ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 26/04/2012 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Στατιστική Μηχανική 1.

Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο πανομοιότυπα σωματίδια. Κάθε σωματίδιο μπορεί να βρίσκεται σε μία από πέντε κβαντικές καταστάσεις, με αντίστοιχες ενέργειες

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon, \qquad \varepsilon_4 = \varepsilon, \qquad \varepsilon_5 = \varepsilon, \qquad\qquad \varepsilon > 0$$

Το σύστημα βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T.

(α) Τα πανομοιότυπα σωματίδια ακολουθούν τη στατιστική Fermi-Dirac.
(i) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος.
(ii) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του συστήματος.
(iii) Ποιες είναι οι οριακές τιμές της ενέργειας και η πιθανότητα κατάληψης της κάθε κατάστασης του συστήματος για τις οριακές περιπτώσεις $T = 0\,\mathrm{K}$ και $T \to \infty$;

(β) Τα πανομοιότυπα σωματίδια ακολουθούν τη στατιστική Bose-Einstein.
(i) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος.
(ii) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του συστήματος.
(iii) Ποιες είναι οι οριακές τιμές της ενέργειας και η πιθανότητα κατάληψης της κάθε κατάστασης του συστήματος για τις οριακές περιπτώσεις $T = 0\,\mathrm{K}$ και $T \to \infty$;

Στατιστική Μηχανική 2.

Θεωρούμε έναν **τρισδιάστατο** ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή που σε πρώτη προσέγγιση μοντελοποιεί την ασθενή αλληλεπίδραση ενός ιόντος του κρυσταλλικού πλέγματος με τα υπόλοιπα ιόντα του πλέγματος σε ένα στερεό.

α) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση επιμερισμού Z του τρισδιάστατου ταλαντωτή.

β) Να υπολογίσετε την εσωτερική ενέργεια U. Πως σχετίζεται η U που βρήκατε με αυτή του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή;

γ) Να υπολογίσετε τη θερμοχωρητικότητα $C = \mathrm{d}U/\mathrm{d}T$ του πλέγματος υποθέτοντας σε πρώτη προσέγγιση ότι αποτελείται από N **ανεξάρτητους τρισδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές όπως οι παραπάνω (προσέγγιση $Einstein$)**. Παίρνοντας τα όρια $T \to 0$ και $T \to \infty$ δώστε ένα διάγραμμα $C(T)$ και σχολιάστε το.

Δίνεται ότι για ένα μονοδιάστατο Αρμονικό Ταλαντωτή έχουμε:

$$\mathcal{Z}_{Quantum} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^n = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh(\hbar\omega/kT)}$$

Κβαντομηχανική 1.

Θεωρήστε ένα κβαντικό σύστημα με τις τρεις ορθοκανονικές καταστάσεις βάσης $|a>,\ |b>$ και $|c>$ συναρτήσει των οποίων μπορεί να γραφτεί η οποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση $|\psi>$. Θεωρούμε τώρα ότι δίνεται η χαμιλτονιανή

$$H = E_0(2|a><a| + 2|b><b| + 2|c><c| - |c><b| - |b><c|)$$

(α) Αναπαραστήστε τις $|a>,\ |b>$ και $|c>$ με τα διανύσματα $(1,0,0),\ (0,1,0)$ και $(0,0,1)$ αντίστοιχα, βρείτε την αναπαράσταση της Χαμιλτονιανής και προσδιορίστε τις ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές.
(β) Έστω ότι το σύστημα τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην κβαντική κατάσταση $|\psi(t=0)> = |c>$. Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση $|\psi(t)>$ οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή και οι πιθανότητες το σύστημα να βρίσκεται, για $t=T$, στις καταστάσεις $|a>,\ |b>$ και $|c>$.

Κβαντομηχανική 2.

Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \frac{2\epsilon}{\hbar}\hat{L}_z - \frac{\epsilon}{\hbar^2}(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_x^2),$$

όπου το ϵ είναι θετική σταθερά και $\hat{L}_k$ είναι η συνιστώσα k του τελεστή της στροφορμής.
(α) Προσδιορίστε το ενεργειακό φάσμα της $\hat{H}$ για ένα σωματίδιο χωρίς σπιν με $l=1$.
(β) Θεωρήστε τώρα ένα σωματίδιο που διέπεται από αυτή τη Χαμιλτονιανή με κυματοσυνάρτηση

$$\psi(\theta,\phi) = N(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta),$$

όπου θ και ϕ οι γωνίες των σφαιρικών συντεταγμένων και N μιά σταθερά κανονικοποίησης. Ποιά είναι η μέση ενέργεια ενός συνόλου σωματιδίων που περιγράφονται από την $\psi(\theta,\phi)$;

Χρήσιμες Σχέσεις:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \mathrm{e}^{\pm i\phi}, \qquad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα.

Καλή επιτυχία.

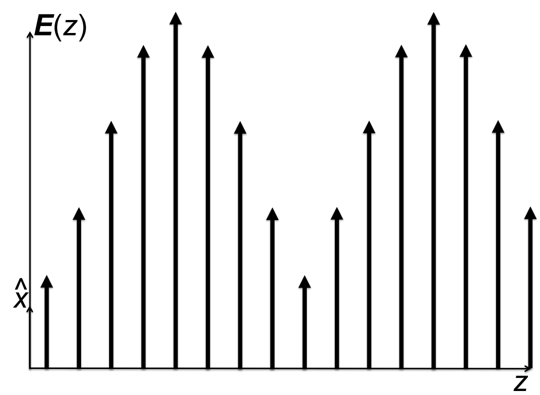
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος II - Παρασκευή 27/04/2012 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.



(α) Θεωρήστε ενα ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = E(z)\hat{\boldsymbol{x}}$ της μορφής του διπλανού σχήματος.
Μπορεί αυτό το ηλεκτρικό πεδίο να παραχθεί από κάποια ηλεκτροστατική κατανομή φορτίου $\rho = \rho(x, y, z)$; Αν ΝΑΙ, από ποιά; Αν ΟΧΙ, γιατί;

(β) Φορτίο $+Q$ είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε κυκλικό δακτύλιο ακτίνας R, ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο (x, y) με κέντρο στο σημείο $(0, 0, 0)$. Γραμμική κατανομή φορτίου σταθερής γραμμικής πυκνότητας $\lambda \equiv \mathrm{d}q/\mathrm{d}z =$ σταθ. > 0 εκτείνεται κατά μήκος της ημιευθείας $-\infty < z \leq 0$.
Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται ανάμεσα στις δύο κατανομές φορτίου.

ΗΜ 2.

Ένας πυκνωτής αποτελείται από δυο παράλληλες κυκλικές πλάκες εμβαδού A σε απόσταση d πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα των βάσεων. Ο χώρος των πλακών περιέχει ένα υλικό με μικρή σταθερή αγωγιμότητα σ και με σχετική επιτρεπτότητα ϵ_r. Οι πλάκες του πυκνωτή είναι αρχικά φορτισμένες με συνολικό φορτίο $+Q_0$ και $-Q_0$ αντίστοιχα και εκφορτίζονται βαθμιαία μέσω του διηλεκτρικού.
(α) Υπολογίστε την πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας $\boldsymbol{J_c}$ μέσα στο υλικό.
(β) Δείξτε ότι κάθε χρονική στιγμή η πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης $\boldsymbol{J_d}$ στο διηλεκτρικό ικανοποιεί τη σχέση $\boldsymbol{J_d} = -\boldsymbol{J_c}$.
(γ) Ποση είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ σε απόσταση R από τον άξονα του συστήματος μεταξύ των πλακών;

Μηχανική 1.

Βρείτε τη λαγκρανζιανή και τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης για απλό επίπεδο εκκρεμές (μέσα σε σταθερό ομογενές πεδίο βαρύτητας, g) με μήκος l και σημειακή μάζα m, του οποίου το σημείο στήριξης κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο του εκκρεμούς σε κύκλο γνωστής ακτίνας a, με δεδομένη σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού.

Μηχανική 2.

Θεωρήστε μια (επίπεδη) τροχαλία με μάζα M και ακτίνα R. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβή, περί σταθερό οριζόντιο άξονα. Στην τροχαλία είναι τοποθετημένο νήμα σταθερού μήκους l, $(l > \pi R)$ με μάζα m ομοιόμορφα κατανεμημένη σε όλο το μήκος του. Στα άκρα του νήματος είναι στερεωμένα σωμάτια μάζας m_1, m_2 αντιστοίχως. Κατά την περιστροφή της τροχαλίας τα δυο σωμάτια κινούνται κατακόρυφα στο πεδίο βαρύτητας g. Βρείτε τη λαγκρανζιανή του συστήματος υποθέτοντας ότι εξετάζετε το σύστημα ως προς άξονα (σύστημα) με αρχή το σημείο περιστροφής της τροχαλίας και κατεύθυνση προς τα κάτω. Βρείτε την εξίσωση κίνησης και τη λύση της αν το σύστημα αφεθεί από κάποια θέση με μηδενική αρχική ταχύτητα.

Στερεά Κατάσταση 1.

(α) Εξηγήστε την αρχή της αυτο-οργάνωσης στην Επιστήμη Υλικών με βάση ένα παράδειγμα.
(β) Τί είναι οι τεχνικές λύματος-πηκτής (sol-gel); Τί πλεονεκτήματα παρουσιάζουν σε σχέση με παραδοσιακές τεχνικές χημείας στερεάς κατάστασης; Γράψετε τις εξισώσεις για τη παρασκευή πυριτίας με τεχνικές λύματος-πηκτής. Πώς τροποποιούνται οι τεχνικές για τη παρασκευή ενός νανοσύνθετου πολυμερούς/πυριτίας; Ποιοί παράγοντες καθορίζουν την ποιότητα της διασποράς των νανοσωματιδίων;
(γ) Τι είναι τα αδρομερή συμπολυμερή ή συμπολυμερή κατά συστάδες (block copolymers); Σε ένα αδρομερές συμπολυμερές δύο συστάδων (diblock) ποιοί παράγοντες ρυθμίζουν τη τελική μορφολογία; Δώστε δύο παραδείγματα τεχνολογικής αξιοποίησης αδρομερών συμπολυμερών και εξηγήστε που στηρίζεται η κάθε εφαρμογή.

Στερεά Κατάσταση 2.

α) Δείξτε ότι κάθε ιδιοσυνάρτηση σε ένα κρυσταλλικό στερεό μπορεί να γραφτεί ως $\psi_k(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} u_k(\boldsymbol{r})$ με $u_k(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}) = u_k(\boldsymbol{r})$, όπου $\boldsymbol{R}$ είναι διάνυσμα του πλέγματος Bravais του κρυστάλλου.
β) Αν τα ηλεκτρόνια του κρυστάλλου είναι υπό την επίδραση μόνο του ιοντικού δυναμικού $V(\boldsymbol{r})$ (δηλαδή αν αγνοήσουμε τις αλληλεπιδράσεις Coulomb μεταξύ των ηλεκτρονίων), τότε δείξτε ότι οι περιοδικές συναρτήσεις $u_k(\boldsymbol{r})$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$\left[\frac{1}{2m_e}\left(\frac{\hbar\nabla_r}{i} + \hbar\boldsymbol{k}\right)^2 + V(\boldsymbol{r})\right] u_k(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_k u_k(\boldsymbol{r})$$

γ) Χρησιμοποιώντας θεωρία διαταραχών δείξτε ότι για τις ιδιοενέργειες $\varepsilon_k^{(n)}$ της ενεργειακής ζώνης n και για δύο γειτονικά κυματανύσματα $\boldsymbol{k}$ και $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}$ ισχύει η σχέση

$$\varepsilon_{k+q}^{(n)} = \varepsilon_k^{(n)} + \frac{\hbar}{m_e}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}^{(nn)}(\boldsymbol{k}) + \frac{\hbar^2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}}{2m_e} + \frac{\hbar^2}{m_e^2}\sum_{n'\neq n}\frac{\left|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}^{(nn')}(\boldsymbol{k})\right|^2}{\varepsilon_k^{(n)} - \varepsilon_k^{(n')}} \quad \text{όπου} \quad \boldsymbol{p}^{(nn')}(\boldsymbol{k}) \equiv -i\hbar\left\langle\psi_k^{(n')}\right|\nabla\left|\psi_k^{(n)}\right\rangle$$

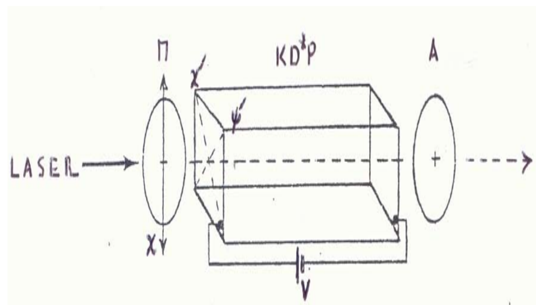
Οι διορθώσεις $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης για τις ιδιοενέργειες ε_i ενός κβαντικού συστήματος παρουσία μιας διαταραχής ΔV δίνονται από τις σχέσεις

$$\Delta\varepsilon_i^{(1)} = \langle i\,|\Delta V|\,i\rangle\,, \qquad \Delta\varepsilon_i^{(2)} = \sum_{j\neq i} \frac{|\langle i\,|\Delta V|\,j\rangle|^2}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$$

Ισχύει ακόμη $\nabla\left(\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = i\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

Λέηζερ & Οπτοηλεκτρονική 1.

Δέσμη ορατού LASER He-Ne περνά από πολωτή προσανατολισμένο στις 45^o ως προς τον άξονα $x^{'}$ και στη συνέχεια από ηλεκτροοπτικό κρύσταλλο $\mathrm{KD^*P}$ και αναλυτή όπως δείχνει το σχήμα (στοιχείο POCKELS). Δίνονται τα $n_0 = 1,5$ και $r_{63} = 20 \times 10^{-12}$ του $\mathrm{KD^*P}$. Τι τάση πρέπει να εφαρμόσουμε στο $\mathrm{KD^*P}$, ώστε η ένταση που ανιχνεύεται μετά τον αναλυτή να είναι:



(α) μηδέν όταν ο αναλυτής είναι "παράλληλος" στον πολωτή, (20/100 μονάδες).
(β) το 1/4 της αρχικής όταν ο αναλυτής σχηματίζει γωνία 15^o με τον άξονα $x^{'}$, (80/100 μονάδες).
Υπενθύμιση:

$$\Delta\phi = 2\pi n_0^3 r_{63} V/\lambda$$

Ενδεχόμενα Χρήσιμες σχέσεις για τα θέματα Μηχανικής

$$L = T - V, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα

Καλή επιτυχία.