

Πλεγματική Θεωρία Βαθμίδας $SU(2)$ στις Τέσσερις Διαστάσεις

Συμεωνίδης Παντελής
Επιβλέπων καθηγητής: Αναγνωστόπουλος Κωνσταντίνος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Διπλωματική Εργασία, Ιούνιος 2022

Περίγραμμα

- 1 Ολοκλήρωμα Διαδρομής
- 2 Μεταβλητές συνδέσμων στα πεδία βαθμίδας
- 3 Θεωρία βαθμίδας σε πλέγμα
- 4 Προσομοίωση της θεωρίας βαθμίδας αριθμητικά
- 5 Ανάλυση δεδομένων

Δράση

Στην κλασική μηχανική για να περιγράψουμε ένα σύστημα χρησιμοποιούμε την **Λαγκρανζιανή**:

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (1)$$

Η **δράση** ενός τέτοιου συστήματος βάση της ελάχιστης διαδρομής περιγράφεται από την σχέση:

$$S = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2)$$

Για την **Κβαντομηχανική** περίπτωση έχουμε:

$$\Phi(a, b) = \sum_{\text{all paths from } a \text{ to } b} \text{const.} \cdot e^{iS[x(t)]/\hbar} \quad (3)$$

όπου κάθε διαδρομή συμβάλει βάση κάποιου συντελεστή βάρους.

Ευκλείδειο Ολοκλήρωμα διαδρομής

Ευκλείδειο ολοκλήρωμα διαδρομής είναι ένα ολοκλήρωμα διαδρομής που ο χρόνος έχει υποστεί μια στροφή στο μιγαδικό επίπεδο ($t = i\tau$).

Η στροφή γίνεται βάση του τελεστή $e^{-t\hat{H}/\hbar}$.

$$S[x, \dot{x}] = \int dt L(x(t), \dot{x}(t)) \quad (4)$$

αυτή η στροφή μας αλλάζει την μετρική Minkowski

$$ds^2 = -(dt^2) + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5)$$

Στην Ευκλείδεια μετρική

$$ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6)$$

και προκύπτει το ολοκλήρωμα διαδρομής:

$$\Psi(x, t) = N \int dx_i \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t)=x} Dx \exp(-S_{Euclidean}) \Psi(x_i, 0) \quad (7)$$

Ευκλείδειοι Συσχετιστές

Σαν Ευκλείδειο συσχετιστή ορίζουμε τον $\langle O_2(t)O_1(0) \rangle_T$.

$$\langle O_2(t)O_1(0) \rangle_T = \frac{1}{Z_T} \text{tr}[e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{O}_2 e^{-t\hat{H}} \hat{O}_1] \quad (8)$$

όπου ο συντελεστής κανονικοποίησης Z_T είναι:

$$Z_T = \text{tr}[e^{-T\hat{H}}] \quad (9)$$

Το t δηλώνει την πραγματική χρονική απόσταση που θέλουμε, ενώ το T είναι μια μέγιστη χρονική απόσταση που εν δυνάμει πηγαίνει στο άπειρο.

Κβάντωση με βάση το ολοκλήρωμα διαδρομής

Μια άλλη έκφραση των Ευκλείδειων συσχετιστών είναι:

$$\langle O_2(t)O_1(0) \rangle_T = \frac{1}{Z_T} \int D[\Phi] e^{-S_E[\Phi]} O_2[\Phi(., n_t)] O_1[\Phi(., 0)] \quad (10)$$

Η συνάρτηση επιμερισμού δίνεται από ένα ολοκλήρωμα διαδρομής

$$Z_T = \int D[\Phi] e^{-S_E[\Phi]} \quad (11)$$

και η μεταβλητή $D[\Phi]$ είναι το μέτρο ολοκλήρωσης.

$$D[\Phi] = \prod_{n \in \Lambda} d\Phi(n) \quad (12)$$

Κβάντωση με βάση το ολοκλήρωμα διαδρομής (2)

Καταλήγουμε στην σχέση

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle O_2(t) O_1(0) \rangle_T = \sum_n \langle 0 | \hat{O}_2 | n \rangle \langle n | \hat{O}_1 | 0 \rangle e^{-tE_n}, \quad (13)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί ένα άθροισμα από εκθετικά και κάθε εκθέτης αποτελεί ένα διαφορετικό ενεργειακό επίπεδο.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια ενός πρωτονίου p .

Στην θέση του \hat{O}_1 επιλέγουμε τον τελεστή \hat{O}_p^\dagger που δημιουργεί από το κενό μια κατάσταση με τους κβαντικούς αριθμούς του πρωτονίου και στην θέση του \hat{O}_2 που είναι ο συζυγής του, τον τελεστή \hat{O}_p .

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle O_p(t) O_p(t)^\dagger \rangle_T = |\langle p | \hat{O}_p(t)^\dagger | 0 \rangle|^2 e^{-tE_p} + |\langle p' | \hat{O}_p(t)^\dagger | 0 \rangle|^2 e^{-tE_{p'}} + \dots, \quad (14)$$

SU(N) ομάδες

Η κύρια αναπαράσταση της $SU(N)$ δίνεται από μιγαδικούς πίνακες $N \times N$ οι οποίοι

είναι μοναδιαίοι

έχουν ορίζουσα 1 ($\det[\Omega] = 1$)

Το γινόμενο δύο στοιχείων της ομάδας $SU(N)$ ανήκει και αυτό στην ομάδα $SU(N)$

$$\begin{aligned} (\Omega_1 \Omega_2)^\dagger &= \Omega_1^\dagger \Omega_2^\dagger = \Omega_1^{-1} \Omega_2^{-1} = (\Omega_1 \Omega_2)^{-1} \\ \det[\Omega_1 \Omega_2] &= \det[\Omega_1] \det[\Omega_2] = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Συνήθως αναπαριστούμε τους πίνακες της $SU(N)$ μέσω γεννητόρων:

$$\Omega = \exp \left(i \sum_{j=1}^{N^2-1} \omega^{(j)} T_j \right) \quad (16)$$

SU(2) ομάδες

Οι γεννήτορες $T_j, j = 1, 2, \dots, N^2 - 1$, θα πρέπει να υπακούουν την συνθήκη κανονικοποίησης

$$\text{tr}[T_j T_k] = \frac{1}{2} \delta_{jk} \quad (17)$$

Επιπλέον, ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$[T_j, T_k] = if_{jkl} T_l \quad (18)$$

Η βασική αναπαράσταση των γεννητόρων της $SU(2)$ δίνεται από την σχέση

$$T_j = \frac{1}{2} \sigma_j, \quad (19)$$

όπου σ_j είναι οι πίνακες του Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

SU(3) ομάδες

Για την SU(3) οι γεννήτορες δίνονται από την σχέση

$$T_j = \frac{1}{2} \lambda_j, \quad (21)$$

όπου λ_j είναι οι 3×3 πίνακες Gell-Mann :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Εισαγωγή των πεδίων βαθμίδας ως μεταβλητές συνδέσμων

Το πλέγμα ορίζεται μέσα σε ένα d -διάστατο Ευκλείδειο χώρο από σημεία που έχουν με συντεταγμένες:

$$x_\mu = n_\mu a, \quad (23)$$

όπου το διάνυσμα n_μ έχει συνιστώσες

$$n_\mu = n_1, n_2, \dots, n_d. \quad (24)$$

Για να υλοποιήσουμε μια τοπική στροφή στο πλέγμα εισάγουμε ένα στοιχείο $\Omega(n)$ που ανήκει στην ομάδα $SU(3)$

$$\psi(n) \rightarrow \psi'(n) = \Omega(n)\psi(n), \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}'(n) = \bar{\psi}(n)\Omega(n)^\dagger. \quad (25)$$

Η δράση σε πλέγμα δίνεται από τον τύπο

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right). \quad (26)$$

Εισαγωγή των πεδίων βαθμίδας ως μεταβλητές συνδέσμων(2)

Για να κάνουμε τη φερμιονική δράση αναλλοίωτη εισάγουμε τα βαθμωτά πεδία $U_\mu(n)$ σαν στοιχεία της ομάδας $SU(3)$

$$U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = \Omega(n)U_\mu(n)\Omega(n + \hat{\mu})^\dagger. \quad (27)$$

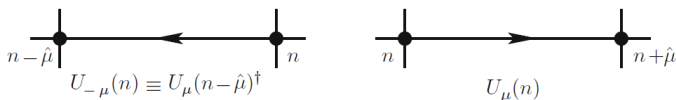
Το $U_\mu(n)$ βρίσκεται στο σύνδεσμο που συνδέει το σημείο-κόμβο n με το $n + \hat{\mu}$. Το αντίστροφο στοιχείο του $U_\mu(n)$ είναι το $U_{-\mu}(n)$

$$U_{-\mu}(n) \equiv U_\mu(n - \hat{\mu})^\dagger. \quad (28)$$

Το οποίο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$U_{-\mu}(n) \rightarrow U'_{-\mu}(n) = \Omega(n)U_{-\mu}(n)\Omega(n - \hat{\mu})^\dagger. \quad (29)$$

Περιγραφή δράσης με χρήση συνδέσμων μεταβλητών



Μπορούμε να επαναεκφράσουμε τη δράση των ελεύθερων φερμιονίων πάνω σε ένα βαθμωτό πεδίο U ως εξής:

$$S_F[\psi, \bar{\psi}, U] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \gamma_{\mu} \left(\frac{U_{\mu}(n) \psi(n + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(n) \psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m \psi(n) \right). \quad (30)$$

Κλειστός βρόχος

Έστω P μια τέτοια διαδρομή με k το πλήθος ενδιάμεσα σημεία που συνδέουν τον κόμβο n_0 με τον κόμβο n_1 :

$$P[U] = U_{\mu_0}(n_0)U_{\mu_1}(n_0 + \hat{\mu}) \dots U_{\mu_{k-1}}(n_1 - \hat{\mu}_{k-1}) \equiv \prod_{(n,\mu) \in P} U_{\mu}(n). \quad (31)$$

Από τις ιδιότητες των μετασχηματισμών προκύπτει:

$$P[U] \rightarrow P[U'] = \Omega(n_0)P[U]\Omega(n_1)^\dagger. \quad (32)$$

Αυτό όμως μας δημιουργεί πρόβλημα στην αναλλοιωτότητα επομένως ορίζουμε την κλειστή διαδρομή:

$$L[U] = \text{tr} \left[\prod_{(n,\mu) \in L} U_{\mu}(n) \right]. \quad (33)$$

Δράση βαθμίδας Wilson

Επιλέγουμε την μικρότερη κλειστή διαδρομή αυτή που λέμε πλακέτα $U_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu})U_{-\nu}(n + \hat{\nu}) \\ &= U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu(n + \hat{\nu})^\dagger U_\nu(n)^\dagger. \end{aligned} \quad (34)$$

Η δράση βαθμίδας Wilson είναι ένα άθροισμα πάνω σε όλες τις πλακέτες. Αυτό το άθροισμα περιγράφεται ως το άθροισμα πάνω σε όλα τα πλεγματικά σημεία n όπου βρίσκονται οι πλακέτες μαζί με το άθροισμα πάνω σε όλους τους δείκτες Lorentz $1 \leq \mu < \nu \leq 4$.

$$S_G[U] = \frac{2}{g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr}[\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)] \quad (35)$$

Φορμαλισμός Βαθμίδας

Η αναμενόμενη τιμή μιας παρατηρήσιμης ποσότητας O :

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int D[U] e^{-S_G[U]} O[U], \quad (36)$$

όπου το Z ονομάζεται συνάρτηση επιμερισμού:

$$Z = \int D[U] e^{-S_G[U]}. \quad (37)$$

Η ποσότητα $D[U]$ είναι το μέτρο ολοκλήρωσης και ορίζεται από την σχέση

$$\int D[U] = \prod_{n \in \Lambda} \prod_{\mu=1}^4 \int dU_{\mu}(n). \quad (38)$$

Φορμαλισμός Βαθμίδας(2)

Η δράση Wilson για την ομάδα $SU(3)$ δίνεται από την σχέση

$$S_G[U] = \frac{\beta}{3} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr}[\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)], \quad (39)$$

όπου εδώ εισάγαμε την σταθερά β

$$\beta = \frac{2N}{g^2}, \quad (40)$$

και καλείται *αντίστροφη σταθερά σύζευξης* (inverse coupling) .

Μέτρο Haar $D[U]$

Το μέτρο Haar πρέπει να είναι αναλλοίωτο ως προς τον μετασχηματισμό βαθμίδας:

$$U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = \Omega(n)U_\mu(n)\Omega(n + \mu)^\dagger. \quad (41)$$

Για την δράση Wilson έχουμε

$$S_G[U'] = S_G[U]. \quad (42)$$

Προφανώς και το ολοκλήρωμα διαδρομής θα πρέπει να είναι αναλλοίωτο στην αλλαγή $U_\mu \rightarrow U'_\mu$:

$$Z = \int D[U]e^{-S_G[U]} = \int D[U']e^{-S_G[U']} = \int D[U']e^{-S_G[U]}, \quad (43)$$

και καταλήγουμε

$$D[U] = D[U']. \quad (44)$$

Ιδιότητες μέτρου Haar

Το $D[U]$ θα πρέπει να έχει την ιδιότητα

$$dU_\mu(n) = dU_\mu(n)' = d(\Omega(n)U_\mu(n)\Omega(n+\mu)^\dagger). \quad (45)$$

Τα $\Omega(n)$ και $\Omega(n+\mu)^\dagger$ μπορούν να επιλεγθούν να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους θα πρέπει το μέτρο dU να είναι αναλλοίωτο όταν πολλαπλασιάζεται είτε δεξιά είτε αριστερά με ένα στοιχείο V της ίδιας ομάδας που ανήκει και το U

$$dU = d(UV) = d(VU). \quad (46)$$

Αυτή η εξίσωση επιτρέπει σε κάποιον να ολοκληρώσει την συνήθεις μεταβλητή συνδέσμων που υπάρχει στο γινόμενο ιχνών δύο πλακετών.

$$\int dU \text{tr}[VU] \text{tr}[U^\dagger Q] = \frac{1}{N} \text{tr}[VQ] \quad (47)$$

Βρόχος Wilson

Ο βρόχος Wilson αποτελεί και αυτός έναν κλειστό βρόχο

$$L[U] = \text{tr} \left[\prod_{(n,\mu) \in L} U_\mu(n) \right] \quad (48)$$

Η χωρική μετατόπιση $S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, n_t)$ συνδέει τα \mathbf{m} και \mathbf{n} του χώρου σε μια διαδρομή $C_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ για χρονική στιγμή n_t

$$S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, n_t) = \prod_{(\mathbf{k},j) \in C_{\mathbf{m},\mathbf{n}}} U_j(\mathbf{k}, n_t). \quad (49)$$

Η χρονική μετατόπιση $T(\mathbf{n}, n_t)$ είναι ευθεία γραμμή αποτελούμενη από n_t συνδέσμους στην κατεύθυνση του χρόνου

$$T(\mathbf{n}, n_t) = \prod_{j=0}^{n_t-1} U_4(\mathbf{n}, j). \quad (50)$$

Βρόχος Wilson(2)

Αν τώρα βάλουμε στην σειρά όλους αυτούς τους συνδέσμους μεταβλητών θα έχουμε

$$L : (\mathbf{m}, n_t) \xrightarrow{S} (\mathbf{n}, n_t) \xrightarrow{T^\dagger} (\mathbf{n}, 0) \xrightarrow{S^\dagger} (\mathbf{m}, 0) \xrightarrow{T} (\mathbf{m}, n_t) \quad (51)$$

και για να πάρουμε το βρόχο Wilson θα πρέπει να πάρουμε το ίχνος από το γινόμενο των συνδέσμων αυτών

$$\begin{aligned} W_L[U] &= \text{tr}[S(\mathbf{m}, \mathbf{m}, n_t) T(\mathbf{n}, n_t)^\dagger S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, 0)^\dagger T(\mathbf{m}, n_t)] \\ &= \text{tr} \left[\prod_{(k, \mu) \in L} U_\mu(k) \right] \end{aligned} \quad (52)$$

Βρόχος Polyakov

Για να είναι αναλλοίωτη-βαθμίδας παίρνουμε το ίχνος(trace) των δύο βρόχων ξεχωριστά. Με αυτό τον τρόπο καταφέρνουμε να εισάγουμε αυτό που αποκαλούμε βρόχο Polyakov

$$P(\mathbf{m}) = \text{tr} \left[\prod_{j=0}^{N_T} U_4(\mathbf{m}, j) \right] \quad (53)$$

επειδή αποτελεί ίχνος σε κλειστό βρόχο είναι αναλλοίωτο κάτω από τον μετασχηματισμό βαθμίδας. Για μια απόσταση $r = a|\mathbf{m} - \mathbf{n}|$ έχουμε:

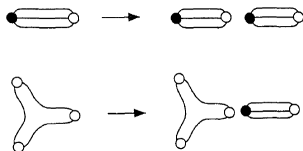
$$\langle P(\mathbf{m})P(\mathbf{n})^\dagger \rangle \propto e^{-N_T a V(r)} (1 + \mathcal{O}(e^{-N_T a \Delta E})). \quad (54)$$

Ο βρόχος Polyakov μας χρησιμεύει ιδιαίτερα στον υπολογισμό του στατικού δυναμικού.

Στατικό Δυναμικό

Το στατικό δυναμικό μεταξύ των κουάρκς μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r. \quad (55)$$



Σχήμα: Αδروιοποίηση ενός μεσονίου και ενός βαρυονίου καθώς το ένα κουάρκ τραβιέται έως ότου διακοπή η σύνδεση του. Σχήμα από το βιβλίο του H.J. Rothe[1].

Ανάπτυγμα ισχυρής ζεύξης (Strong coupling expansion)

Θεωρούμε την $SU(N)$ πλεγματοκή θεωρία βαθμίδας στο τμήμα της καθαρής βαθμίδας. Η αντίστοιχη δράση στο πλέγμα δίνεται από την σχέση:

$$S = -\beta \sum_P S_P + \text{const.} \quad (56)$$

όπου

$$\beta = 2N/g_0^2 \quad (57)$$

και

$$S_P = \frac{1}{2N} \text{tr}(U_P + U_P^\dagger) \quad (58)$$

είναι η συνεισφορά της δράσης που σχετίζεται με την πλακέτα P . Η αντίστοιχη συνάρτηση επιμερισμού είναι:

$$Z = \int DU e^{\beta \sum_P S_P} \quad (59)$$

Ανάπτυγμα ισχυρής ζεύξης (Strong coupling expansion)(2)

Η αναμενόμενη τιμή του βρόχου Wilson με χωρική και χρονική μεταβλητή \hat{R} και \hat{T} , δίνεται:

$$\langle W_L[U] \rangle = \frac{\int DU W_L[U] \prod_P e^{\beta S_P}}{\int DU \prod_P e^{\beta S_P}} \quad (60)$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση της $SU(2)$. Κάνοντας την αντικατάσταση $\exp(\beta \sum S_P) \rightarrow 1$ προκύπτει ο κύριος όρος:

$$\langle W_L[U] \rangle \approx \left(\frac{\beta}{4} \right)^{\hat{R}\hat{T}} \quad (61)$$

και επομένως το δυναμικό μεταξύ κουάρκ-αντικουάρκ ($q\bar{q}$) στην ισχυρή ζεύξη γίνεται:

$$\hat{V}(\hat{R}) = - \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{T}} \ln \langle W_L[U] \rangle = \hat{\sigma}(g_0) \hat{R} \quad (62)$$

Ανάπτυγμα ισχυρής ζεύξης(Strong coupling expansion)(3)

Η τάση της χορδής υπολογισμένη σε μονάδες του πλέγματος, όπου α η σταθερά του πλέγματος.

$$\alpha^2 \hat{\sigma} = -\ln \left(\frac{\beta}{4} \right) \quad (63)$$

Σύμφωνα με το άρθρο του Creutz [14] στην περίπτωση που έχουμε μεγάλο β αναμένουμε μια ασυμπτωτική συμπεριφορά των μετρήσεων μας σύμφωνα με την εξίσωση

$$\alpha^2 \sigma \sim \exp \left(\frac{-6\pi^2 \beta}{11} \right). \quad (64)$$

Η μέθοδος Monte Carlo

Η αναμενόμενη τιμή μιας παρατηρήσιμης ποσότητας στο κενό δίνεται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int D[U] e^{-S_G[U]} O[U], \quad (65)$$

με τη συνάρτηση επιμερισμού Z να είναι:

$$Z = \int D[U] e^{-S_G[U]}, \quad (66)$$

Όπου η αριθμητική της έκφραση μια προσομοίωση Monte Carlo είναι:

$$\langle O \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{\substack{U_n \text{ with} \\ \text{probability} \\ \propto e^{-S[U_n]}}} O[U_n] \quad (67)$$

Δειγματοληψία με κριτήριο σημαντικότητας (importance sampling)

Από την θεωρία πιθανοτήτων, γνωρίζουμε ότι σε μια ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution) $\rho_u(x_n) = 1/(b - a)$ ισχύει:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x) = \langle f \rangle_{\rho_u} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \quad (68)$$

Αυτή η μέθοδος μας δίνει την δυνατότητα να αντικαταστήσουμε την ακριβή μέση τιμή με την μέση τιμή του δείγματος.

Η αναμενόμενη τιμή από κάποια συνάρτηση $f(x)$ και η οποία έχει μια κατανομή πιθανότητας με πυκνότητα $\rho(x)$ δίνεται από την σχέση:

$$\langle f \rangle_{\rho} = \frac{\int_a^b dx \rho(x) f(x)}{\int_a^b dx \rho(x)} \quad (69)$$

Δειγματοληψία με κριτήριο σημαντικότητας (importance sampling)(2)

Για δείγμα που αποτελείται από x_n με πυκνότητα πιθανότητας $\rho(x) = \int_a^b \rho(x) dx$ προσεγγίζεται:

$$\langle f \rangle_\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \quad (70)$$

Η αναμενόμενη τιμή μιας παρατηρήσιμης ποσότητας O προσεγγίζεται από τον εκτιμητή:

$$\langle O \rangle_\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N O[U_n] \quad (71)$$

Αλυσίδα Markov

Η διαδικασία Markov περιγράφει την πιθανότητα του συστήματος να μεταβεί στην κατάσταση U' ξεκινώντας από την U :

$$P(U_n = U' | U_{n-1} = U) = T(U' | U) \quad (72)$$

Αυτή η πιθανότητα εξαρτάται μόνο από της καταστάσεις U' και U , αλλά όχι από τον δείκτη n . Η πιθανότητα μετάβασης υπακούει τους παρακάτω κανόνες:

$$0 \leq T(U' | U) \leq 1, \quad \sum_{U'} T(U' | U) = 1. \quad (73)$$

Η διαδικασία Markov υπακούει εξίσωση ισοροπίας:

$$\sum_U T(U' | U) P(U) = \sum_U T(U | U') P(U') \quad (74)$$

Αλυσίδα Markov(2)

Η κατανομή ισορροπίας $P(U)$ είναι ένα σταθερό σημείο στην διαδικασία Markov όταν το σύστημα φτάνει στην επιθυμητή κατανομή, παραμένει εκεί.

$$\sum_U T(U'|U)P(U) = P(U') \quad (75)$$

Αν η εξίσωση ισορροπίας ισχύει όρο προς όρο, τότε παίρνουμε την αναλυτική εξίσωση ισορροπίας (detailed balanced equation), που αυτή χρησιμοποιείται κυρίως στους αλγόριθμους Monte Carlo:

$$T(U'|U)P(U) = T(U|U')P(U'). \quad (76)$$

Ο αλγόριθμος Metropolis

Εξελίσσει την αλυσίδα Markov από την κατάσταση U_{n-1} σε μια νέα κατάσταση U_n , όπου ισχύει η συνθήκη $P(U) \propto \exp(-S[U])$:

Βήμα 1: Διαλέγουμε κάποια υποψήφια κατάσταση U' με βάση μια εκ των προτέρων (a priori) πιθανότητα $T_0(U'|U)$, όπου $U = U_{n-1}$.

Βήμα 2: Αποδεχόμαστε την υποψήφια κατάσταση U' ως την νέα κατάσταση U_n με πιθανότητα αποδοχής:

$$T_A(U'|U) = \min \left(1, \frac{T_0(U|U') \exp(-S[U'])}{T_0(U'|U) \exp(-S[U])} \right) \quad (77)$$

Αν η προτεινόμενη αλλαγή δεν γίνει αποδεκτή, η κατάσταση που δεν έχει αλλάξει ξανά λαμβάνεται υπόψιν στην αλυσίδα Markov και συμπεριλαμβάνεται όπως κάθε άλλη μέτρηση.

Βήμα 3: Επαναλαμβάνονται τα βήματα έως ότου ο επιθυμητός αριθμός επαναλήψεων επιτευχθεί.

Ο αλγόριθμος Metropolis(2)

Η συνολική πιθανότητα μετάβασης $T = T_0 T_A$ πληρεί την αναλυτική εξίσωση ισορροπίας:

$$T(U'|U) \exp(-S[U]) = T(U|U') \exp(-S[U']) \quad (78)$$

Επιλέγοντας μια συμμετρική πιθανότητα που υπακούει στην εξίσωση:

$$T_0(U|U') = T_0(U'|U) \quad (79)$$

όπου βάση αυτής έχουμε:

$$T_A(U'|U) = \min(1, \exp(-\Delta S)) \quad (80)$$

όπου ΔS

$$\Delta S = S[U'] - S[U]. \quad (81)$$

Αλγόριθμος Metropolis για την δράση βαθμίδας Wilson

Στις τέσσερις διαστάσεις, ο σύνδεσμος μοιράζεται με έξι διαφορετικές πλακέτες. Η τοπική συνεισφορά τους στην δράση είναι:

$$S[U_\mu(n)']_{loc} = \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^6 \text{Re tr}[\mathbb{1} - U_\mu(n)' P_i] = \frac{\beta}{N} \text{Re tr}[6\mathbb{1} - U_\mu(n)' A] \quad (82)$$

όπου η μεταβλητή A είναι:

$$A = \sum_{i=1}^6 P_i = \sum_{\nu \neq \mu} (U_\nu(n + \hat{\mu}) U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) U_{-\nu}(n + \hat{\nu})) \quad (83)$$

$$+ U_{-\nu}(n + \hat{\mu}) U_{-\mu}(n + \hat{\mu} - \hat{\nu}) U_\nu(n - \hat{\nu}).$$

Όπου τα P_i είναι γινόμενα από τους άλλους τρεις συνδέσμους μεταβλητών που απαρτίζουν τις πλακέτες μαζί με το $U_\mu(n)'$.

Αλγόριθμος Metropolis για την δράση βαθμίδας Wilson (2)

Για την αλλαγή της δράσης παίρνουμε:

$$\Delta S = S[U_\mu(n)']_{loc} - S[U_\mu(n)]_{loc} = -\frac{\beta}{N} \text{Re tr}[(U_\mu(n)' - U_\mu(n))A], \quad (84)$$

όπου το A δεν επηρεάζεται από την αλλαγή του $U_\mu(n)$.

Σημαντικό μέρος αποτελεί η επιλογή του υποψήφιου συνδέσμου $U_\mu(n)'$. Πρέπει να είναι στοιχείο της ομάδας $SU(N)$ όχι πολύ μακριά από τον παλιό σύνδεσμο $U_\mu(n)$, τέτοιο ώστε η μέση πιθανότητα αποδοχής για τον υποψήφιο σύνδεσμο να μην γίνεται πολύ μικρή:

$$U_\mu(n)' = XU_\mu(n), \quad (85)$$

Μεθοδολογία ενημέρωσης μεταβλητού συνδέσμου

Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε μια μεθοδολογία για την ενημέρωση ενός μεταβλητού συνδέσμου χρησιμοποιώντας βέβαια και την συμμετρική επιλογή πιθανότητας T_0 :

- Βήμα 1:** Δεδομένης κάποιας κατάστασης του πεδίου βαθμίδας, επιλέξτε μια θέση n και μια κατεύθυνση μ και μια υποψήφια τιμή $U_\mu(n)'$ βάση της συμμετρικής επιλογής πιθανότητας T_0 .
- Βήμα 2:** Υπολογίστε το άθροισμα πάνω σε όλους τους συνδετήρες A και μετά με βάση αυτό την αλλαγή της δράσης ΔS . Υπολογίστε ένα τυχαίο αριθμό r ομοιόμορφα κατανεμημένος στο διάστημα $[0, 1)$. Αποδεχτείτε την νέα μεταβλητή $U_\mu(n)'$ αν ισχύει $r \leq \exp(-\Delta S)$, αλλιώς το απορρίπτετε.
- Βήμα 3:** Επαναλάβετε τα βήματα από την αρχή.

Βελτιωμένες δράσεις

Ο αλγόριθμος Metropolis μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί και σε άλλες 'βελτιωμένες' δράσεις

$$\begin{aligned}
 S_L^{gauge} = \sum_{n \in lattice} \{ & \beta_0 \sum_{\mu, \nu}^{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{N} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n) \right] \\
 & + \beta_1 \sum_{\mu, \nu}^{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{N} \text{Re tr } U_{\mu\nu}^{long}(n) \right] \\
 & + \beta_1 \sum_{\mu, \nu}^{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{N} \text{Re tr } U_{\mu\nu}^{wide}(n) \right] \} \quad (86)
 \end{aligned}$$

Οι σχετικοί συντελεστές βάρους έχουν επιλεγθεί ώστε να ελαχιστοποιούν τα σφάλματα διακριτοποίησης σύμφωνα με την εργασία των M. Lüscher και P. Weisz [20].

Δημιουργώντας υποψήφιους συνδέσμους

Για την $SU(2)$ είναι βολικό να αποθηκεύσουμε την πρώτη γραμμή (a, b) του πίνακα

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (87)$$

όπου θα πρέπει να ισχύει

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (88)$$

Έχοντας $a = x_0 + ix_4$ και $b = x_3 + ix_2$, αυτό είναι ισοδύναμο με το να χρησιμοποιήσουμε ένα διάνυσμα $x = (x_0, \mathbf{x})$ που αποτελείται από τέσσερις συντελεστές στην αναπαράσταση

$$U = x_0 \mathbb{1} + i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (89)$$

Δημιουργώντας υποψήφιους συνδέσμους (2)

Η ορίζουσα του U να είναι:

$$\det[U] = |x|^2 = x_0^2 + |\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=0}^3 x_i^2 = 1, \quad (90)$$

όπου το σ δηλώνει τους τρεις πίνακες του Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Για την εύρεση των υποψήφιων στοιχείων χρησιμοποιούμε την επιλογή τεσσάρων τυχαίων αριθμών r_i ομοιόμορφα κατανομημένων στο διάστημα $(-1/2, 1/2)$. Τότε ο $SU(2)$ πίνακας κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση(89) όπου τα x_0 και \mathbf{x} δίνονται:

$$\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{r} / |\mathbf{r}|, \quad x_0 = \text{sign}(r_0) \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (92)$$

Συνοριακές και αρχικές συνθήκες

Έχουμε επιλέξει περιοδικές συνοριακές συνθήκες για τα πεδία βαθμίδας, όπου N και N_T είναι το πλήθος των σημείων στην χωρική και χρονική κατεύθυνση, αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}U_\mu(N, n_2, n_3, n_4) &= U_\mu(0, n_2, n_3, n_4), \\U_\mu(n_1, N, n_3, n_4) &= U_\mu(n_1, 0, n_3, n_4), \\U_\mu(n_1, n_2, N, n_4) &= U_\mu(n_1, n_2, 0, n_4), \\U_\mu(n_1, n_2, n_3, N_T) &= U_\mu(n_1, n_2, n_3, 0).\end{aligned}\tag{93}$$

Δύο τυπικές αρχικές καταστάσεις του συστήματος είναι η ζεστή(hot) και η κρύα(cold) αρχή:

Ζεστή αρχή Σε αυτή την περίπτωση οι καταστάσεις του πεδίου βαθμίδας επιλέγονται με τυχαίες μεταβλητές στον χώρο.

Κρύα αρχή Εδώ όλοι οι σύνδεσμοι παίρνουν την τιμή της μονάδας.

Ο αλγόριθμος Heatbath

Ο αλγόριθμος heatbath, επιλέγει την τιμή του νέου συνδέσμου $U_\mu(n)'$ με βάση την τοπική κατανομή πιθανότητας χρησιμοποιώντας τους γύρω συνδετήρες:

$$dP(U) = dU \exp\left(\frac{\beta}{N} \text{Re tr}[UA]\right) \quad (94)$$

Η ομάδα $SU(2)$ είναι ιδιαίτερη περίπτωση διότι το άθροισμα δύο $SU(2)$ πινάκων είναι ανάλογος με κάποιον άλλον $SU(2)$ πίνακα. Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα μπορούμε να γράψουμε το άθροισμα των συνδετήρων A ως:

$$A = aV \quad \text{όπου} \quad a = \sqrt{\det(A)}, \quad (95)$$

όπου αναμένουμε το $\det(A) \geq 0$. Αν για κάποιο λόγο το $\det(A)$ μηδενίζεται, διαλέγουμε ένα τυχαίο $SU(2)$ πίνακα για τον νέο σύνδεσμο.

Ο αλγόριθμος Heatbath (2)

Ορίζουμε το $X = UV$, και γράφουμε την τοπική κατανομή πιθανότητας για το X ως:

$$dP(X) = dX \exp\left(\frac{1}{2} a\beta \operatorname{Re} \operatorname{tr}[X]\right). \quad (96)$$

Αν τώρα παράξουμε έναν πίνακα X με βάση αυτή την κατανομή, ο υποψήφιος σύνδεσμος λαμβάνεται από την σχέση:

$$U_\mu(n)' = U = XV^\dagger = XA^\dagger \frac{1}{a}. \quad (97)$$

Καταλήγουμε στην κατανομή του X που έχει την μορφή (χρησιμοποιώντας $d^2\Omega = d \cos\theta d\phi$):

$$dP(X) = \frac{1}{2\pi^2} d \cos\theta d\phi dx_0 \sqrt{1-x_0^2} e^{a\beta x_0}, \quad (98)$$

με $x_0 \in [-1, 1]$, $\cos\theta \in [-1, 1]$, και $\phi \in [0, 2\pi)$

Ο αλγόριθμος Heatbath (3)

Για να υπολογίσουμε την μεταβλητής x_0 κατανεμημένη σύμφωνα με την $\sqrt{1-x_0^2} e^{a\beta x_0}$, εισάγουμε την μεταβλητή λ ως εξής:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1 - 2\lambda^2 \text{ όπου } x_0 \in [-1, 1] \\ \Rightarrow dx_0 \sqrt{1-x_0^2} e^{a\beta x_0} &\propto d\lambda \lambda^2 \sqrt{1-\lambda^2} e^{-2a\beta\lambda^2}.\end{aligned}\tag{99}$$

Μετά από αυτόν τον μετασχηματισμό, χρειάζεται να παράγουμε το λ με την τροποποιημένη Γκαουσιανή πυκνότητα κατανομής

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 e^{-2a\beta\lambda^2},\tag{100}$$

την οποία είτε την αποδεχόμαστε, είτε την απορρίπτουμε βάσει της συνάρτησης:

$$p_2(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}.\tag{101}$$

Ο αλγόριθμος Heatbath (4)

Αυτό δουλεύει ως εξής:

Βήμα 1: Παράγουμε τρεις τυχαίους αριθμούς r_i , με $i = 1, 2, 3$ ομοιόμορφα καταναμετημένους στο διάστημα $(0, 1]$.

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2a\beta}(\ln(r_1) + \cos^2(2\pi r_2)\ln(r_3)), \quad (102)$$

η οποία ακολουθεί την Γκαουσιανή κατανομή $p_1(\lambda^2)$.

Βήμα 2: Πρέπει να διορθώσουμε τον παράγοντα $p_2(\lambda)$ και γι' αυτό δεχόμαστε μόνο τιμές του λ που υπακούουν στην συνθήκη:

$$r \leq \sqrt{1 - \lambda^2} \Rightarrow r^2 \leq 1 - \lambda^2, \quad (103)$$

όπου r τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα καταναμετημένη στο διάστημα $[0, 1)$ και οι τιμές που γίνονται αποδεκτές δίνουν $x_0 = 1 - 2\lambda^2$.

Σύνοψη αλγορίθμου Heatbath στην ομάδα $SU(2)$

Βήμα 1: Βρίσκουμε πρώτα το άθροισμα των συνδετήρων A

$$A = \sum_{i=1}^6 P_i = \sum_{\nu \neq \mu} (U_\nu(n + \hat{\mu}) U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) U_{-\nu}(n + \hat{\nu})) + U_{-\nu}(n + \hat{\mu}) U_{-\mu}(n + \hat{\mu} - \hat{\nu}) U_\nu(n - \hat{\nu}), \quad (104)$$

υπολογίζουμε την μεταβλητή $a = \sqrt{\det(A)}$ και βρίσκουμε τον λόγο $V = A/a$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε μια ομάδα στοιχείων X σύμφωνα με την κατανομή (98) όπως περιγράψαμε και παραπάνω.

Βήμα 3: Υπολογίζουμε το νέο σύνδεσμο μεταβλητών σύμφωνα με την σχέση $U = XV^\dagger$.

Η μέθοδος Overrelaxation

Ο αλγόριθμος επιταχύνει την κίνηση στον χώρο των καταστάσεων του συστήματος καθώς συσχετίζει την υποψήφια κατάσταση (U) με την καινούργια υποψήφια κατάσταση (U') ως προς την ελάχιστη δράση. Αυτό αλλάζει τον σύνδεσμο ως εξής:

$$U \rightarrow U' = U_0 U^\dagger U_0 \quad (105)$$

όπου η δράση για έναν σύνδεσμο U δίνεται:

$$S(U) = -\frac{\beta}{2} \text{tr}(UV). \quad (106)$$

Η δράση ελαχιστοποιείται όταν ισχύει:

$$U_0 = V^\dagger / |V| \quad (107)$$

με το $|V|$ να είναι η ορίζουσα $\det(V)$. Το V είναι στοιχείο της ομάδας βαθμίδας και γι' αυτό είναι αμετάβλητο.

Η μέθοδος Overrelaxation(2)

Για το V , διαλέγουμε ξανά το κανονικοποιημένο άθροισμα των συνδετήρων, και βρίσκουμε ότι η δράση παραμένει αμετάβλητη:

$$\text{tr}[U'A] = \text{tr}[V^\dagger U^\dagger V^\dagger A] = a \text{tr}[V^\dagger U^\dagger] = \text{tr}[A^\dagger U^\dagger] = \text{tr}[UA] \quad (108)$$

η αλλιώς

$$S(U') = S(U). \quad (109)$$

Η πιθανότητα επιλογής T_0 είναι συμμετρική, διότι $U' = V^\dagger U^\dagger V^\dagger$ υποδηλώνει $U = V^\dagger U'^\dagger V^\dagger$. Ακόμη και στην περίπτωση όπου το $\det(A)$ εξαφανίζεται, χρησιμοποιείται οποιοσδήποτε τυχαίος σύνδεσμος μεταβλητών και γίνεται αποδεκτός.

Αυτοσυσχετισμοί

Η αυτοσυσχέτιση μελετάται μέσω της συνάρτησης:

$$\begin{aligned} C_X(X_i, X_{i+t}) &= \langle (X_i - \langle X_i \rangle)(X_{i+t} - \langle X_{i+t} \rangle) \rangle \\ &= \langle X_i X_{i+t} \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_{i+t} \rangle. \end{aligned} \quad (110)$$

Για μια αλυσίδα Markov που έχει φτάσει σε κατάσταση θερμοποίησης η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού εξαρτάται μόνο από τον υπολογιστικό χρόνο t και επομένως γράφεται

$$C_X(t) = C_X(X_i, X_{i+t}). \quad (111)$$

η κανονικοποιημένη συνάρτηση συσχετισμού Γ_X , ασυμπτωτικά για μεγάλο χρόνο t έχει εκθετική συμπεριφορά.:

$$\Gamma_X(t) \equiv \frac{C_X(t)}{C_X(0)} \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_{X,exp}}\right), \quad (112)$$

Αυτοσυσχετισμοί (2)

Για τις τυχαίες μεταβλητές X_i η διακύμανση υπολογίζεται μέσω:

$$\sigma_{\hat{X}^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N C_X(|i-j|) \equiv \frac{\sigma_X^2}{N} 2\tau_{X,int}, \quad (113)$$

όπου ο όρος $\tau_{X,int}$ καλείται ολοκληρωμένος χρόνος αυτοσυσχετισμού (integrated autocorrelation time)

$$\tau_{X,int} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^N \Gamma_X(|t|) \approx \int_0^\infty dt e^{-t/\tau} = \tau. \quad (114)$$

Ο αριθμός των ανεξάρτητων δεδομένων από πλήθος N τιμών είναι

$$N_{indep} = \frac{N}{2\tau_{X,int}}, \quad (115)$$

Αυτοσυσχετισμοί (3)

Για συσχετισμένες μετρήσεις έχουμε:

$$\hat{X} \pm \sigma \quad \text{όπου} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} 2\tau_{X,int} \hat{\sigma}_X^2} \quad (116)$$

Για πλεγματικά συστήματα θα πρέπει να έχουμε χρόνους

$$\tau_{X,int} \sim (\xi_X)^2, \quad \tau_{exp} \sim \xi^2, \quad (117)$$

όπου ξ_X είναι το μήκος συσχετισμού για την μετρούμενη ποσότητα X και ξ είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος συσχετισμού του συστήματος. Στα κρίσιμα σημεία το ξ προσεγγίζει το άπειρο, όμως για πεπερασμένα πλέγματα γραμμικής διάστασης L έχουμε $\xi \leq L$.

$$\text{numerical cost} \propto L^2 \quad (118)$$

Αυτό καλείται κρίσιμη επιβράδυνση (critical slowing down).

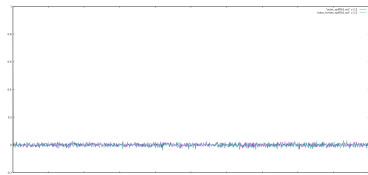
Η μέθοδος Jackknife

Χωρίζουμε τα δεδομένα μας σε N_b καλάθια τα οποία περιέχουν $b = N - (N/N_b)$ στοιχεία. Τα στοιχεία δομούνται με το εξής τρόπο: το καλάθι(bin) j προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τα αρχικά δεδομένα X_0, X_1, \dots, X_{N-1} του καλάθιού τα στοιχεία από j μέχρι $j + b$. Για κάθε καλάθι υπολογίζουμε την μέση τιμή X του, και έτσι προκύπτει ένα σύνολο από μέσες τιμές $X_0^b, X_1^b, \dots, X_{N_b-1}^b$. Το σφάλμα υπολογίζεται από την σχέση:

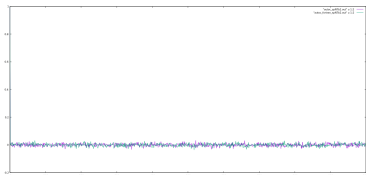
$$\sigma_X^2 = \sum_{j=0}^{N_b-1} (X_j^b - \langle X^b \rangle)^2 = N_b (\langle (X^b)^2 \rangle - \langle X^b \rangle^2). \quad (119)$$

Ο αριθμός των καλάθιων καθορίζεται μεταβάλλοντας τον έως ότου το σφάλμα μας σταθεροποιηθεί.

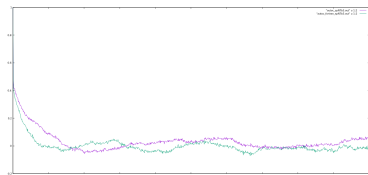
Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran αυτοσυσχετισμοί



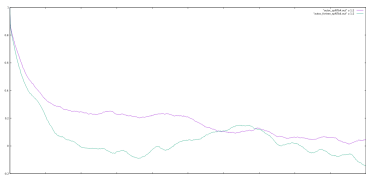
(α') $\beta = 1.0$



(β') $\beta = 2.0$

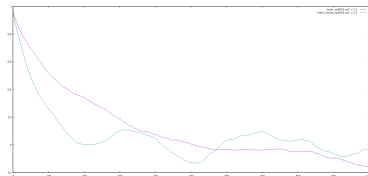


(γ') $\beta = 3.0$

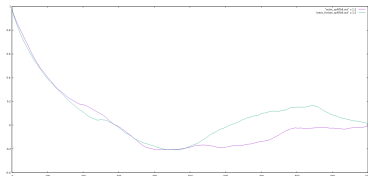


(δ') $\beta = 4.0$

Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran αυτοσυσχετισμοί (2)

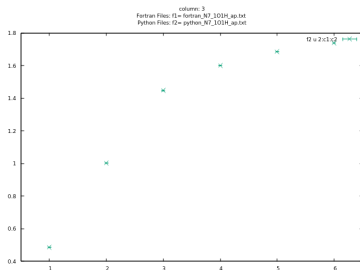


(α') $\beta = 5.0$

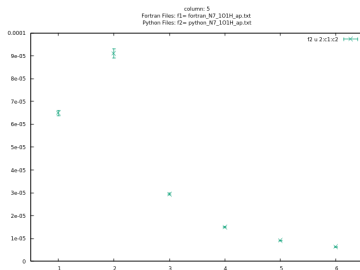


(β') $\beta = 6.0$

Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran μέσω τιμές



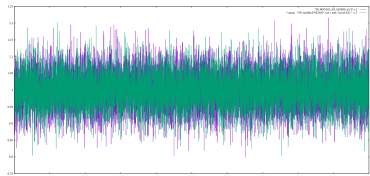
(α') Σύγκριση μέσης τιμής της πλακέτας.



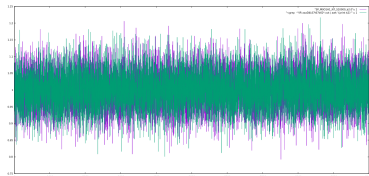
(β') Σύγκριση διακύμανσης μέσης τιμής της πλακέτας.

Σχήμα: Μέση τιμή πλακέτας

Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran time histories

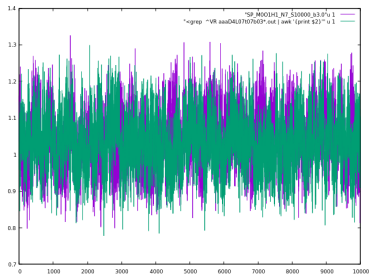


(α') $\beta = 1.0$

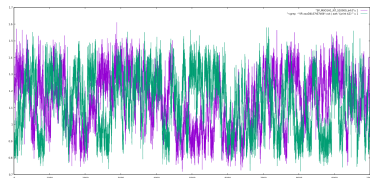


(β') $\beta = 2.0$

Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran time histories (2)

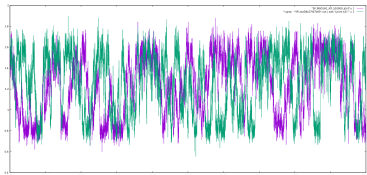


(α') $\beta = 3.0$

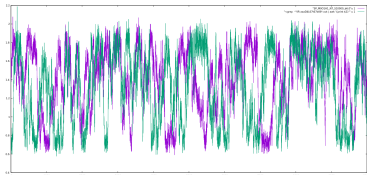


(β') $\beta = 4.0$

Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran time histories (3)

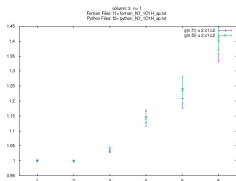


(α') $\beta = 5.0$

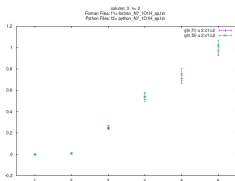


(β') $\beta = 6.0$

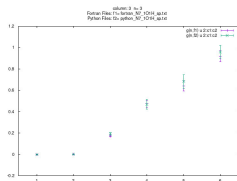
Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran στατικού δυναμικού για $\beta = 6.0$



(α') 1ο κόμβο

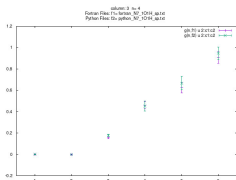


(β') 2ο κόμβο

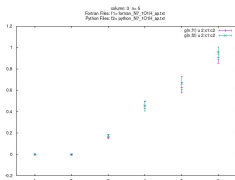


(γ') 3ο κόμβο

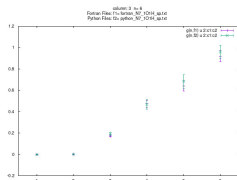
Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran στατικού δυναμικού για $\beta = 6.0$ (2)



(α') 4ο κόμβο

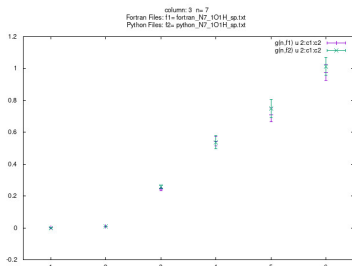


(β') 5ο κόμβο

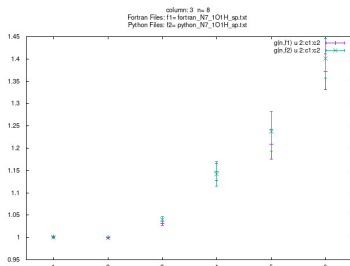


(γ') 6ο κόμβο

Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran στατικού δυναμικού για $\beta = 6.0$ (3)

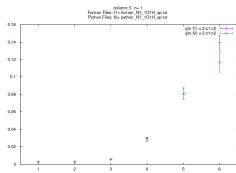


(α') 7ο κόμβο

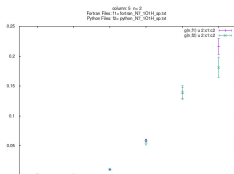


(β') 1ο κόμβο(έλεγχος συμμετρίας)

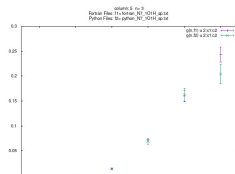
Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran διακύμανσης στατικού δυναμικού για $\beta = 6.0$



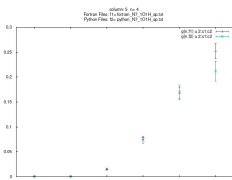
(α')



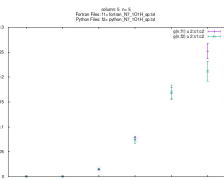
(β')



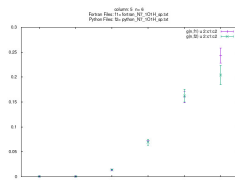
(γ')



(δ')

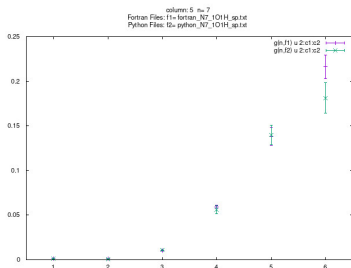


(ε')

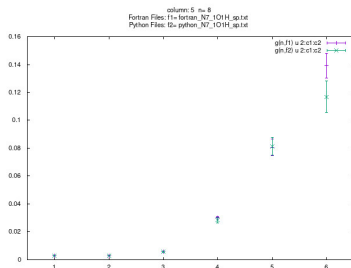


(ς')

Έλεγχος Ορθότητας Python - Fortran διακύμανσης στατικού δυναμικού για $\beta = 6.0$ (2)



(α') 7ο κόμβο



(β') 1ο κόμβο(έλεγχος συμμετρίας)

Ανάλυση μετρήσεων για $L = 16$ και $L_t = 16$

Για την ανάλυση των μετρήσεων μας επιλέξαμε ένα πλέγμα $L = 16^4$ για το οποίο πήραμε ένα δείγμα περίπου 600.000 μετρήσεων. Στην ανάλυση μας υποθέτουμε ότι ο βρόχος Wilson είναι

$$W(C) = \exp(-tV(r)) \quad (120)$$

όπου C είναι ένα ορθογώνιο $r \times t$. Τώρα αν υποθέσουμε ότι το δυναμικό έχει την μορφή

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r \quad (121)$$

προκύπτει η εξίσωση

$$W(C) = \exp(-\sigma r t - B \left(\frac{t}{r}\right) - A t + c). \quad (122)$$

Ανάλυση μετρήσεων για $L = 16$ και $L_t = 16$

Για τον τετραγωνικό βρόχο έχουμε $l = r = t$, και επομένως

$$W(C) = \exp(-\sigma l^2 - Al - B) \quad (123)$$

και αναμένουμε το σ να έχει την τιμή

$$\sigma = -\ln\left(\frac{\beta}{4}\right) (1 + \mathcal{O}(\beta)). \quad (124)$$

Τέλος για τους βρόχους Polyakov χρησιμοποιήθηκε η σχέση

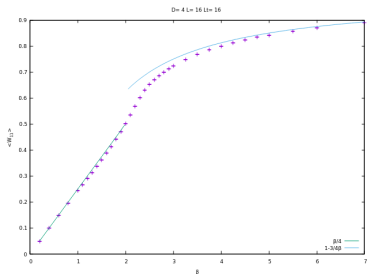
$$\langle P(m)P(n)^\dagger \rangle \sim \exp(-L_t V(r))(1 + \mathcal{O}(\exp(-t\Delta E))) \quad (125)$$

όπου μας δίνει την σχέση για το στατικό δυναμικό

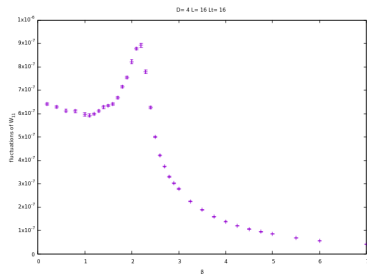
$$V(r) = -\frac{1}{L_t} \ln \langle P(m)P(n)^\dagger \rangle \quad (126)$$

με την απόσταση r να είναι $r = |m - n|$.

Συμπεριφορά βρόχου Wilson



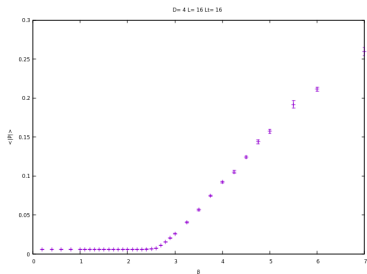
(α') Συμπεριφορά του βρόχου Wilson σε χαμηλές και υψηλές θερμοκρασίες



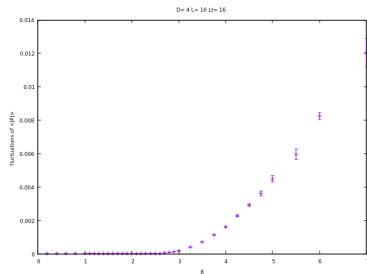
(β') Διακυμάνσεις του βρόχου Wilson

Σχήμα

Βρόχος Polyakov



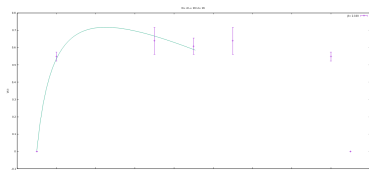
(α') Μέση τιμή της απόλυτης τιμής του βρόχου Polyakov συναρτήσει του β



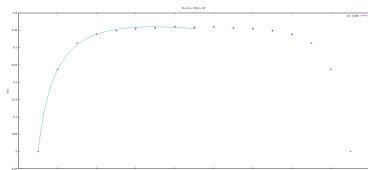
(β') Διακυμάνσεις του βρόχου Polyakov συναρτήσει του β

Σχήμα

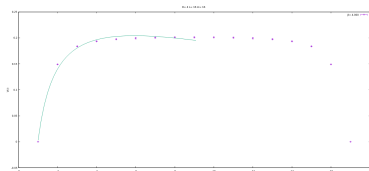
Στατικό δυναμικό $V(r)$ συναρτήσει της απόστασης r



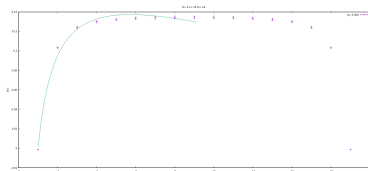
(α') $\beta = 2.1$



(β') $\beta = 3.0$

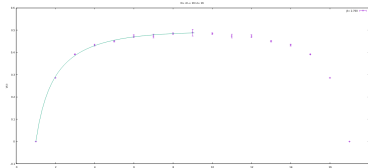


(γ') $\beta = 4.0$

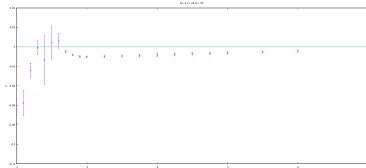


(δ') $\beta = 5.0$

Στατικό δυναμικό και τάση χορδής

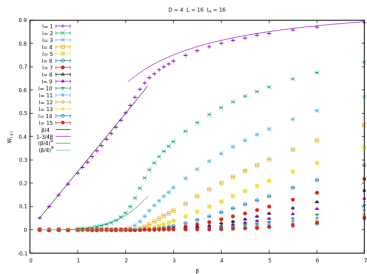


(α') Στατικό δυναμικό $V(r)$
συναρτήσεως της απόστασης για
 $\beta = 2.7$

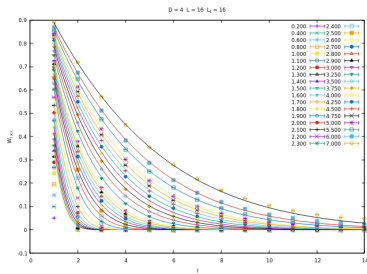


(β') Τάσης χορδής που έχει
υπολογιστεί βάση των βρόχων
Polyakov

Βρόχος Wilson συναρτήσε β και l

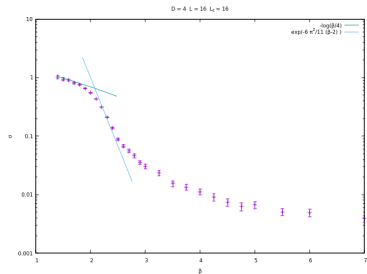


(α') Εξάρτηση του βρόχου Wilson από το β

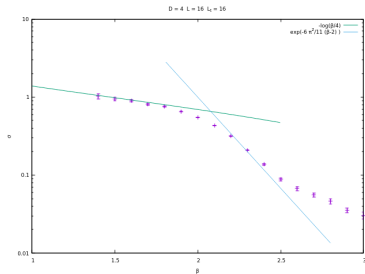


(β') Βρόχος Wilson συναρτήσε της απόστασης l

Τάση χορδής σ βάσει των βρόχων Wilson



(α')



(β')

- [1] H.J. Rothe . *Lattice Gauge Theories*. 3η έκδοση. 2015.
- [2] K. Anagnostopoulos . *Computational Physics*. 2015.
- [3] M.D. Schwartz . *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [4] T.A. DeGrand . *Lattice methods for Quantum Chromodynamics*. 2006.
- [5] Fukugita M. και A. Ukawa. 'Langevin Simulation Including Dynamical Quark Loops'. Στο: *Physics Review Letters* 5 (1985).
- [6] A.D.Kennedy και B.J.Pendleton. 'Improved heat bath method for Monte Carlo calculations in lattice gauge theories'. Στο: *Physics Letters* 156B.5,6 (1985).
- [7] J. Bor. *The Glueball spectrum in large- N QCD*. Master thes. Van Swinderen Institute for Particle Physics and Gravity. 2019.
- [8] C. Gattringer και C.B. Lang. *Quantum Chromodynamics on the lattice*. 2010.

- [9] D.Toussaint. *Introduction to Algorithms for Monte Carlo Simulations and their Application to QCD*. lectures presented at the Symposium on New Developments in Hardware and Software for Computational Physics, Buenos Aires. 1988.
- [10] N.Cabbibo και E.Marinari. 'A new method for updating $SU(N)$ matrices in computer simulations of gauge theories'. Στο: *Physics Letters* 119 B.4,5,6 (1982).
- [11] G.G.Batrouni et al. 'Langevin simulations of lattice field theories'. Στο: *Physical Review* 32 D (1985), σ. 2736.
- [12] Donald E. Knuth. 'Big omicron and big omega and big theta'. Στο: *SIGACT News* (1976).
- [13] M.Creuz. 'Microcanonical Monte Carlo simulation'. Στο: *Physical Review* 50.19 (1983).
- [14] M.Creuz. 'Monte Carlo study of quantized $SU(2)$ gauge theory'. Στο: *Physical Review* 21.8 (1980).
- [15] F. Knechtli M. Günther και M.Peadron. *Lattice Quantum Chromodynamics Practical Essentials*. 2017

- [16] Yuri Makeenko. 'A Brief Introduction to Wilson Loops and Large N '. Στο: *Institute of Theoretical and Experimental Physics, Moscow* (2009).
- [17] Silvia Necco. 'The static quark potential and scaling behavior of $SU(3)$ lattice Yang-Mills theory'. Humboldt Universität zu Berlin. Διδακτορική διατρ. 2003.
- [18] P.de Forcrand και O.Jahn. *Monte Carlo Overrelaxation for $SU(N)$ Gauge Theories*. url: <https://arxiv.org/pdf/hep-lat/0503041.pdf>. 2005.
- [19] M. Lüscher και P. Weisz. 'Computation of the action for on-shell improved lattice gauge theories at weak coupling'. Στο: *Physics Letters* (1985).
- [20] M. Lüscher και P. Weisz. 'On-shell Improved Lattice Gauge Theories'. Στο: *Springer* (1985). *Commun. Math. Phys.*
- [21] R. Rosenfelder. *Path Integrals in Quantum Physics*. Lectures given at ETH Zurich. Paul Scherrer Institute.

- [22] S.L.Adler. 'Over-relaxation method for Monte Carlo evaluation of the partition function for multiquadratic actions'. Στο: *Physics Review 23 D* (1981), σ. 2901.
- [23] S. Solbrig. *Topology in SU(2) lattice gauge theory and parallelization of functional magnetic resonance imaging*. Διδακτορική διατριβή στις φυσικές επιστήμες από τη Σχολή Φυσικής του Πανεπιστημίου του Regensburg. 2008.
- [24] F.R.Brown και T.J.Woch. 'Overrelaxed heat bath and Metropolis algorithms for accelerating pure gauge Monte Carlo calculations'. Στο: *Physics Review 58* (1987), σ. 2394.
- [25] W.J.Negele. *Monte Carlo Methods for Hadronic Physics*. lectures presented at the International Spring School on Medium and High Energy, Nuclear Physics, Taiwan. 1988.
- [26] G.Parisi και Wu Yongshi. 'Perturbation theory without gauge fixing'. Στο: *Scientia Sinica XXIV.4* (1981).