

ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΤΖΩΡΤΖΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής: ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ Κ.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ-ΣΕΜΦΕ

26 Σεπτεμβρίου 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
- ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΤΟ ΚΕΝΟ
- ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΠΗΓΕΣ
- ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

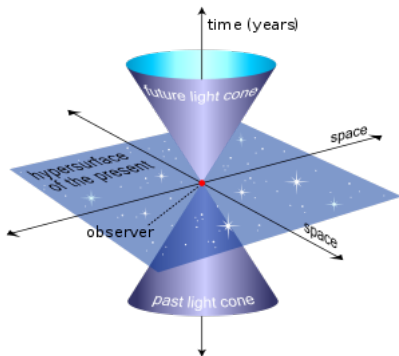
Ειδική θεωρία σχετικότητας

- $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

- $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \alpha^\mu$

- $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu$



Χωροχρόνος

- Ο χωροχρόνος περιγράφεται ως μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα (τοπικά επίπεδος)

- $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$

- Συναλλοίωτη παράγωγος: $\nabla_\alpha u^\beta = \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\gamma$

- Συντεταγμένες

Riemann: $g'_{\alpha\beta}(x^P) = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

$\left(\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^\gamma}\right)_{x=x^P} = 0$

- Ελεύθερα σωματίδια:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \implies \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

- Δύο γραμμές που ξεκινούν παράλληλες δεν θα παραμείνουν παράλληλες σε καμπυλωμένο χωροχρόνο. Θέλουμε ένα μέτρο που να μας ποσοτικοποιεί αυτή την απόκλιση:

$$\alpha^\mu = \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma$$

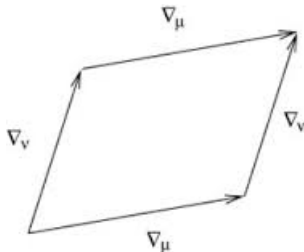
Τανυστής Riemann

- Παράλληλη μετατόπιση:

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0$$

- Ο τανυστής Riemann μας δείχνει κατά πόσο αποτυγχάνει να γυρίσει ένα διάνυσμα στον εαυτό του κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma$$



Εξισώσεις Einstein

- $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$

- 10 εξισώσεις για τον τανυστή μετρικής

- Μη γραμμικές

- Τανυστής ενέργειας-ορμής:

T_{00} : ενεργειακή πυκνότητα

T_{0i} : ροή ενέργειας

T_{i0} : πυκνότητα ορμής

T_{ij} : τανυστής τάσης

Γραμμικοποιημένη βαρύτητα

- Θεωρούμε το πεδίο ασθενές

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

- Αγνοούμε όρους δεύτερης τάξης
- Τανυστής Einstein για γραμμικοποιημένη βαρυτητα:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h)$$

- Όπου έχουμε ορίσει το ίχνος της διαταραχής $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\mu{}_\mu$ και τη D' Alembertian $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

- Αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz

Μετασχηματισμοί βαθμίδας

- $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ σχεδόν Lorentz
- Ψάχνουμε ισοδύναμες φυσικές καταστάσεις
- Εκτελούμε μετασχηματισμούς της μορφής: $x^\mu \rightarrow x^\mu - \xi^\mu$
- $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$
- $\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

Αποσύνθεση διαταραχής

- $h_{00} = -2\Phi$

$$h_{0i} = w_i$$

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij}$$

- $\Psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}$

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij})$$

$$\Phi \rightarrow \Phi + \partial_0\xi^0$$

$$w_i \rightarrow w_i + \partial_0\xi^i - \partial_i\xi^0$$

$$\Psi \rightarrow \Psi - \frac{1}{3}\partial_i\xi^i$$

$$s_{ij} \rightarrow s_{ij} + \partial_{(i}\xi_{j)} - \frac{1}{3}\partial_k\xi^k\delta_{ij}$$

- Εγκάρσια βαθμίδα: $\partial_i s^{ij} = 0$, $\partial_i w^i = 0$

- $G_{00} = 2\nabla^2 \Psi = 8\pi G T_{00}$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2}\nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \Psi = 8\pi G T_{0j}$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i \partial_j)(\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2 \Psi - \square s_{ij} = 8\pi G T_{ij}$$

Εξισώσεις στο κενό

- 00 συνιστώσα: $\nabla^2 \Psi = 0 \implies \Psi = 0$
- 0j συνιστώσα: $\nabla^2 w_j = 0 \implies w_j = 0$
- Ίχνος της ij εξίσωσης: $\nabla^2 \Phi = 0 \implies \Phi = 0$
- ij συνιστώσα: $\square s_{ij} = 0$ κυματική εξίσωση!

- $$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

- $$h_{0\nu}^{TT} = 0$$

- $$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} = 0$$

- $$\partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} = 0$$

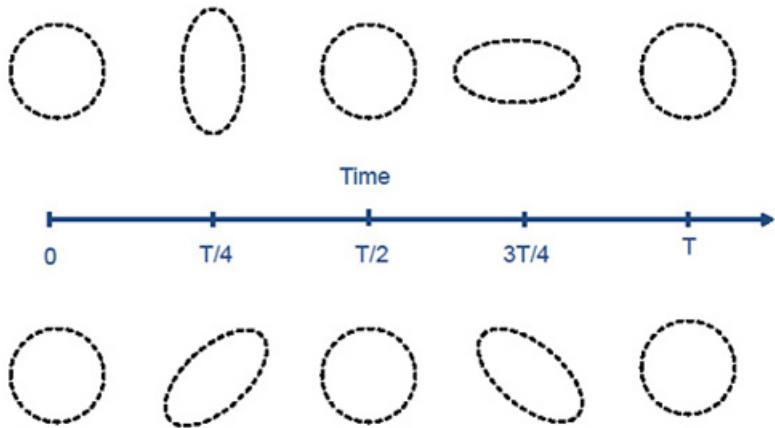
Λύση κυματικής εξίσωσης

- Εξίσωση: $\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \implies k_\sigma k^\sigma = 0$
- Λύση: $h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}$
- $C_{\mu\nu}$: $C_{0\nu} = 0$
 $\eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 0$
- $\partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} = 0 = iC^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} \implies k_\mu C^{\mu\nu} = 0$
- $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ (κατεύθυνση z)
- $k_\mu C^{\mu\nu} = 0, C_{0\nu} = 0 \implies C_{3\nu} = 0$
- $C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Επίδραση σε δοκιμαστικές μάζες

- $\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma$
- $R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT}$
- $h_+ = C_{11}$
 $h_x = C_{12}$
- $\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{TT\mu}{}_\sigma, h_x = 0$
- $S^1 = (1 + \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^1(0)$
 $S^2 = (1 - \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^2(0)$

Πολωση βαρυτικων κυματων



Παραγωγή κυμάτων από πηγές

- $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$ ($\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -h$)
- Lorenz gauge: $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$
- $\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}$
- $\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = 4G \int \frac{1}{|x-y|} T_{\mu\nu}(t - |x-y|, y) d^3y \rightarrow$ η διαταραχή στο σημείο (t, x) προέρχεται από την ενέργεια και την ορμή της πηγής στο σημείο $(t_r, |x-y|)$
- $\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r)$ (απομονωμένη, απομακρυσμένη, μη σχετικιστική πηγή, $R_{source} \ll \lambda$)
- $I_{ij} = \int y^i y^j T^{00}(t, y) d^3y$

Σύστημα διπλών αστέρων

- $\frac{GM^2}{(2R)^2} = \frac{Mu^2}{R}$
- $u = \left(\frac{GM}{4R}\right)^{1/2}$
- $T = \frac{2\pi R}{u}$
- $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{GM}{4R^3}\right)^{1/2}$
- $x_a^1 = R\cos\Omega t \quad x_b^1 = R\cos\Omega t$
 $x_a^2 = R\sin\Omega t \quad x_b^2 = R\sin\Omega t$
- $I_{11} = 2MR^2\cos^2\Omega t = MR^2(1 + \cos 2\Omega t)$
 $I_{22} = 2MR^2\sin^2\Omega t = MR^2(1 - \cos 2\Omega t)$
 $I_{12} = I_{21} = 2MR^2(\cos\Omega t)(\sin\Omega t) = MR^2\sin 2\Omega t$
 $I_{i3} = 0$
-

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{8GM}{r}\Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

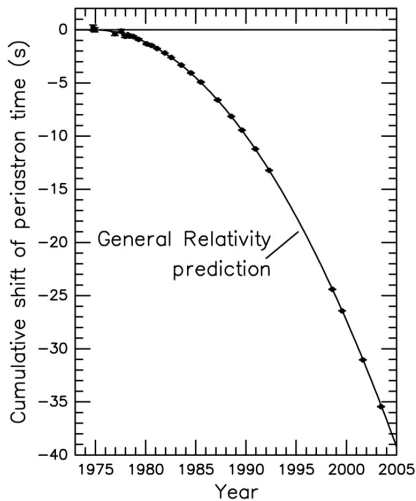
Τανυστής ενέργειας-ορμής βαρυτικών κυμάτων

- $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(2)}$
- $G_{\mu\nu}^{(1)}[\eta + h^{(2)}] + G_{\mu\nu}^{(2)}[\eta + h] = 0$
- $G_{\mu\nu}^{(1)}[\eta + h^{(2)}] = 8\pi G t_{\mu\nu}$
- $t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)}[\eta + h]$
- $E_{tot} = \int P dt$

Απώλεια ενέργειας

- $P = -\frac{G}{5} \left\langle \frac{d^3 J_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 J^{ij}}{dt^3} \right\rangle$
- $J_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} I_{kl}$
- Μη τοπικότητα
- Μη σφαιρική συμμετρία
- $P = \frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{R^5}$

Σύστημα διπλών αστέρων



Ερμηνεία τετραπολικής σχέσης

- $d(t) = qx(t)$ (διπολική ροπή μεμονωμένου σημειακού φορτίου)

- $P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$

- $P \propto (\ddot{d})^2$

- $d_g(t) = mx(t)$

- $\dot{d} = m\dot{x} = p$ (αρχή διατήρησης ορμής)

- supernovas
- Δυαδικό σύστημα λευκών νάνων
- Δυαδικό σύστημα μελανών οπών
- Συστήματα διπλών αστερων
- Pulsars

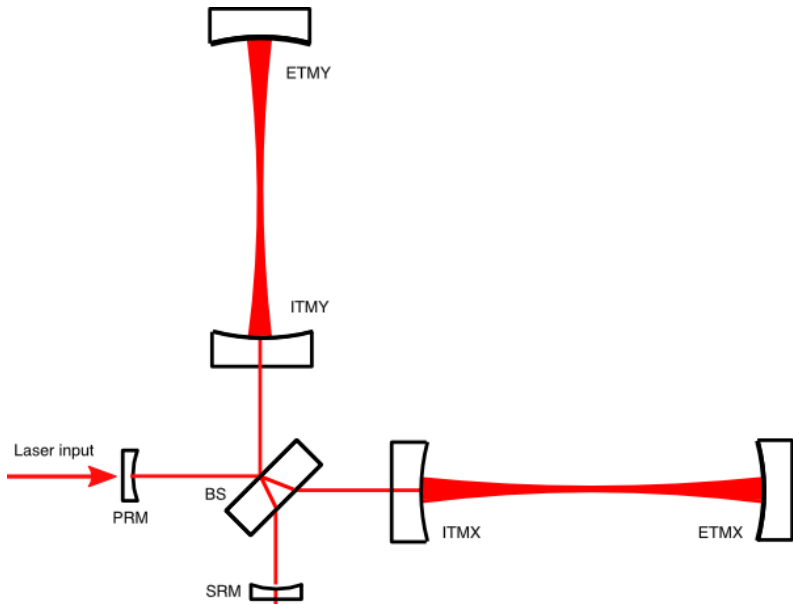
Εκτίμηση πλάτους

- $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{2GM}}{2R^{3/2}}$
- $f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{GM}}{4\pi} \sim \frac{\sqrt{GM}}{10R^{3/2}}$
- $\tilde{h}_{ij}(t, x) = \frac{8GM}{c^4 r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $h \sim \frac{4G^2 M^2}{c^2 r R} \sim \frac{R_S^2}{r R}$
- $R_S = \frac{2GM}{c^2} \sim 10^6 \text{ cm}$
 $R \sim 10^7 \text{ cm}$
 $r \sim 10^{26} \text{ cm}$
- $f \sim 10^2 \text{ s}^{-1}$
- $h \sim 10^{-21}$

Μέθοδοι ανίχνευσης

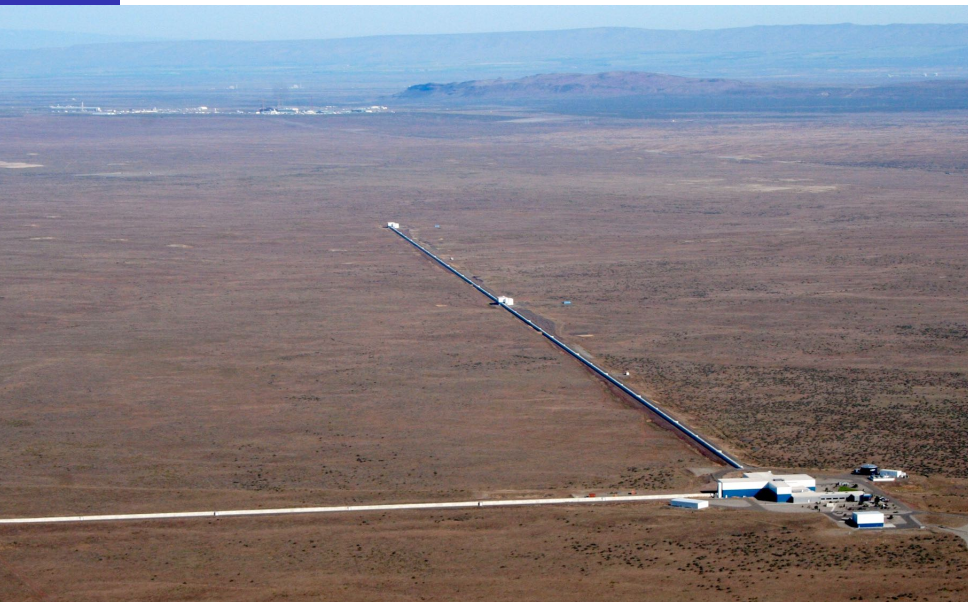
- Ανιχνευτές συντονισμού μάζας(κύλινδρος μήκους $3m, M=1000kg, \theta \text{όρυβοι} \implies T=100mK$)
- Συμβολομετρία
- Διαστημικές μέθοδοι

Συμβολομετρία



- Hanford, Livingston
- Δοκιμαστικές μάζες: κάτοπτρα
- Βραχίονες: 4km
- Βραχίονες $\rightarrow x, y$ διευθύνσεις \rightarrow θα διαστέλλονται και θα συστέλλονται σε διαφορετικές φάσεις
- διαχωριστής δέσμης: κέντρο ταλάντωσης $\implies \frac{\delta L_{(x)}}{L_{(x)}} \sim h$
- Κοιλότητες Fabry-Perot: $4\text{km} \implies 1120\text{km}$ (280 ανακλάσεις)
- Θόρυβοι: σεισμικές δονήσεις, αέρας
- Αντιμετώπιση: υψηλό κενό (10^{-9} torr), εκκρεμή, sensors
- Καταστρεπτική συμβολή

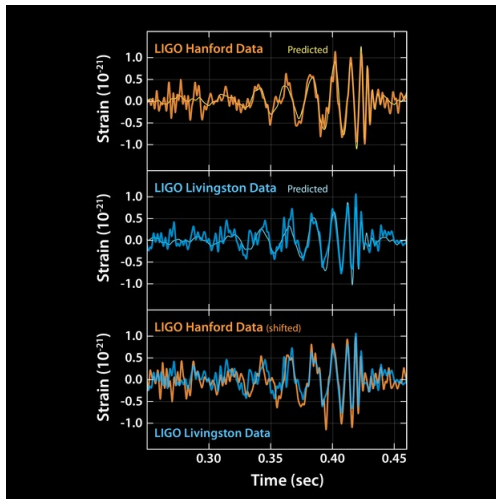
LIGO



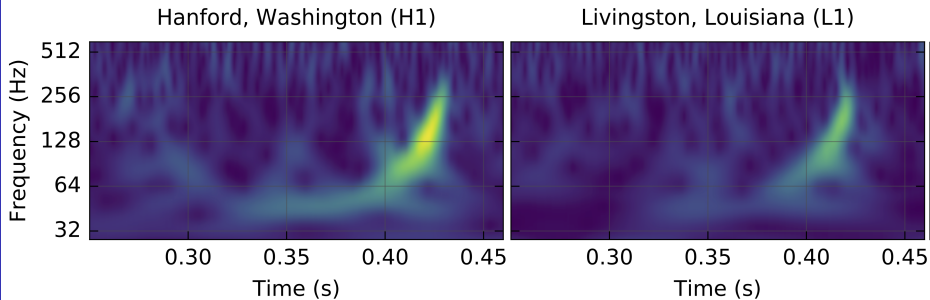
Ανίχνευση

- 14 Σεπτεμβρίου 2015
- Περιστρεφόμενες μελανές οπές
- 29 και 36 μάζες ήλιου
- 1.3 δισεκατομμύρια χρόνια πριν
- Απώλεια ενέργειας: 3 μάζες ήλιου

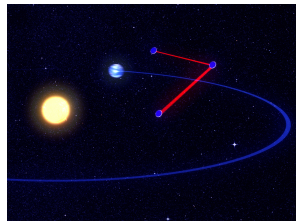
Ανίχνευση



Ανίχνευση



- Υψηλό κενό, μεγάλες αποστάσεις, μακριά από θορύβους της γης
- 3 διαστημόπλοια διατεταγμένα σε σχήμα τριγώνου (1 κύριο, 2 δευτερεύοντα)
- Αποστάσεις: $10^6 km$
- Προσαρμοσμένες ακτίνες



Βλέποντας στο μέλλον..

- Ανίχνευση και από άλλα πειράματα \implies καλύτερη χαρτογράφηση πηγών
- Πληροφόρηση όχι μόνο από ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία
- Σχηματισμός και εξέλιξη μελανών οπών
- Εξέλιξη γαλαξιών
- Big Bang
- Νέα κοσμολογικά φαινόμενα

Βλέποντας στο μέλλον..

