrow \phi_j) \rightarrow$  πιθανότητα επιλογής από ένα σύνολο πιθανών νέων καταστάσεων

$A(\phi_i \rightarrow \phi_j) \rightarrow$  πιθανότητα αποδοχής της επιλεγείσας κατάστασης

- 1 Κίνητρο
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσήμου
- 2 Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - **Metropolis**
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 Περίληψη & Συμπεράσματα



## Αλγόριθμος Metropolis

**Επιλέγουμε τυχαία** ένα σημείο  $x$  στο πλέγμα και αλλάζουμε το πεδίο σε

$$\phi(x)' \rightarrow \phi(x) \pm \delta\phi$$

Ισχύει  $g(\phi_i \rightarrow \phi_j) = g(\phi_j \rightarrow \phi_i)$

Έπειτα αποφασίζουμε **αν θα αποδεχτούμε ή όχι** την  $\phi_j$  ως νέα κατάσταση με πιθανότητα

$$A(\phi_i \rightarrow \phi_j) = \begin{cases} e^{-\mathfrak{R}\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\}} & \text{if } \mathfrak{R}\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\} > 0 \\ 1 & \text{if } \mathfrak{R}\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\} \leq 0 \end{cases}$$

Αυτό ικανοποιεί την συνθήκη λεπτομερούς ισορροπίας.

Έτσι κατασκευάζουμε την Μαρκοβιανή Αλυσίδα

$$\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_i \rightarrow \dots \rightarrow \phi_M$$

Προφανώς υπάρχει **συσχέτιση** ανάμεσα σε διαδοχικές καταστάσεις.

Χρειάζεται να περάσουν κάποια βήματα μεχρι να έχουμε ασυσχέτιστο δείγμα.

## Αλγόριθμος Metropolis

**Επιλέγουμε τυχαία** ένα σημείο  $x$  στο πλέγμα και αλλάζουμε το πεδίο σε

$$\phi(x)' \rightarrow \phi(x) \pm \delta\phi$$

Ισχύει  $g(\phi_i \rightarrow \phi_j) = g(\phi_j \rightarrow \phi_i)$

Έπειτα αποφασίζουμε **αν θα αποδεχθούμε ή όχι** την  $\phi_j$  ως νέα κατάσταση με πιθανότητα

$$A(\phi_i \rightarrow \phi_j) = \begin{cases} e^{-\Re\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\}} & \text{if } \Re\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\} > 0 \\ 1 & \text{if } \Re\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\} \leq 0 \end{cases}$$

Αυτό ικανοποιεί την συνθήκη λεπτομερούς ισορροπίας.

Έτσι κατασκευάζουμε την Μαρκοβιανή Αλυσίδα

$$\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_i \rightarrow \dots \rightarrow \phi_M$$

Προφανώς υπάρχει **συσχέτιση** ανάμεσα σε διαδοχικές καταστάσεις.

Χρειάζεται να περάσουν κάποια βήματα μεχρι να έχουμε ασυσχέτιστο δείγμα.

## Αλγόριθμος Metropolis

**Επιλέγουμε τυχαία** ένα σημείο  $x$  στο πλέγμα και αλλάζουμε το πεδίο σε

$$\phi(x)' \rightarrow \phi(x) \pm \delta\phi$$

Ισχύει  $g(\phi_i \rightarrow \phi_j) = g(\phi_j \rightarrow \phi_i)$

Έπειτα αποφασίζουμε **αν θα αποδεχθούμε ή όχι** την  $\phi_j$  ως νέα κατάσταση με πιθανότητα

$$A(\phi_i \rightarrow \phi_j) = \begin{cases} e^{-\mathcal{R}\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\}} & \text{if } \mathcal{R}\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\} > 0 \\ 1 & \text{if } \mathcal{R}\{S_E[\phi_j] - S_E[\phi_i]\} \leq 0 \end{cases}$$

Αυτό ικανοποιεί την συνθήκη λεπτομερούς ισορροπίας.

Έτσι κατασκευάζουμε την Μαρκοβιανή Αλυσίδα

$$\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_i \rightarrow \dots \rightarrow \phi_M$$

Προφανώς υπάρχει **συσχέτιση** ανάμεσα σε διαδοχικές καταστάσεις.

Χρειάζεται να περάσουν κάποια βήματα μέχρι να έχουμε ασυσχέτιστο δείγμα.

- 1 Κίνητρο
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσήμου
- 2 Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 Περίληψη & Συμπεράσματα

## Παρατηρήσιμες Ποσότητες:

Μέσο πλάτος πεδίου στο τετράγωνο

$$\langle |\phi|^2 \rangle = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \ln Z}{\partial m^2} = \left\langle \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} (\phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}}) \right\rangle$$

Μέση πυκνότητα σωματιδίων

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = \left\langle \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} \left( \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}}^* e^{\mu} \phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}}^* e^{-\mu} \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}} \right) \right\rangle$$

## Phase quenched model

$$\langle |\phi|^2 \rangle_{pq} = \left\langle \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} (\phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}}) \right\rangle_{pq}$$

$$\langle n \rangle_{pq} = \left\langle \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} \left( \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}}^* e^{\mu} \phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}}^* e^{-\mu} \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}} \right) \right\rangle_{pq}$$

## Παρατηρήσιμες Ποσότητες:

Μέσο πλάτος πεδίου στο τετράγωνο

$$\langle |\phi|^2 \rangle = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \ln Z}{\partial m^2} = \left\langle \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} (\phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}}) \right\rangle$$

Μέση πυκνότητα σωματιδίων

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = \left\langle \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} \left( \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}}^* e^{\mu} \phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}}^* e^{-\mu} \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}} \right) \right\rangle$$

## Phase quenched model

$$\langle |\phi|^2 \rangle_{pq} = \left\langle \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} (\phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}}) \right\rangle_{pq}$$

$$\langle n \rangle_{pq} = \left\langle \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} \left( \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}}^* e^{\mu} \phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}}^* e^{-\mu} \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}} \right) \right\rangle_{pq}$$

1

## Κίνητρο

- QCD
- Το πρόβλημα του Προσήμου

2

## Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.

- Στατιστική για κβαντικά συστήματα
- Δυναμική του Πεδίου
- Ολοκλήρωμα διαδρομής
- Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
- Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα

3

## Αριθμητικές Προσομοιώσεις

- Δειγματοληψία
- Re-weighting
- Markov Chain Monte Carlo
- Metropolis
- Παρατηρήσιμες Ποσότητες
- **Περίοδος Θέρμανσης**
- Αυτοσυσχετίσεις
- Αποτελέσματα προσομοίωσης
  - Phase Quenched Model
  - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου

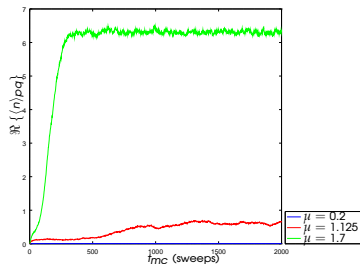
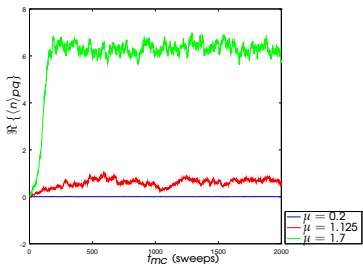
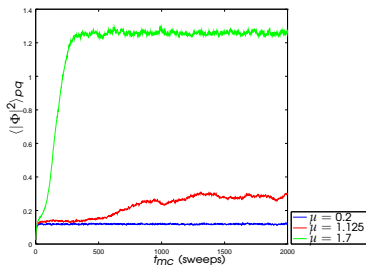
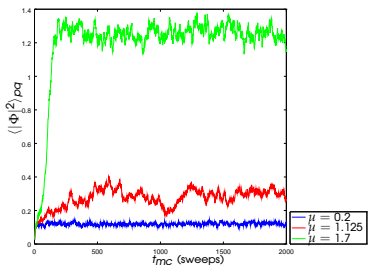
4

## Περίληψη & Συμπεράσματα

Απαιτείται μια περίοδος θέρμανσης για το σύστημα να έρθει σε ισορροπία.

$$L = 4, m = \lambda = 1$$

$$L = 8, m = \lambda = 1$$





- 1 Κίνητρο
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσήμου
- 2 Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - **Αυτοσυσχετίσεις**
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου
- 4 Περίληψη & Συμπεράσματα

## Αυτοσυσχετίσεις

- Διαδοχικές καταστάσεις διαφέρουν μόνο σε μία πλεγματική θέση.
- Στην καλύτερη περίπτωση ασυσχέτιστη κατάσταση μετά από  $N_{lat}$  καταστάσεις (1 Metropolis sweep).

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

$$\rho_{\mathcal{O}}(t) = \frac{\langle (\mathcal{O}(t') - \langle \mathcal{O} \rangle) (\mathcal{O}(t' + t) - \langle \mathcal{O} \rangle) \rangle_{t'}}{\langle (\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle)^2 \rangle}, \quad t' < t_{max} - t$$

- Μειώνεται εκθετικά  $\rho_{\mathcal{O}}(t) \sim e^{-t/\tau_{\mathcal{O}}}$
- Χρόνος αυτοσυσχέτισης  $\tau_{\mathcal{O}}$
- Πρακτικά έχουμε  $n_{\mathcal{O}} = \frac{t_{max}}{2\tau_{\mathcal{O}}}$  ανεξάρτητες μετρήσεις
- Σφάλματα  $(\delta\mathcal{O})^2 \approx \frac{1}{n_{\mathcal{O}} - 1} (\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2)$

## Αυτοσυσχετίσεις

- Διαδοχικές καταστάσεις διαφέρουν μόνο σε μία πλεγματική θέση.
- Στην καλύτερη περίπτωση ασυσχέτιστη κατάσταση μετά από  $N_{lat}$  καταστάσεις (1 Metropolis sweep).

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

$$\rho_{\mathcal{O}}(t) = \frac{\langle (\mathcal{O}(t') - \langle \mathcal{O} \rangle) (\mathcal{O}(t' + t) - \langle \mathcal{O} \rangle) \rangle_{t'}}{\langle (\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle)^2 \rangle}, \quad t' < t_{max} - t$$

- Μειώνεται εκθετικά  $\rho_{\mathcal{O}}(t) \sim e^{-t/\tau_{\mathcal{O}}}$
- Χρόνος αυτοσυσχέτισης  $\tau_{\mathcal{O}}$
- Πρακτικά έχουμε  $n_{\mathcal{O}} = \frac{t_{max}}{2\tau_{\mathcal{O}}}$  ανεξάρτητες μετρήσεις
- Σφάλματα  $(\delta\mathcal{O})^2 \approx \frac{1}{n_{\mathcal{O}}-1} (\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2)$

## Αυτοσυσχετίσεις

- Διαδοχικές καταστάσεις διαφέρουν μόνο σε μία πλεγματική θέση.
- Στην καλύτερη περίπτωση ασυσχέτιστη κατάσταση μετά από  $N_{lat}$  καταστάσεις (1 Metropolis sweep).

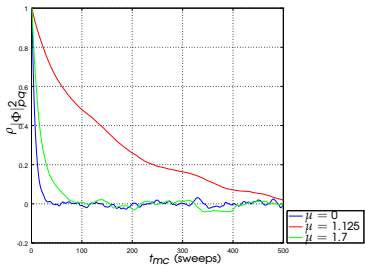
- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

$$\rho_{\mathcal{O}}(t) = \frac{\langle (\mathcal{O}(t') - \langle \mathcal{O} \rangle) (\mathcal{O}(t' + t) - \langle \mathcal{O} \rangle) \rangle_{t'}}{\langle (\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle)^2 \rangle}, \quad t' < t_{max} - t$$

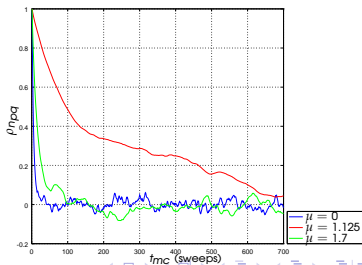
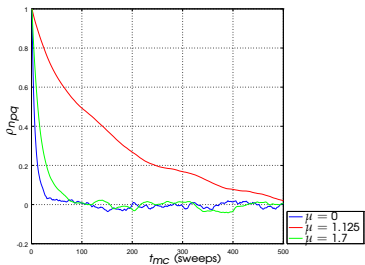
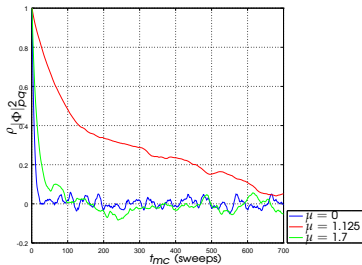
- Μειώνεται εκθετικά  $\rho_{\mathcal{O}}(t) \sim e^{-t/\tau_{\mathcal{O}}}$
- Χρόνος αυτοσυσχέτισης  $\tau_{\mathcal{O}}$
- Πρακτικά έχουμε  $n_{\mathcal{O}} = \frac{t_{max}}{2\tau_{\mathcal{O}}}$  ανεξάρτητες μετρήσεις
- Σφάλματα  $(\delta\mathcal{O})^2 \approx \frac{1}{n_{\mathcal{O}} - 1} (\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2)$

# Συναρτήσεις Αυτοσυσχετίσης $\rho_{|\Phi\rangle_{pq}}^2(t)$

$$L = 4, m = \lambda = 1$$



$$L = 8, m = \lambda = 1$$



- 1 Κίνητρο
  - QCD
  - Το πρόβλημα του Προσήμου
- 2 Δοκιμαστικό μοντέλο: Σχετικιστικό αέριο Bose.
  - Στατιστική για κβαντικά συστήματα
  - Δυναμική του Πεδίου
  - Ολοκλήρωμα διαδρομής
  - Ευκλείδεια Δράση για το Αέριο Bose
  - Διακριτοποίηση της Δράσης στο Πλέγμα
- 3 Αριθμητικές Προσομοιώσεις
  - Δειγματοληψία
  - Re-weighting
  - Markov Chain Monte Carlo
  - Metropolis
  - Παρατηρήσιμες Ποσότητες
  - Περίοδος Θέρμανσης
  - Αυτοσυσχετίσεις
  - Αποτελέσματα προσομοίωσης
    - Phase Quenched Model
    - Ανακατασκευή Πλήρους Μοντέλου

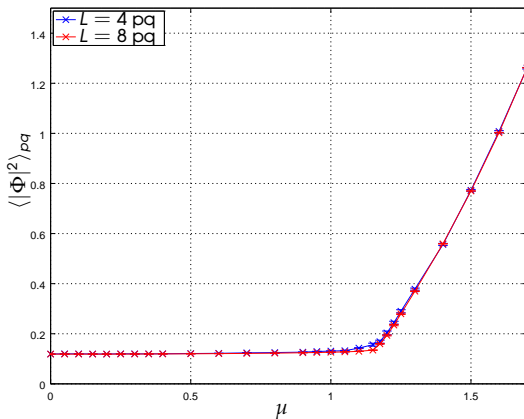
- 4 Περίληψη & Συμπεράσματα

# Χαρακτηριστικά προσομοίωσης

- Μάζα πεδίου:  $m = 1$
- Σταθερά αλληλεπίδρασης  $\lambda = 1$
- $L = 4$  και  $L = 8$
- Χρόνος προσομοίωσης  $t_{mc} = 10K$  sweeps.
- $0 \leq \mu \leq 1.7$

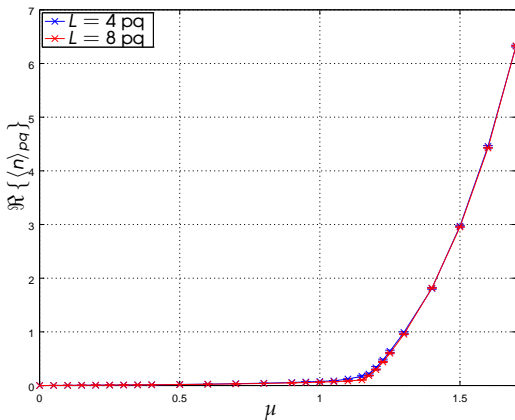
Αποτελέσματα προσομοίωσης για το Phase Quenched Model.

Μέσο πλάτος πεδίου στο τετράγωνο:  $\langle |\Phi|^2 \rangle_{pq}$



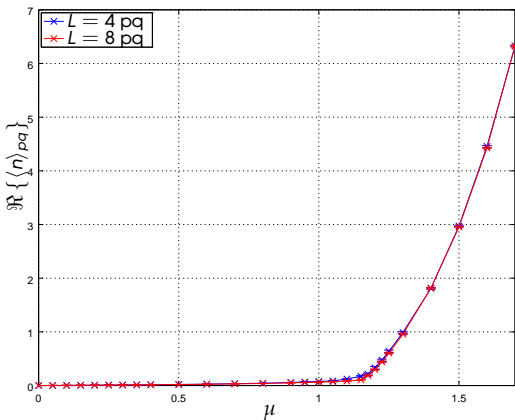


Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\Re \{ \langle n \rangle_{pq} \}$



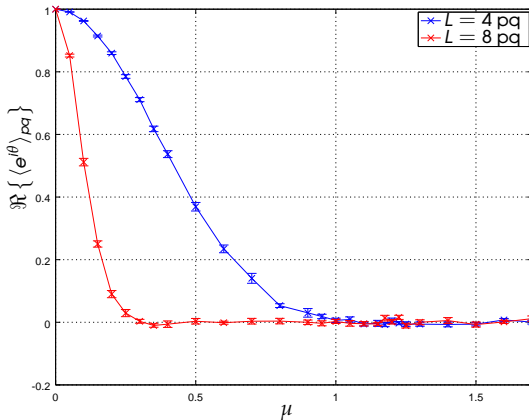
- Πέρασμα από χαμηλή πυκνότητα σε υψηλή πυκνότητα στην περιοχή  $\mu_{critical} \approx 1.15$

Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\Re \{ \langle n \rangle_{pq} \}$



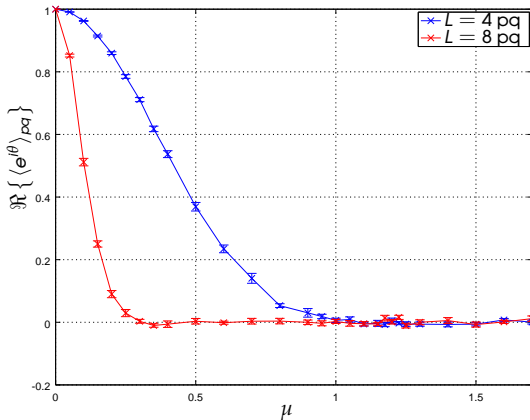
- Πέρασμα από χαμηλή πυκνότητα σε υψηλή πυκνότητα στην περιοχή  $\mu_{critical} \approx 1.15$

Μέσος παράγοντας φάσης (πραγματικό μέρος):  $\Re \{ \langle e^{i\theta} \rangle_{pq} \}$



- Μεγαλύτερος όγκος πλέγματος  $L^4 \rightarrow$  εκθετική μείωση

Μέσος παράγοντας φάσης (πραγματικό μέρος):  $\Re \{ \langle e^{i\theta} \rangle_{pq} \}$



- Μεγαλύτερος όγκος πλέγματος  $L^4 \rightarrow$  εκθετική μείωση

# Ανακατασκευή Πλήρους Θεωρίας

Μέσο πλάτος πεδίου στο τετράγωνο:

$$\langle |\phi|^2 \rangle_{full} = \frac{\langle |\phi|^2 e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} = \frac{\left\langle \left[ \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} (\phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}}) \right] e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \right\rangle_{pq}}{\langle e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \rangle_{pq}}$$

Μέση πυκνότητα σωματιδίων:

$$\langle n \rangle_{full} = \frac{\langle n e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} = \frac{\left\langle \left[ \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} \left( \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}}^* e^{i\mu} \phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}}^* e^{-i\mu} \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}} \right) \right] e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \right\rangle_{pq}}{\langle e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \rangle_{pq}}$$

Όσο το  $\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}$  γίνεται μικρότερο  $\rightarrow$  Πρόβλημα επικάλυψης.

Αν  $\mathcal{O}$  και  $e^{i\theta}$  ασυσχέιστα, τότε

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{full} = \frac{\langle \mathcal{O} e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} \rightarrow \frac{\langle \mathcal{O} \rangle_{pq} \cdot \cancel{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}}}{\cancel{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}}} \approx \langle \mathcal{O} \rangle_{pq}$$

# Ανακατασκευή Πλήρους Θεωρίας

Μέσο πλάτος πεδίου στο τετράγωνο:

$$\langle |\phi|^2 \rangle_{full} = \frac{\langle |\phi|^2 e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} = \frac{\left\langle \left[ \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} (\phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}}) \right] e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \right\rangle_{pq}}{\langle e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \rangle_{pq}}$$

Μέση πυκνότητα σωματιδίων:

$$\langle n \rangle_{full} = \frac{\langle n e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} = \frac{\left\langle \left[ \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} \left( \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}}^* e^{i\mu} \phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}}^* e^{-i\mu} \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}} \right) \right] e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \right\rangle_{pq}}{\langle e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \rangle_{pq}}$$

Όσο το  $\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}$  γίνεται μικρότερο  $\rightarrow$  Πρόβλημα επικάλυψης.

Αν  $\mathcal{O}$  και  $e^{i\theta}$  ασυσχέιστα, τότε

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{full} = \frac{\langle \mathcal{O} e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} \rightarrow \frac{\langle \mathcal{O} \rangle_{pq} \cdot \cancel{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}}}{\cancel{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}}} \approx \langle \mathcal{O} \rangle_{pq}$$

# Ανακατασκευή Πλήρους Θεωρίας

Μέσο πλάτος πεδίου στο τετράγωνο:

$$\langle |\phi|^2 \rangle_{full} = \frac{\langle |\phi|^2 e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} = \frac{\left\langle \left[ \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} (\phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}}) \right] e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \right\rangle_{pq}}{\langle e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \rangle_{pq}}$$

Μέση πυκνότητα σωματιδίων:

$$\langle n \rangle_{full} = \frac{\langle n e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} = \frac{\left\langle \left[ \frac{1}{N_{lat}} \sum_{\mathbf{x}} \left( \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}}^* e^{i\mu} \phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}}^* e^{-i\mu} \phi_{\mathbf{x}+\hat{4}} \right) \right] e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \right\rangle_{pq}}{\langle e^{-i\Im\{S_E[\phi]\}} \rangle_{pq}}$$

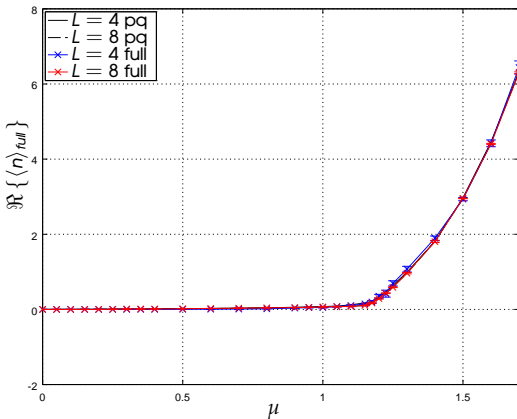
Όσο το  $\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}$  γίνεται μικρότερο  $\rightarrow$  Πρόβλημα επικάλυψης.

Αν  $\mathcal{O}$  και  $e^{i\theta}$  ασυσχέιστα, τότε

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{full} = \frac{\langle \mathcal{O} e^{i\theta} \rangle_{pq}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}} \rightarrow \frac{\langle \mathcal{O} \rangle_{pq} \cdot \cancel{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}}}{\cancel{\langle e^{i\theta} \rangle_{pq}}} \approx \langle \mathcal{O} \rangle_{pq}$$

Προσομοίωση για χρόνο  $t_{mc} = 10K$  Metropolis sweeps, σε 10 bins.

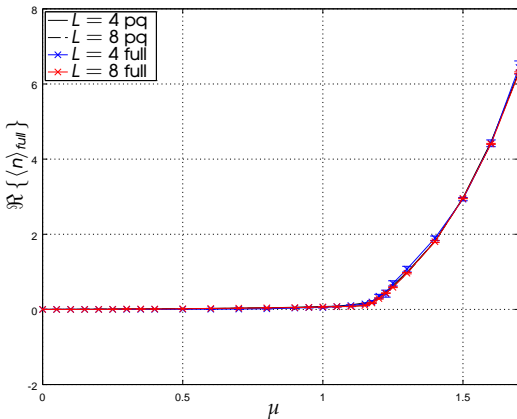
Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\Re \{ \langle n \rangle_{full} \}$



- Πιθανή μετάβαση φάσης για  $\mu_{critical} \approx 1.15$  στο θερμοδυναμικό όριο.



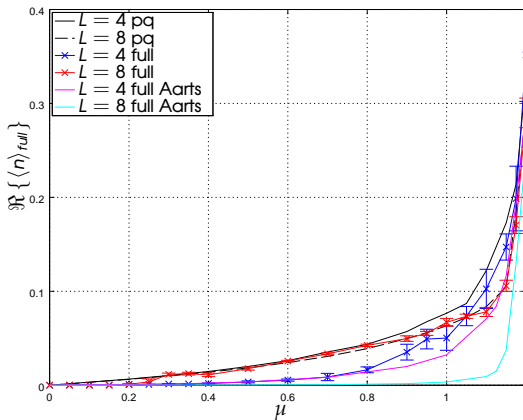
Προσομοίωση για χρόνο  $t_{mc} = 10K$  Metropolis sweeps, σε 10 bins.  
Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\Re \{ \langle n \rangle_{full} \}$



- Πιθανή μετάβαση φάσης για  $\mu_{critical} \approx 1.15$  στο θερμοδυναμικό όριο.

Προσομοίωση για χρόνο  $t_{mc} = 10K$  Metropolis sweeps, σε 10 bins.

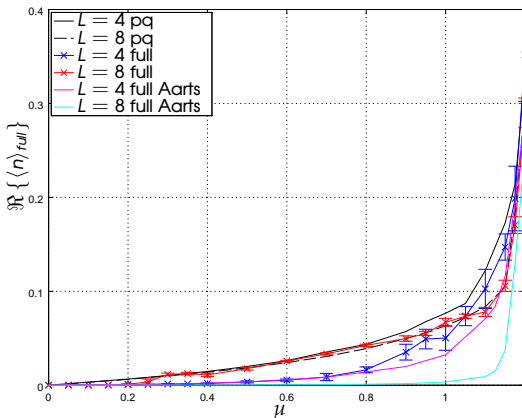
Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\Re \{ \langle n \rangle_{full} \}$



- $n$  και  $e^{\theta}$  συσχετισμένα  $\rightarrow$  Silver Blaze region με  $\langle O \rangle_{full} \neq \langle O \rangle_{pq}$
- Μεγαλύτερος όγκος πλέγματος  $L^4 \rightarrow$  Μεγαλύτερο πρόβλημα  
Επικάλυψης

Προσομοίωση για χρόνο  $t_{mc} = 10K$  Metropolis sweeps, σε 10 bins.

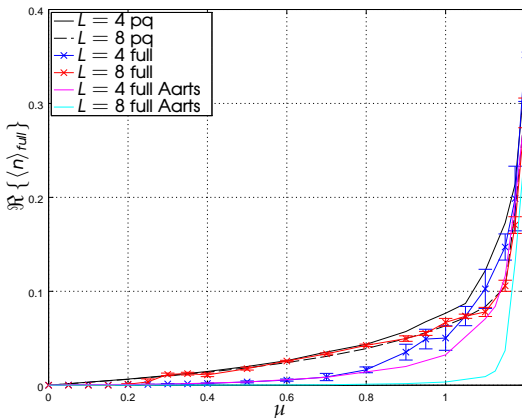
Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\Re \{ \langle n \rangle_{full} \}$



- $n$  και  $e^{i\theta}$  συσχετισμένα  $\rightarrow$  Silver Blaze region με  $\langle \mathcal{O} \rangle_{full} \neq \langle \mathcal{O} \rangle_{pq}$
- Μεγαλύτερος όγκος πλέγματος  $L^4 \rightarrow$  Μεγαλύτερο πρόβλημα  
Επικάλυψης

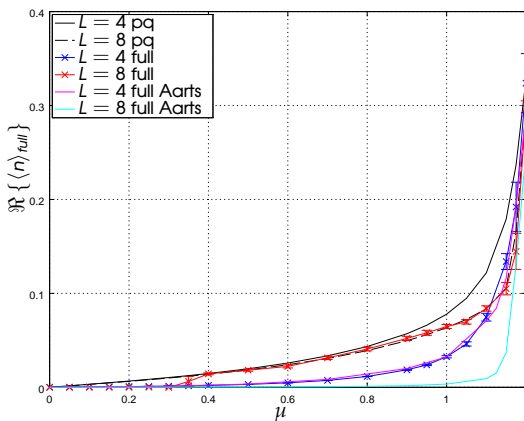
Προσομοίωση για χρόνο  $t_{mc} = 10K$  Metropolis sweeps, σε 10 bins.

Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\Re \{ \langle n \rangle_{full} \}$



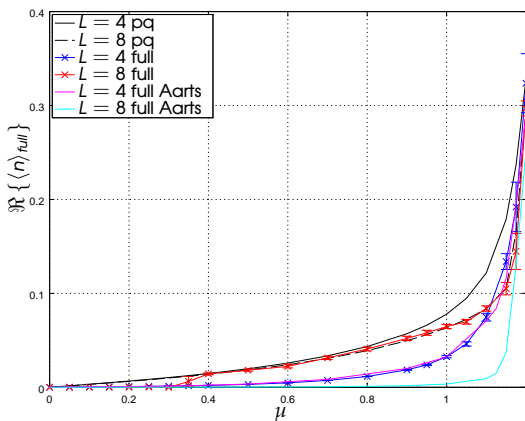
- $n$  και  $e^{i\theta}$  συσχετισμένα  $\rightarrow$  Silver Blaze region με  $\langle \mathcal{O} \rangle_{full} \neq \langle \mathcal{O} \rangle_{pq}$
- Μεγαλύτερος όγκος πλέγματος  $L^4 \rightarrow$  Μεγαλύτερο πρόβλημα  
Επικάλυψης

Εκτεταμένη προσομοίωση για χρόνο  $t_{mc} = 20M$  Metropolis sweeps, σε 10 bins.  
 Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\mathcal{R} \{ \langle n \rangle_{full} \}$



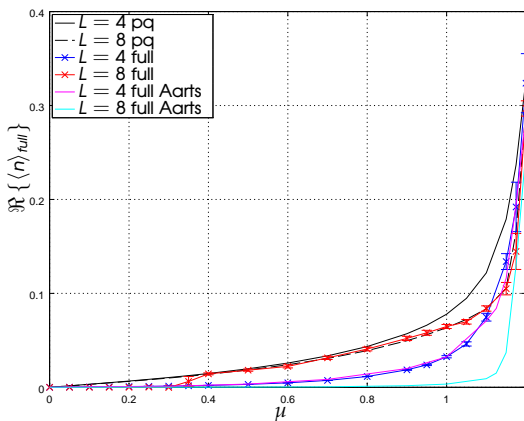
- Μεγαλύτερο στατιστικό δείγμα  $\rightarrow$  Ευρύτερη Silver Blaze περιοχή
- Για  $L = 8 \rightarrow$  Χρειαζόμαστε πολύ μεγαλύτερο στατιστικό δείγμα.

Εκτεταμένη προσομοίωση για χρόνο  $t_{mc} = 20M$  Metropolis sweeps, σε 10 bins.  
 Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\mathcal{R} \{ \langle n \rangle_{full} \}$



- Μεγαλύτερο στατιστικό δείγμα → Ευρύτερη Silver Blaze περιοχή
- Για  $L = 8$  → Χρειαζόμαστε πολύ μεγαλύτερο στατιστικό δείγμα.

Εκτεταμένη προσομοίωση για χρόνο  $t_{mc} = 20M$  Metropolis sweeps, σε 10 bins.  
 Μέση πυκνότητα σωματιδίων:  $\mathcal{R} \{ \langle n \rangle_{full} \}$



- Μεγαλύτερο στατιστικό δείγμα  $\rightarrow$  Ευρύτερη Silver Blaze περιοχή
- Για  $L = 8 \rightarrow$  Χρειαζόμαστε πολύ μεγαλύτερο στατιστικό δείγμα.

- Δείξαμε ότι το Σχετικιστικό Αέριο Bose σε Χημικό Δυναμικό είναι κατάλληλο για την μελέτη του προβλήματος της Μιγαδικής Δράσης.
- Χρησιμοποιήσαμε αλγόριθμους MCMC - Metropolis και την διαδικασία Reweighting για την μελέτη του PQ Model.
- Υπήρξε καλή συμφωνία με άλλες μεθόδους για το PQ Model.
- Επιχειρήσαμε την ανακατασκευή του Πλήρους Μοντέλου.
- Παρατηρήσαμε το φαινόμενο Silver Blaze, στην περιοχή υπο-κρίσιμου χημικού δυναμικού.
- Καταλήξαμε ότι το Reweighting απαιτεί πολύ μεγάλο στατιστικό δείγμα για να προσεγγίσουμε τα αποτελέσματα για μεγάλους όγκους πλέγματος.



- Δείξαμε ότι το Σχετικιστικό Αέριο Bose σε Χημικό Δυναμικό είναι κατάλληλο για την μελέτη του προβλήματος της Μιγαδικής Δράσης.
- Χρησιμοποιήσαμε αλγόριθμους MCMC - Metropolis και την διαδικασία Reweighting για την μελέτη του PQ Model.
- Υπήρξε καλή συμφωνία με άλλες μεθόδους για το PQ Model.
- Επιχειρήσαμε την ανακατασκευή του Πλήρους Μοντέλου.
- Παρατηρήσαμε το φαινόμενο Silver Blaze, στην περιοχή υπο-κρίσιμου χημικού δυναμικού.
- Καταλήξαμε ότι το Reweighting απαιτεί πολύ μεγάλο στατιστικό δείγμα για να προσεγγίσουμε τα αποτελέσματα για μεγάλους όγκους πλέγματος.

- Δείξαμε ότι το Σχετικιστικό Αέριο Bose σε Χημικό Δυναμικό είναι κατάλληλο για την μελέτη του προβλήματος της Μιγαδικής Δράσης.
- Χρησιμοποιήσαμε αλγόριθμους MCMC - Metropolis και την διαδικασία Reweighting για την μελέτη του PQ Model.
- Υπήρξε καλή συμφωνία με άλλες μεθόδους για το PQ Model.
- Επιχειρήσαμε την ανακατασκευή του Πλήρους Μοντέλου.
- Παρατηρήσαμε το φαινόμενο Silver Blaze, στην περιοχή υπο-κρίσιμου χημικού δυναμικού.
- Καταλήξαμε ότι το Reweighting απαιτεί πολύ μεγάλο στατιστικό δείγμα για να προσεγγίσουμε τα αποτελέσματα για μεγάλους όγκους πλέγματος.

- Δείξαμε ότι το Σχετικιστικό Αέριο Bose σε Χημικό Δυναμικό είναι κατάλληλο για την μελέτη του προβλήματος της Μιγαδικής Δράσης.
- Χρησιμοποιήσαμε αλγόριθμους MCMC - Metropolis και την διαδικασία Reweighting για την μελέτη του PQ Model.
- Υπήρξε καλή συμφωνία με άλλες μεθόδους για το PQ Model.
- Επιχειρήσαμε την ανακατασκευή του Πλήρους Μοντέλου.
- Παρατηρήσαμε το φαινόμενο Silver Blaze, στην περιοχή υπο-κρίσιμου χημικού δυναμικού.
- Καταλήξαμε ότι το Reweighting απαιτεί πολύ μεγάλο στατιστικό δείγμα για να προσεγγίσουμε τα αποτελέσματα για μεγάλους όγκους πλέγματος.

- Δείξαμε ότι το Σχετικιστικό Αέριο Bose σε Χημικό Δυναμικό είναι κατάλληλο για την μελέτη του προβλήματος της Μιγαδικής Δράσης.
- Χρησιμοποιήσαμε αλγόριθμους MCMC - Metropolis και την διαδικασία Reweighting για την μελέτη του PQ Model.
- Υπήρξε καλή συμφωνία με άλλες μεθόδους για το PQ Model.
- Επιχειρήσαμε την ανακατασκευή του Πλήρους Μοντέλου.
- Παρατηρήσαμε το φαινόμενο Silver Blaze, στην περιοχή υπο-κρίσιμου χημικού δυναμικού.
- Καταλήξαμε ότι το Reweighting απαιτεί πολύ μεγάλο στατιστικό δείγμα για να προσεγγίσουμε τα αποτελέσματα για μεγάλους όγκους πλέγματος.

- Δείξαμε ότι το Σχετικιστικό Αέριο Bose σε Χημικό Δυναμικό είναι κατάλληλο για την μελέτη του προβλήματος της Μιγαδικής Δράσης.
- Χρησιμοποιήσαμε αλγόριθμους MCMC - Metropolis και την διαδικασία Reweighting για την μελέτη του PQ Model.
- Υπήρξε καλή συμφωνία με άλλες μεθόδους για το PQ Model.
- Επιχειρήσαμε την ανακατασκευή του Πλήρους Μοντέλου.
- Παρατηρήσαμε το φαινόμενο Silver Blaze, στην περιοχή υπο-κρίσιμου χημικού δυναμικού.
- Καταλήξαμε ότι το Reweighting απαιτεί πολύ μεγάλο στατιστικό δείγμα για να προσεγγίσουμε τα αποτελέσματα για μεγάλους όγκους πλέγματος.

# Επιλεγμένες δημοσιεύσεις I



Gert Aarts.

Can stochastic quantization evade the sign problem? the relativistic bose gas at finite chemical potential.

*Phys. Rev. Lett.*, 102:131601, 2009.



Gert Aarts.

Developments in lattice quantum chromodynamics for matter at high temperature and density.

*Pramana*, 84(5):787–799, 2015.



Gert Aarts.

Introductory lectures on lattice qcd at nonzero baryon number.  
2015.



Anthony J. G Aitchison, Ian J. R.; Hey.

*Gauge Theories in Particle Physics : From Relativistic Quantum Mechanics to QED, Fourth Edition.*

CRC Press, 4th ed edition, 2012.

## Επιλεγμένες δημοσιεύσεις II



Konstantinos N Anagnostopoulos.

*Computational Physics, Vol I: A Practical Introduction to Computational Physics and Scientific Computing*, volume 1.

Konstantinos Anagnostopoulos, 2014.



Philippe de Forcrand.

Simulating qcd at finite density.

*PoS, LAT2009:010*, 2009.



Christof Gattringer and Thomas Kloiber.

Lattice study of the silver blaze phenomenon for a charged scalar  $\phi^4$  field.

*Nucl. Phys.*, B869:56–73, 2013.



Joseph I. Kapusta and Charles Gale.

*Finite-Temperature Field Theory*.

Cambridge University Press, second edition, 2006.

Cambridge Books Online.