ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 06/06/2013 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Στατιστική Μηχανική 1.

Θεωρούμε ένα σύστημα N σωματιδίων που έχουν αμελητέα αλληλεπίδραση μεταξύ τους, το καθένα από τα οποία μπορεί να βρίσκεται σε μία από τρεις καταστάσεις με αντίστοιχες ενέργειες $\epsilon_1 = -\epsilon$, $\epsilon_2 = 0$ και $\epsilon_3 = \epsilon$, όπου $\epsilon > 0$. Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία στη θερμοκρασία T.

(α) Να βρείτε τη μέση ενέργεια $\langle E(T)\rangle$, τη θερμοχωρητικότητα $C_V(T)$ και την εντροπία του συστήματος $S(T)$ των N σωματιδιων.

(β) Να βρείτε τις οριακές τιμές των $\langle E(T)\rangle$, $C_V(T)$ και $S(T)$ όταν $T = 0\,\mathrm{K}$ και όταν $T \to \infty$.

Στατιστική Μηχανική 2.

Δίνονται δύο κλειστά συστήματα, A_1 και A_2 αποτελούμενα από N ανεξάρτητα σωματίδια το καθένα. Το κάθε σωματίδιο στο A_1 μπορεί να καταλάβει, μία από τις δύο μη εκφυλισμένες κβαντικές στάθμες ($-\epsilon$, $+\epsilon$) και κάθε σωματίδιο στο A_2 μπορεί να καταλάβει, μία από τις δύο μη εκφυλισμένες κβαντικές στάθμες $(0, +2\epsilon)$. Το σύστημα A_1 έχει αρχικά ενέργεια $E_{1\alpha} = 0,5N\epsilon$, ενώ το σύστημα A_2 έχει αρχικά ενέργεια $E_{2\alpha} = 0,3N\epsilon$.

(α) Να βρείτε τις αρχικές θερμοκρασίες $T_{1\alpha}$ και $T_{2\alpha}$ των συστημάτων A_1 και A_2 για τις δεδομένες αρχικές ενέργειες $E_{1\alpha}$, $E_{2\alpha}$.

(β) Στη συνέχεια φέρνουμε τα δύο συστήματα A_1 και A_2 σε θερμική επαφή. Να βρείτε την τελική θερμοκρασία, T_f του συστήματος A_{12} όταν επέλθει η θερμοδυναμική ισορροπία. Να συγκρίνετε την τελική θερμοκρασία T_f με την αρχική θερμοκρασία $T_{2\alpha}$ και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα που προκύπτει.

Υπόδειξη: Για ένα σύστημα, A_j, N μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων που μπορούν να καταλάβουν μία από τις δύο κβαντικές στάθμες ϵ_1 και ϵ_2 ($\epsilon_2 > \epsilon_1$), η σχέση θερμοκρασίας (T_j) - ενέργειας (E_j) δίνεται από τη σχέση

$$kT_j = (\epsilon_2 - \epsilon_1)/\ln\left[\frac{N\epsilon_2 - E_j}{-N\epsilon_1 + E_j}\right]$$

Κβαντομηχανική 1.

Ηλεκτρόνιο μάζας m κινείται μέσα σε τρισδιάστατο χώρο όπου συνυπάρχει δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή $V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$ και ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. Το πεδίο $\boldsymbol{B}$ υπεισέρχεται στην εξίσωση Schrödinger μέσω της αντικατάστασης $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$, όπου $\boldsymbol{p}$ ο τελεστής της ορμής στις 3 διαστάσεις, e το φορτίο του ηλεκτρονίου, c η ταχύτητα του φωτός και $\boldsymbol{A}$ το διανυσματικό δυναμικό. Δίνεται ότι το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ περιγράφεται από το $\boldsymbol{A} = -yB\hat{\boldsymbol{x}}$.

(α) Δείξτε ότι αν H είναι ο τελεστής της χαμιλτονιανής του ηλεκτρονίου, τότε ισχύει $[p_x, H] = 0$, όπου p_x είναι η x-συνιστώσα του τελεστή της ορμής. Δείξτε ακόμη ότι μία ιδιοσυνάρτηση της χαμιλτονιανής μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\psi(x, y, z) = e^{ik_x x} f(y) g(z)$, όπου k_x πραγματικός αριθμός.

(β) Βρείτε τις ιδιοενέργειες του ηλεκτρονίου (δηλαδή δώστε μία σχέση που να δίνει σε κλειστή μορφή τις διακριτές ενεργειακές στάθμες του προβλήματος). Υπάρχει εκφυλισμός στη βασική κατάσταση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Κβαντομηχανική 2.

Το δευτέριο είναι μια δέσμια κατάσταση πρωτονίου και νετρονίου, που θεωρούνται ότι έχουν ίσες μάζες M. Υποτίθεται ότι το σύστημα μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός τετραγωνικού πηγαδιού με δυναμικό $V(r) = -V_0 < 0$, που εκτείνεται από $r = 0$ μέχρι $r = R$ και ότι η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση είναι σφαιρικά συμμετρική. Το δυναμικό μηδενίζεται για $r > R$. Η ζεύξη θεωρείται χαλαρή, δηλαδή η ενέργεια σύνδεσης E_B είναι πολύ μικρότερη από το βάθος του πηγαδιού: $E_B << V_0$ (θεωρούμε ότι E_B είναι η απόλυτη τιμή της ενέργεια σύνδεσης).
(1) Δείξτε ότι, σε καλή προσέγγιση, το kR ισούται περίπου με $\pi/2$. Δείξτε ότι

$$V_0 R^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\hbar^2}{M}\right)$$

(2) Γράψτε την κυματοσυνάρτηση $\psi(r)$ για τις περιοχές $[0, R]$ και $[R, +\infty)$. Δείξτε ότι η αναμενόμενη τιμή της δυναμικής ενέργειας του δευτερίου σ' αυτήν την κβαντική κατάσταση ισούται με

$$\langle V \rangle = -4\pi V_0 N^2 \left[\frac{R}{2} - \frac{\sin(2kR)}{4k}\right]$$

όπου το N είναι μιά σταθερά κανονικοποίησης.

Υπόδειξη: Για σφαιρικά συμμετρικές καταστάσεις η εξίσωση Schrödinger είναι η

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r))\psi = 0,$$

όπου μ είναι η ανηγμένη μάζα. Ίσως φανεί χρήσιμη η αντικατάσταση: $\psi(r) = u(r)/r$.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος ΙΙ - Παρασκευή 07/06/2013 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

Δύο μεταλλικά αντικείμενα (υλικό πολύ μεγάλης αγωγιμότητας) πεπερασμένων διαστάσεων απέχουν πεπερασμένη απόσταση και βρίσκονται μέσα σε αγώγιμο υλικό με πεπερασμένη αγωγιμότητα σ^*. Ανάμεσα στα δύο αντικείμενα επιβάλλεται, με τη βοήθεια τροφοδοτικού τάσης, μία διαφορά δυναμικού ΔV, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την ροή ρεύματος από το ένα αντικείμενο στο άλλο, αποκλειστικά.

(α) Δείξτε ότι, στη μόνιμη κατάσταση, τα δύο αντικείμενα είναι φορτισμένα με ίσα και αντίθετα φορτία, (έστω, $\pm Q$), και επομένως χαρακτηρίζονται από μία χωρητικότητα C. Εξηγήστε αν τα φορτία αυτά είναι κατανεμημένα με τη μορφή φορτίων χώρου ή επιφανειακών φορτίων.

(β) Δείξτε ότι, μετά την αποκατάσταση μόνιμης κατάστασης (όταν κανένα μέγεθος δεν μεταβάλλεται με το χρόνο), η πυκνότητα φορτίων, στον μεταξύ των δύο αντικειμένων χώρο, είναι $\rho = 0$.

(γ) Δείξτε ότι η αντίσταση R και η χωρητικότητα C του συστήματος συνδέονται με τη σχέση $RC = \epsilon_0/\sigma^*$.

(δ) Δείξτε ότι κατά τις μεταβατικές καταστάσεις, (αμέσως μετά την εφαρμογή τάσης, ή, αμέσως μετά την διακοπή της τάσης), όλα τα ηλεκτρικά μεγέθη μεταβάλλονται με εκθετικό τρόπο με το χρόνο, και υπολογίστε την σταθερά χρόνου αυτής της μεταβολής.

ΗΜ 2.

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχει συνιστώσες

$$E_x(z,t) = A\cos(\omega t)\cos(kz), \quad E_y(z,t) = E_z(z,t) = 0$$

(α) Βρείτε το χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο (με μηδενική μέση χρονική τιμή) που αντιστοιχεί σε αυτό το ηλεκτρικό πεδίο. Σχεδιάστε το προκύπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο χώρο.

(β) Υπολογίστε για το στάσιμο αυτό κύμα την ολική στιγμιαία ενέργεια, $W(t)$, ανάμεσα σε ένα δεσμό και τη γειτονική κοιλία του ηλεκτρικού πεδίου.

Μηχανική 1.

(α) Αν $L = L(q_1, q_2, ..., q_n, t)$ είναι η λαγκρανζιανή κάποιου συστήματος,δείξτε με απευθείας αντικατάσταση ότι η λαγκρανζιανή

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}F(q_1, q_2, ..., q_n, t)}{\mathrm{d}t}$$

οδηγεί στις ίδιες (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης για τα $q_1, q_2, ..., q_n$.

(β) Υποθέστε ότι είναι γνωστό πειραματικά ότι σωμάτιο που αφέθηκε ελεύθερο να πέσει μέσα σε πεδίο βαρύτητας έντασης g, διήνυσε μια δεδομένη κατακόρυφη απόσταση y_0 σε χρόνο $t_0 = \sqrt{2y_0/g}$. Δεν είναι όμως γνωστός ο χρόνος πτώσης για άλλες αποστάσεις $y \neq y_0$, δεν ξέρομε αν ισχύει ο ίδιος τύπος. Βρείτε τη λαγκρανζιανή για το πρόβλημα υποθέτοντας ότι ο άξονας y είναι θετικός προς τα κάτω, η κίνηση να ληφθεί ως μονοδιάστατη εξαρχής. Υποθέστε ότι είναι γνωστό ότι υπάρχει η εξής εξάρτηση $y = at + bt^2$. Αν οι σταθερές a, b ληφθούν έτσι που για πτώση y_0 ο σωστός χρόνος πτώσης είναι ο ανωτέρω t_0, δείξτε με απευθείας υπολογισμό, ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{t_0} L\mathrm{d}t$$

έχει μέγιστη τιμή αν οι παράμετροι έχουν τιμές $a = 0$, $b = g/2$. Προσοχή να μην ακολουθήσετε τη διαδικασία της εξίσωσης Λαγκράνζ.

Μηχανική 2.

(α) Δείξτε ότι η πραγματική διαδρομή μεταξύ δυο σημείων που διανύει σωμάτιο που κινείται στο επίπεδο, εκτός πεδίου δυνάμεων, είναι η ευθεία που ενώνει τα δυο σημεία. Να λύσετε το πρόβλημα βρίσκοντας την λαγκρανζιανή του προβλήματος που το ολοκλήρωμά της κατά μήκος οποιασδήποτε διαδρομής μεταξύ δυο σημείων δίνει το μήκος της διαδρομής. Στη συνέχεια απαιτήστε η πραγματική διαδρομή να έχει ελάχιστο μήκος οπότε θα καταλήξετε στην (διαφορική) εξίσωση που θα σας οδηγήσει στη λύση του προβλήματος.

(β) Αν σε ένα σύστημα υπάρχουν κρουστικές (γενικευμένες) δυνάμεις, δηλαδή δυνάμεις που ασκούνται επί πολύ μικρό χρονικό διάστημα αλλά είναι τόσο μεγάλες ώστε το ολοκλήρωμα

$$S_j = \int_{t_i}^{t_f} Q_j \mathrm{d}t, \qquad (\Delta t = t_f - t_i \to 0)$$

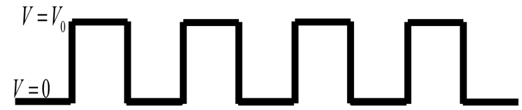
που είναι η (γενικευμένη) ώθηση να είναι πεπερασμένο, τότε να δείξετε ότι οι εξισώσεις Λαγκράνζ γίνονται

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_i = S_j$$

Οι δείκτες i, f δηλώνουν την κατάσταση πολύ λίγο πριν και πολύ λίγο μετά την κρούση. Η S_j είναι η ώθηση της γενικευμένης συνιστώσας δύναμης που αντιστοιχεί στην q_j

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_j} = 0, \quad \dot{y}_j = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad L = L(y, \dot{y}, x)$$

Στερεά Κατάσταση 1.



Το δυναμικό που αντιλαμβάνονται τα ηλεκτρόνια σθένους σε ένα μονοδιάστατο κρύσταλλο σταθεράς πλέγματος α μπορεί να προσεγγιστεί από μία αλληλουχία φραγμάτων δυναμικού, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρήστε ότι για επίπεδο κύμα ενέργειας $E(E > V_0)$ που προσπίπτει (είτε από δεξιά, είτε από αριστερά) υπάρχει συντελεστής ανακλαστικότητας (διέλευσης) $r(t)$.

(α) Δείξτε ότι αν k είναι το κυματάνυσμα που εισάγει το θεώρημα Bloch και $E = \hbar^2 K^2/2m_e$ (όπου m_e είναι η μάζα του ηλεκτρονίου) τότε ισχύει η σχέση

$$\cos(k\alpha) = \frac{t^2 - r^2}{2t} e^{iK\alpha} + \frac{1}{2t} e^{-iK\alpha} \tag{1}$$

(β) Ισχύει ότι αν $t = |t|e^{i\delta}$ τότε $|t|^2 + |r|^2 = 1$ και $r = \pm i|r|e^{i\delta}$. Αποδείξτε ότι έτσι η σχέση διασποράς (1) παίρνει τη μορφή

$$\cos(k\alpha) = \frac{\cos(K\alpha + \delta)}{|t|} \tag{2}$$

Επιχειρηματολογήστε ότι η σχέση (2) έχει ως άμεση συνέπεια την ύπαρξη ενεργειακών χασμάτων. Στην περίπτωση $E \gg V_0$ είναι $\delta \approx 0$ και $|t| \approx 1$. Δείξτε ότι τότε τα ενεργειακά χάσματα εμφανίζονται κοντά στα επίπεδα Bragg του μονοδιάστατου κρυστάλλου.

Στερεά Κατάσταση 2.

(α) Πώς προκύπτουν υπολογιστικά η πυκνότητα μάζας και πώς η διηλεκτρική σταθερά ενός σύνθετου υλικού από τις αντίστοιχες ιδιότητες των δύο συνιστωσών· Γιατί αυτή η διαφορετική συμπεριφορά; Τί άλλες πληροφορίες απαιτούνται για τον υπολογισμό σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις;

(β) Τί είναι τα συμπολυμερή κατά συστάδες ή αδρομερή συμπολυμερή (block copolymers); Εξηγείστε την έννοια της αυτο-οργάνωσης με βάση αυτά τα υλικά.

(γ) Τι εννοούμε με τον όρο διαφυγή (percolation); Θεωρήστε ότι αναμειγνύουμε ηλεκτρικά αγώγιμες και ηλεκτρικά μονωτικές ισομεγέθεις σφαίρες. Πώς αλλάζει τότε η ηλεκτρική αγωγιμότητα με το κλάσμα των αγώγιμων σφαιρών; Δώστε ένα διάγραμμα και με βάση αυτό ορίστε το κατώφλι αγωγιμότητας. Πώς εξαρτάται το κατώφλι διαφυγής από την διαστατικότητα του προβλήματος; Γιατί; Εξηγήστε.

Λέηζερ & Οπτοηλεκτρονική 1.

(α) Σε μία πειραματική διάταξη χρησιμοποιούμε ένα φίλτρο συμβολής με ζώνη διέλευσης $10\,\mathrm{nm}$ στα $500\,\mathrm{nm}$ για να πετύχουμε ¨μονοχρωματικό φως¨ από πηγή λευκού φωτός. Υπολογίστε το χρόνο και το μήκος συμφωνίας του ¨μονοχρωματικού αυτού φωτός¨ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα σας με το χρόνο και το μήκος συμφωνίας της ακτινοβολίας του laser Nd:YAG, το εύρος ζώνης της οποίας είναι $\Delta\nu = 10\,\mathrm{kHz}$. [40 μονάδες]

(β) Ένα υψηλής ισχύος laser $\mathrm{CO_2}$ έχει συντελεστή ενίσχυσης (απολαβής, κέρδους) ασθενούς σήματος $g_0(\nu_0) = 0,005\,\mathrm{cm}^{-1}$ στο κέντρο της φασματικής γραμμής. Το ενεργό υλικό γεμίζει όλη την οπτική κοιλότητα μεταξύ των δύο κατόπτρων που απέχουν $L = 50\,\mathrm{cm}$. Επίσης υπάρχει εσωτερική απώλεια για μια πλήρη διαδρομή της ακτινοβολίας στο υλικό $S = 2aL = 2\%$.

(i) Υπολογίστε τη διαπερατότητα του κατόπτρου εξόδου για την οποία έχουμε μέγιστη ισχύ εξόδου από το laser.

(ii) Η ένταση κορεσμού του laser αυτού εκτιμάται ότι είναι περίπου $I_{\kappa o\rho} = 100\,\mathrm{kW/cm^2}$. Ποιά είναι η ένταση εξόδου εάν η οπτική κοιλότητα έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να δίνει μέγιστη έξοδο; [60 μονάδες]

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα

Καλή επιτυχία.