ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΛΥΣΕΙΣ 26/10/2011

1) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα σωματίδιο με σπιν ½ και με μαγνητική ροπή $3\mu_0$ (σύστημα A), και από ένα δεύτερο σύστημα, A', που αποτελείται από τρία σωματίδια με σπιν ½ και με μαγνητική ροπή μ_0 το καθένα. Τα δύο συστήματα τοποθετούνται σε μαγνητικό πεδίο **B.** (α) Να απαριθμήσετε όλες τις προσιτές καταστάσεις του συστήματος $A^* = A + A'$. Για κάθε μία από αυτές να βρείτε την ολική μαγνήτιση και την ολική ενέργεια. (β) Τα συστήματα A και A' αρχικά δεν βρίσκονται σε επαφή. Η μαγνητική ροπή του A είναι $M= -3\mu_0$, ενώ η μαγνητική ροπή του A' είναι $M' = 3\mu_0$. Τα συστήματα έρχονται κατόπιν σε επαφή, ώστε να μπορούν να ανταλλάσσουν ενέργεια ελεύθερα, είναι απομονωμένα από το περιβάλλον και φθάνουν στην κατάσταση ισορροπίας. Να υπολογίσετε (i) τις πιθανότητες $P(M)$ και $P(M')$ για να πάρουν οι ολικές μαγνητικές ροπές των A και A' μία από τις δυνατές τους τιμές M και M' αντιστοίχως, (ii) τη μέση τιμή του M, $\langle M\rangle$ και (iii) τις τιμές της πιθανότητας $P(M)$ και της μέσης τιμής $\langle M\rangle$ στην περίπτωση που τα συστήματα χωρίζονται ξανά, ώστε να μην είναι πια ελεύθερα να ανταλλάξουν ενέργεια μεταξύ τους.

■ (α) Έχουμε συνολικά $2^N = 2^4 = 16$ καταστάσεις.

	A	*A'*			*M*	*M'*	***M****	*E*	*E'*	***E****
1	+	+	+	+	$3\mu_o$	$3\mu_o$	$\mathbf{6\mu_o}$	$-3\mu_oB$	$-3\mu_oB$	$-6\mu_oB$
2	+	+	+	-	$3\mu_o$	μ_o	$\mathbf{4\mu_o}$	$-3\mu_oB$	$-\mu_oB$	$-4\mu_oB$
3	+	+	-	+	$3\mu_o$	μ_o	$\mathbf{4\mu_o}$	$-3\mu_oB$	$-\mu_oB$	$-4\mu_oB$
4	+	-	+	+	$3\mu_o$	μ_o	$\mathbf{4\mu_o}$	$-3\mu_oB$	$-\mu_oB$	$-4\mu_oB$
5	+	+	-	-	$3\mu_o$	$-\mu_o$	$\mathbf{2\mu_o}$	$-3\mu_oB$	μ_oB	$-2\mu_oB$
6	+	-	+	-	$3\mu_o$	$-\mu_o$	$\mathbf{2\mu_o}$	$-3\mu_oB$	μ_oB	$-2\mu_oB$
7	+	-	-	+	$3\mu_o$	$-\mu_o$	$\mathbf{2\mu_o}$	$-3\mu_oB$	μ_oB	$-2\mu_oB$
8	+	-	-	-	$3\mu_o$	$-3\mu_o$	**0**	$-3\mu_oB$	$3\mu_oB$	0
9	-	+	+	+	$-3\mu_o$	$3\mu_o$	**0**	$3\mu_oB$	$-3\mu_oB$	0
10	-	+	+	-	$-3\mu_o$	μ_o	$\mathbf{-2\mu_o}$	$3\mu_oB$	$-\mu_oB$	$2\mu_oB$
11	-	+	-	+	$-3\mu_o$	μ_o	$\mathbf{-2\mu_o}$	$3\mu_oB$	$-\mu_oB$	$2\mu_oB$
12	-	-	+	+	$-3\mu_o$	μ_o	$\mathbf{-2\mu_o}$	$3\mu_oB$	$-\mu_oB$	$2\mu_oB$
13	-	+	-	-	$-3\mu_o$	$-\mu_o$	$\mathbf{-4\mu_o}$	$3\mu_oB$	μ_oB	$4\mu_oB$
14	-	-	+	-	$-3\mu_o$	$-\mu_o$	$\mathbf{-4\mu_o}$	$3\mu_oB$	μ_oB	$4\mu_oB$
15	-	-	-	+	$-3\mu_o$	$-\mu_o$	$\mathbf{-4\mu_o}$	$3\mu_oB$	μ_oB	$4\mu_oB$
16	-	-	-	-	$-3\mu_o$	$-3\mu_o$	$\mathbf{-6\ \mu_o}$	$3\mu_oB$	$3\mu_oB$	$6\mu_oB$

το + ισοδυναμεί με σπιν ↑,δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το **B**

το - ισοδυναμεί με σπιν↓, δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το **-B**

Το σύστημα αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση # 9 με ολική μαγνητική ροπή ***M**** = 0 (και συνεπώς με ολική ενέργεια $E^* = 0$)

	A	*A'*			*M*	*M'*	***M****	*E*	*E'*	***E****
9	-	+	+	+	$-3\mu_o$	$3\mu_o$	**0**	$3\mu_oB$	$-3\mu_oB$	0

Αφού έρθουν σε επαφή τα δύο συστήματα, το ολικό σύστημα μπορεί να βρίσκεται σε όλες τις καταστάσεις που έχουν ολική μαγνητική ροπή ***M**** = 0 (και συνεπώς ολική ενέργεια $E^* = 0$) Οι καταστάσεις αυτές (δύο τον αριθμό) είναι οι # 8 και 9, όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας

	A	*A'*			*M*	*M'*	***M****	*E*	*E'*	***E****
8	+	-	-	-	$3\mu_o$	$-3\mu_o$	**0**	$-3\mu_oB$	$3\mu_oB$	0
9	-	+	+	+	$-3\mu_o$	$3\mu_o$	**0**	$3\mu_oB$	$-3\mu_oB$	0

(βi,ii, iii) Παρατηρούμε ότι η μαγνητική ροπή, *M*, του *A* και η μαγνητική ροπή, *M΄*, του *A΄* παίρνουν τις τιμές
$M = -3\mu_o$ και $M' = 3\mu_o$ μία φορά (#9)
και $M = 3\mu_o$ και $M' = -3\mu_o$ μία φορά (#8)

Άρα,
$P(M=-3\mu_o) = 1/2$, $P(M= 3\mu_o) = 1/2$
και $\langle M\rangle = (-3\mu_o)P(M = -3\mu_o) + (3\mu_o)P(M =3\mu_o) = (-3\mu_o)(1/2) +(3\mu_o)(1/2) = 0$
Αντιστοίχως,
$P(M'=3\mu_o) = 1/2$, $P(M'= -3\mu_o) = 1/2$
και $\langle M\rangle = (3\mu_o)P(M'= 3\mu_o) + (-3\mu_o)P(M' =-3\mu_o) = (3\mu_o)(1/2) +(-3\mu_o)(1/2) = 0$

Συνεπώς, $\langle M\rangle = 0$ και $\langle M''\rangle= 0$ και βέβαια, $\langle \boldsymbol{M^*}\rangle =\langle M\rangle +\langle M'\rangle= 0+0 = 0$.

(β iv) Στην περίπτωση που τα συστήματα Α και *A΄* χωρίζονται ξανά, ώστε να μη μπορούν να ανταλλάξουν ενέργεια μεταξύ τους, οι τιμές της πιθανότητας P(*M*), καθώς και η μέση μαγνητική ροπή $\langle M\rangle$, δεν θα αλλάξουν.

2) Ένα σύστημα έχει τέσσερις ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, $\varepsilon_3 = 3\varepsilon$, $\varepsilon_4 = 4\varepsilon$ ($\varepsilon>0$), και αντίστοιχους εκφυλισμούς $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 3$, $g_4 = 4$. Το σύστημα αυτό βρίσκεται σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T και αποτελείται από N σωματίδια τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.
(α) Να γράψετε τη συνάρτηση επιμερισμού Z του συστήματος των N σωματιδίων ως συνάρτηση των ε και T.
(β) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του συστήματος.
(γ) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του συστήματος όταν (i) $T \to 0$, (ii) $T = \varepsilon/(k_B \ln 2)$ και (iii) $T \to \infty$.
(δ) Με ποιον τρόπο κατανέμονται 2080 σωματίδια στις τέσσερις ενεργειακές στάθμες για τις τρεις περιπτώσεις του ερωτήματος (γ); Η θερμοκρασία $T = \varepsilon/(k_B \ln 2)$ είναι υψηλή ή χαμηλή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

---------- ---------- ---------- ---------- $\varepsilon_4 = 4\varepsilon$ $g_4 = 4$
---------------- ----------------- -------------- $\varepsilon_3 = 3\varepsilon$ $g_3 = 3$
------------------------ ------------------------ $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$ $g_2 = 2$
--- $\varepsilon_1 = \varepsilon$ $g_1 = 1$

(α) Για το ένα σωματίδιο: Η συνάρτηση επιμερισμού είναι
$\zeta = \sum g_i \exp(-\beta\varepsilon_i) = \exp(-\beta\varepsilon_1) + 2\exp(-\beta\varepsilon_2) + 3\exp(-\beta\varepsilon_3) + 4\exp(-\beta\varepsilon_4) =$
$= e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + 3e^{-3\beta\varepsilon} + 4e^{-4\beta\varepsilon}$
Για N μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια, η συνάρτηση επιμερισμού, Z, είναι:

$$\boxed{Z = \zeta^N = (e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + 3e^{-3\beta\varepsilon} + 4e^{-4\beta\varepsilon})^N}$$

(β) Μέση ενέργεια ανά σωματίδιο:

$$< \varepsilon > = \frac{\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_\iota g_i e^{-\beta\varepsilon_i}}{\zeta} = \left(\frac{e^{-\beta\varepsilon} + 4e^{-2\beta\varepsilon} + 9e^{-3\beta\varepsilon} + 16e^{-4\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + 3e^{-3\beta\varepsilon} + 4e^{-4\beta\varepsilon}}\right)\epsilon$$
$$= \left(\frac{1 + 4e^{-\beta\varepsilon} + 9e^{-2\beta\varepsilon} + 16e^{-3\beta\varepsilon}}{1 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + 4e^{-3\beta\varepsilon}}\right)\epsilon$$

ή
$< \varepsilon > = -\frac{\partial \ln \zeta}{\partial \zeta} = \cdots$
Μέση ενέργεια του συστήματος των N σωματιδίων:

$$\boxed{< E > = N < \varepsilon > = \left(\frac{1 + 4e^{-\beta\varepsilon} + 9e^{-2\beta\varepsilon} + 16e^{-3\beta\varepsilon}}{1 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + 4e^{-3\beta\varepsilon}}\right)N\epsilon}$$

(γ)

$T \to 0$ ($\beta \to \infty$): $e^{-n\beta\varepsilon} \to 0$ ($n>0$) $<E(T\to 0)> = N\varepsilon$

$T = \varepsilon/(k_B \ln 2)$: $\beta\varepsilon = \ln 2$ και άρα $e^{-\beta\varepsilon} = ½$
$\zeta(T = \varepsilon/[k_B \ln 2]) = (1/2)+2(1/4)+3(1/8)+4(1/16) = 13/8$
$<E(T = \varepsilon/[k_B \ln 2])> = (8/13)(1/2 + 4/4 + 9/8 + 16/16) N\varepsilon = (29/13) N\varepsilon = 2{,}23\, N\varepsilon$

$T \to \infty$ ($\beta \to 0$): $e^{-n\beta\varepsilon} = 1$
$\zeta(T\to\infty) = 1+2+3+4 = 10$ $<E(T\to\infty)> = \{(1+4+9+16)/(1+2+3+4)N\varepsilon = 3\, N\varepsilon$

(δ)

$$N_i = N\, g_i\, \frac{e^{-\beta\varepsilon_i}}{\zeta}$$

$$N_1 = N\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\zeta}$$

$$N_2 = N\frac{2e^{-2\beta\varepsilon}}{\zeta}$$

$$N_3 = N\frac{3e^{-3\beta\varepsilon}}{\zeta}$$

$$N_4 = N\frac{4e^{-4\beta\varepsilon}}{\zeta}$$

T= 0 K $\quad N_1 = N = 2080$, $N_2 = N_3 = N_4 = 0$

-----0---- -----0---- ---0------ ----0----- T = 0 K
-------0-------- --------0-------- -------0------
------------0------------ ----------0------------
----------------------2080------------------------

T = $\varepsilon/(k_B \ln 2)$ $\quad \zeta\,(T = \varepsilon/[k_B \ln 2]) = 13/8$ και
$N_1 = N(8/13)(1/2) = 4N/13 = 640$ σωματίδια,
$N_2 = N(8/13)2(1/4) = 4N/13 = 640$, άρα η κάθε μία από τις δύο στάθμες με $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$ έχει από 320 σωματίδια,
$N_3 = N(8/13)3(1/8) = 3N/13 = 3\bullet 160 = 480$, άρα η κάθε μία από τις τρεις στάθμες με $\varepsilon_3 = 3\varepsilon$ έχει από 160 σωματίδια,
$N_4 = N(8/13)4(1/8) = 2N/13 = 4N/26 = 4\bullet 80 = 320$, άρα η κάθε μία από τις τέσσερις στάθμες με $\varepsilon_4 = 4\varepsilon$ έχει από 80 σωματίδια.

----80---- ----80---- ----80---- ----80---- T = $\varepsilon/(k_B \ln 2)$
------160------- ------160-------- -----160------
-------------320--------- -----------320-----------
------------------------640--------------------------

$T\to\infty$ $\quad \zeta(T\to\infty)$ $\quad N_1 = N/10 = 208$,
$N_2 = 2N/10 = 2\bullet 208$ άρα η κάθε μία από τις δύο στάθμες με $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$ έχει από 280 σωματίδια,
$N_3 = 3N/10 = 3\bullet 208$, άρα η κάθε μία από τις τρεις στάθμες με $\varepsilon_3 = 3\varepsilon$ έχει από 208σωματίδια,
$N_4 = N/10 = 4N/10 = 4\bullet 208$, άρα η κάθε μία από τις τέσσερις στάθμες με $\varepsilon_4 = 4\varepsilon$ έχει από 208 σωματίδια.
---208---- ---208---- ---208---- ---208---- $T\to\infty$
------208------- --------208------ ------208-------
----------208------------- ----------208-------------
--------------------------208-------------------------

3) Ένα θερμικά μονωμένο χάλκινο δοχείο με μάζα 1000 gram βρίσκεται σε θερμοκρασία 80 ^oC. Προσθέτουμε στο δοχείο 100 g πάγου σε θερμοκρασία -10 ^oC και απομονώνουμε. (α) Θα λυώσει όλος ο πάγος; Εάν ναι, ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία του συστήματος; Εάν όχι, πόσος πάγος θα λυώσει; (β) Να υπολογίσετε την ολική μεταβολή στην εντροπία που θα επέλθει στο σύστημα.
Η ειδική θερμότητα του χαλκού είναι 0,418 Joules/(g K), η ειδική θερμότητα του νερού είναι 4,18 Joules/(g K) και η ειδική θερμότητα του πάγου είναι 2,13 Joules/(g K). Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 Joules.

(α) Για να φτάσει το χάλκινο δοχείο στους 0 ^oC εκλύει ποσό θερμότητας:
$Q_{Cu} = m_{cu}\, C_{Cu}$ (0 ^oC - 80 ^oC) = (1000 J) (0,418 J/g K) (-80 K) = -33440 J.
Για να αυξηθεί η θερμοκρασία του πάγου από τους -10 ^oC έως τους 0 ^oC, ο πάγος απορροφά ποσό θερμότητας $Q_{πάγου} = m_{πάγου}\, C_{πάγου}$ (0 ^oC + 20 ^oC) = (100 g) (2,13 J/g K) = 2130 J.
Άρα, όλος ο πάγος αυξάνει τη θερμοκρασία του στους 0 ^oC, (και παραμένει πάγος).
Περισσεύει ποσό θερμότητας Q' = 33440 J - 2130 J = 31310 J.
Το ποσό θερμότητας των 31310 J θα μετατρέψει πάγο (στους 0 ^oC) σε νερό (στους 0 ^oC). Συνολικά θα μετατρέψει m = (31310 J)/(333 J/gram) = 94,02 g. Έχουμε λοιπόν, 94,02 g νερού και5,98 g πάγου.
Το σύστημα θα ισορροπήσει στους 0 ^oC: (Το χάλκινο δοχείο στους 0 ^oC, 94,02 g νερού στους 0 ^oC και 5,98 g πάγου στους 0 ^oC).
(β)

$$\Delta S_{Cu} = m_{Cu}\, c_{Cu} \int_{353,16}^{273,16} \frac{dT}{T} = m_{Cu}\, c_{Cu}\, ln \frac{273,16}{353,16} = -107,37 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{πάγου} = m_{πάγου}\, c_{πάγου} \int_{263,16}^{273,16} \frac{dT}{T} = m_{πάγου}\, c_{πάγου}\, ln \frac{273,16}{263,16} = 7,94 \text{ J/K}$$

$\Delta S_{πάγου\ σε\ νερό} = Q'/273,16$ = 31310 J/273,16 K = 114,62 J/K

$\Delta S = \Delta S_{Cu} + \Delta S_{πάγου} + \Delta S_{πάγου\ σε\ νερό}$ = (-107,37 +7,94 +114,62) J/K = 15,19 J/K

4) Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από τρία πανομοιότυπα σωματίδια που ακολουθούν τη στατιστική Bose – Einstein. Υπάρχουν τρεις διαθέσιμες ενεργειακές στάθμες 1, 2, 3 με αντίστοιχες ενέργειες ε, 2ε και 3ε (ε>0). Το σύστημα βρίσκεται σε μία κατάσταση όπου ένα σωματίδιο βρίσκεται στην ενεργειακή στάθμη #2 και τα άλλα δύο σωματίδια στην ενεργειακή στάθμη #3. Να βρείτε τις καταστάσεις του συστήματος με την αμέσως χαμηλότερη ενέργεια και με την αμέσως υψηλότερη ενέργεια. Ποια είναι η βασική κατάσταση του συστήματος; Να βρείτε το λόγο των πιθανοτήτων κατάληψης της κάθε μίας από τις παραπάνω καταστάσεις ως προς τη βασική κατάσταση του συστήματος.

```
----------    ----------    ----o-----    ----------    ----o-----    ---o--o--    -----------
----------    ----o----     ----------    --o--o---     ----o-----    ----------   --o-o-o---
--o-o-o--     --o--o--      --o--o---     ----o-----    ----o-----    -----o---    ------------
E1= 3ε        E2= 4ε        E3= 5ε        E4=  5ε       E5=  6ε       E6= 7ε       E7= 6ε
```

```
----o-----    --o--o--     --o-o-o-
--o-o----     ---o-----    ----------
----------    ----------   ----------
E8= 7ε        E9=8ε        E10= 9ε
```

Αρχικά το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση # 9 με ενέργεια E_9=8ε.
Η κατάσταση με την αμέσως μεγαλύτερη ενέργεια είναι η # 10, με ενέργεια E_{10}= 9ε.
Οι καταστάσεις με την αμέσως μικρότερη ενέργεια είναι οι # 6 και # 8,
με ενέργεια E_6= E_8= 7ε.
Η βασική κατάσταση του συστήματος είναι η # 1 με ενέργεια E_1= 3ε.

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

όπου $Z = \sum_{i=0}^{10} e^{-\beta E_i} = e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon} + 2e^{-5\beta\varepsilon} + 2e^{-6\beta\varepsilon} + 2e^{-7\beta\varepsilon} + e^{-8\beta\varepsilon} + e^{-9\beta\varepsilon}$

$\frac{P_i}{P_j} = \frac{e^{-\beta E_i}}{e^{-\beta E_j}} = e^{-\beta(E_i - E_j)}$

Άρα, (χωρίς να χρειαστούμε τη συνάρτηση επιμερισμού Z),

$$\frac{P_9}{P_1} = \frac{e^{-\beta E_9}}{e^{-\beta E_1}} = \frac{e^{-8\beta\varepsilon}}{e^{-3\beta 3}} = e^{-5\beta\varepsilon}$$

$$\frac{P_{10}}{P_1} = \frac{e^{-\beta E_{10}}}{e^{-\beta E_1}} = \frac{e^{-9\beta\varepsilon}}{e^{-3\beta 3}} = e^{-6\beta\varepsilon}$$

$$\frac{P_6}{P_1} = \frac{P_8}{P_1} = \frac{e^{-\beta E_6}}{e^{-\beta E_1}} = \frac{e^{-7\beta\varepsilon}}{e^{-3\beta 3}} = e^{-4\beta\varepsilon}$$