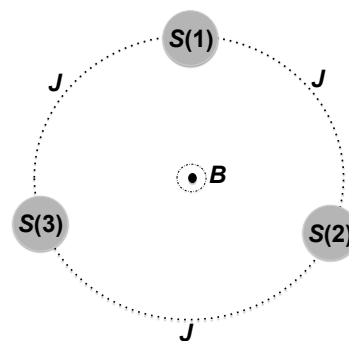


Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 02/12/2010 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Στατιστική Μηχανική 1.

Ένα σύστημα αποτελείται από τρία σωματίδια. Κάθε σωματίδιο, που έχει σπιν $S = 1/2$, είναι συζευγμένο με αλληλεπιδράσεις πρώτων γειτόνων, όπως δείχνει το σχήμα. Το κάθε σωματίδιο έχει μαγνητική ροπή στην ίδια κατεύθυνση με το σπιν, $\mu_i = 2\mu\mathbf{S}(i)$. Το σύστημα τοποθετείται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} στην κατεύθυνση z και βρίσκεται σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία T . Η χαμιλτονιανή του συστήματος δίνεται προσεγγιστικά από το μοντέλο Ising:



$$H = J [S_z(1)S_z(2) + S_z(2)S_z(3) + S_z(3)S_z(1)] - 2\mu B [S_z(1) + S_z(2) + S_z(3)]$$

- (α) Να βρείτε όλες τις μικροκαταστάσεις του συστήματος και την ενέργεια της κάθε μίας από αυτές.
(β) Να περιγράψετε τη βασική κατάσταση του συστήματος για τις περιπτώσεις $\mu B = J/4$ και $\mu B = J$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
(γ) Θεωρήστε ότι $\mu B = J/4$.
(i) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος, καθώς και τη μέση ενέργειά του.
(ii) Θεωρούμε ένα στατιστικό σύνολο από 1296 τέτοια συστήματα. Να βρείτε το πλήθος των συστημάτων που καταλαμβάνουν κάθε μία από τις μικροκαταστάσεις όταν $T = 0$ K και όταν $T = J/(2k_B \ln 2)$.

Στατιστική Μηχανική 2.

Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο σωματίδια. Κάθε ένα από τα σωματίδια μπορεί να βρίσκεται σε μία από τρεις κβαντικές καταστάσεις με αντίστοιχες ενέργειες

$$\epsilon_1 = -\epsilon, \quad \epsilon_2 = 0, \quad \epsilon_3 = \epsilon, \quad (\epsilon > 0)$$

Το σύστημα βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T .

- (α) Τα (διαχωρίσιμα) σωματίδια ακολουθούν τη στατιστική Maxwell - Boltzmann. Να βρείτε:
(i) τη συνάρτηση επιμερισμού,
(ii) την πιθανότητα κατάληψης της κάθε κατάστασης του συστήματος.

(iii) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του συστήματος, καθώς και τις οριακές τιμές της για $T \rightarrow 0$ K και $T \rightarrow \infty$. Να περιγράψετε το σύστημα σε κάθε μία από τις δύο οριακές περιπτώσεις.

(β) Τα (πανομοιότυπα) σωματίδια ακολουθούν τη στατιστική Bose - Einstein. Να βρείτε:

(i) τη συνάρτηση επιμερισμού,

(ii) την πιθανότητα κατάληψης της κάθε κατάστασης του συστήματος.

(iii) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του συστήματος, καθώς και τις οριακές τιμές της για $T \rightarrow 0$ K και $T \rightarrow \infty$. Να περιγράψετε το σύστημα σε κάθε μία από τις δύο οριακές περιπτώσεις.

(γ) Να σχολιάσετε τη διαφορά μεταξύ των περιπτώσεων (α) και (β).

Κβαντομηχανική 1.

Θεωρήστε δύο ταυτοτικά φερμιόνια (σπιν 1/2) τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Κινούνται σε δυναμικό που είναι μηδέν, αν τα x_1 και x_2 βρίσκονται στο διάστημα $(-L, +L)$, ενώ έξω απ' αυτό το διάστημα είναι άπειρο. Βρείτε την (χωρική) κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης των δύο σωματιδίων και την αντίστοιχη ενέργεια :

(i) Για την singlet του σπιν.

(ii) Για την τριπλέτα του σπιν.

Υποθέτουμε τώρα ότι δρα επί πλέον μια αλληλεπίδραση της μορφής $v = v_0 H \delta(x_1 - x_2)$. Το v_0 έχει μονάδες ενέργειας, ενώ το H έχει μονάδες μήκους. Υπολογίστε τη διόρθωση πρώτης τάξης :

(i) Για τη singlet του σπιν.

(ii) Για την τριπλέτα του σπιν.

Υπόδειξη: Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσετε τα τελικά ολοκληρώματα.

Κβαντομηχανική 2.

Θεωρήστε αρμονικό ταλαντωτή με συχνότητα ω . Οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή καταστροφής λέγονται σύμφωνες καταστάσεις αν $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, όπου το λ είναι γενικά μιγαδικός αριθμός.

(α) Δείξτε ότι η κατάσταση $|\lambda\rangle = \exp(\lambda a^\dagger)|0\rangle$ είναι πράγματι σύμφωνη κατάσταση (μην ασχοληθείτε με την κανονικοποίηση).

(β) Προσδιορίστε την κυματοσυνάρτηση $\psi(x) \equiv \langle x|\lambda\rangle$ στο χώρο των θέσεων για τη σύμφωνη κατάσταση. (Βρείτε πρώτα μια διαφορική εξίσωση για την $\psi(x)$).

(γ) Υπολογίστε τις αναμενόμενες τιμές της θέσης και της ορμής για τη σύμφωνη κατάσταση :

$$\langle x \rangle = \frac{\langle \lambda|\hat{x}|\lambda\rangle}{\langle \lambda|\lambda\rangle}, \quad \langle p \rangle = \frac{\langle \lambda|\hat{p}|\lambda\rangle}{\langle \lambda|\lambda\rangle}.$$

(δ) Έστω ότι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει κάποιο σύστημα για $t = 0$ είναι η $|\lambda_0\rangle$. Να δείξετε ότι η κυματοσυνάρτηση θα εξελιχθεί με το χρόνο στην επίσης σύμφωνη κατάσταση $|\lambda(t)\rangle$. Να βρεθεί η σχέση του $\lambda(t)$ με το λ_0 .

Υπενθύμιση:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα.

Καλή επιτυχία.

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος II - Παρασκευή 03/12/10 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

(α) Υπολογίστε το συνολικό δέσμιο φορτίο σε ένα ανομοιογενές πολωμένο διηλεκτρικό υλικό τυχαίου σχήματος και δείξτε ότι είναι ανεξάρτητο του όγκου V , του σχήματος, της συνοριακής επιφάνειας S του διηλεκτρικού, και της συνάρτησης πόλωσης $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$.

(β) Υπολογίστε την πυκνότητα δέσμιων φορτίων χώρου και την επιφανειακή πυκνότητα δέσμιων φορτίων, για την περίπτωση ομοιόμορφα πολωμένου, ($\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 = \text{σταθερά}$), διηλεκτρικού υλικού,

(β₁) κυβικού σχήματος, και

(β₂) σφαιρικού σχήματος, και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α).

ΗΜ 2.

(α) Θεωρήστε ένα ισότροπο αλλά ανομοιογενές αγώγιμο μέσο, με αγωγιμότητα βαθμωτή συνάρτηση θέσης ($\sigma^* = \sigma^*(\mathbf{r})$). Χρησιμοποιήστε την τοπική έκφραση του νόμου του Ohm για τα αγώγιμα μέσα, ($\mathbf{J} = \sigma^* \mathbf{E}$), σε συνδυασμό με τη διατήρηση του φορτίου (εξίσωση συνέχειας), και δείξτε, στη στάσιμη κατάσταση (όλα τα μεγέθη σταθερά με το χρόνο), τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγώγιμου μέσου.

(β) Στην περίπτωση που το αγώγιμο μέσο είναι ανομοιογενές (με $\sigma^* = \sigma^*(\mathbf{r})$: γνωστό), δείξτε ότι κατά τη μόνιμη κατάσταση (όλα τα μεγέθη ανεξάρτητα του χρόνου), μέσα στο αγώγιμο μέσο παρατηρείται μη μηδενική πυκνότητα φορτίου που είναι συνάρτηση της θέσης, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, και υπολογίστε την, ως συνάρτηση των ϵ_0 , $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\sigma^*(\mathbf{r})$.

(γ) Στην περίπτωση ομοιογενούς αγώγιμου μέσου ($\sigma^* = \sigma^*(\mathbf{r}) = \text{σταθ.}$), δείξτε ότι, στη μόνιμη κατάσταση τα ρεύματα είναι τέτοια ώστε να υπάρχει μηδενική πυκνότητα φορτίου παντού.

(δ) Θεωρήστε δυο ευθύγραμμους ομοιογενείς αγωγούς μεγάλου μήκους και σταθερής διατομής (εμβαδού S), που ενώνονται στη θέση $x = 0$. Αν η αγωγιμότητα κάθε αγωγού είναι $\sigma^*(x < 0) = \sigma_1^*$ και $\sigma^*(x > 0) = \sigma_2^*$, αντίστοιχα, και διαρρέονται από σταθερό ρεύμα (ως προς το χρόνο) με ομοιόμορφη πυκνότητα $\mathbf{J} = J_0 \hat{x}$, να δείξτε ότι στη θέση $x = 0$ υπάρχει ασυνέχεια του ηλεκτρικού πεδίου και (επομένως) συσσώρευση επιφανειακού φορτίου, και να υπολογίσετε το φορτίο αυτό.

Μηχανική 1.

Σωματίδιο μάζας m εξαναγκάζεται να κινείται χωρίς τριβή πάνω σε κυλινδρική επιφάνεια απείρου ύψους και ακτίνας R . Το σωματίδιο υπόκειται σε ελκτική δύναμη της μορφής $\mathbf{F} = -m\Omega\mathbf{r}$ ($\Omega > 0$ γνωστή σταθερά), όπου το ελκτικό κέντρο O (αρχή των αξόνων x, y, z), βρίσκεται στον άξονα του κυλίνδρου z . Αγνοήστε τη βαρύτητα.

Γράψτε τη λαγκραζιανή που περιγράφει την κίνηση της μάζας m . Κάνετε χρήση των κυλινδρικών συντεταγμένων (ρ, ϕ, z) και μελετήστε την κίνηση (δηλαδή προσδιορίστε τα $\phi(t), z(t)$) υποθέτοντας κατάλληλες αρχικές συνθήκες, όπως $\phi(0) = \phi_0, z(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \omega, \dot{z}(0) = v_0, (\phi_0, v_0$ γνωστά). Περιγράψτε εποπτικά τη χρονική εξέλιξη των βαθμών ελευθερίας του συστήματος ϕ και z .

Δίνεται η έκφραση για την ταχύτητα $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Μηχανική 2.

Υποθέστε ότι όλα όσα ακολουθούν συμβαίνουν στο επίπεδο. Θεωρήστε ότι ένα σύστημα αναφοράς στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\Omega > 0$ ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αν ασκείται γνωστή κεντρική δύναμη $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ πάνω σε υλικό σημείο μάζας m , βρείτε τις εξισώσεις του Lagrange για το υλικό σημείο με συντεταγμένες ως προς το στρεφόμενο σύστημα. Τη στιγμή $t = 0$ οι άξονες των δυο συστημάτων συμπίπτουν.

Στερεά Κατάσταση 1.

Στα νανοσύνθετα υλικά η παρουσία των διεπιφανειών μήτρας-εγκλείσματος είναι σημαντική για τις ιδιότητες του υλικού.

(α) Θεωρήστε ένα νανοσύνθετο με σφαιρικά εγκλείσματα. Με λογικές παραδοχές (π.χ. για το κλάσμα του εγκλείσματος $- 5\%$ κ.β. και το μέγεθος των νανοσωματιδίων $- 10$ nm διάμετρος) εκτιμήστε τη συνολική διεπιφάνεια (m^2/g) και τη μέση απόσταση των σωματιδίων.

(β) Αναφέρετε 1-2 μεθόδους τροποποίησης της ισχύος αλληλεπίδρασης μήτρας-εγκλείσματος (πρόσφυσης) και έτσι των ιδιοτήτων του υλικού.

(γ) Αν τα σωματίδια είναι αγώγιμα (π.χ. μεταλλικά), πώς εξαρτάται η αγωγιμότητα του σύνθετου υλικού από το κλάσμα εγκλείσματος; Τι αλλάζει στην εξάρτηση αυτή αν τα σωματίδια είναι ινώδη (π.χ. νανοσωλήνες άνθρακα);

Δικαιολογείτε όλες σας τις απαντήσεις.

Στερεά Κατάσταση 2.

Υλικό αποτελείται από ταυτόσημα άτομα πυκνότητας N , που δύνανται να προσεγγιστούν κλασικά από έναν πυρήνα και ένα ηλεκτρόνιο φορτίου q και μάζας m , που συνδέεται με τον πυρήνα με ελατήριο σταθεράς k . Οι απώλειες μπορούν να προσεγγιστούν από μια δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας του ηλεκτρονίου. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας ω διαδίδεται στο μέσο αυτό.

(α) Υπολογίστε το δείκτη διάθλασης $n(\omega)$.

(β) Υπολογίστε την εξασθένιση του φωτός στην περίπτωση της μέγιστης απορρόφησης του υλικού.

(γ) Υπολογίστε την ομαδική ταχύτητα και διερευνήστε αν μπορεί να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

Λέζερ & Οπτοηλεκτρονική 1.

(α) Για ένα ενεργό υλικό LASER, σε θερμική ισορροπία, υπολογίστε τη θερμοκρασία στην οποία εξισώνονται οι ρυθμοί αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής, για εκπομπή ακτινοβολίας στα $0,45 \mu\text{m}$.

(β) Υπολογίστε τις ανακλαστικότητες των κατόπτρων που απαιτούνται για να διατηρηθούν οι ταλαντώσεις σε ένα LASER, το οποίο έχει μήκος 0,1 m, θεωρώντας ότι ο συντελεστής απολαβής (ενίσχυσης) ασθενούς σήματος είναι 1 m^{-1} . Τα κάτοπτρα έχουν τις ίδιες ανακλαστικότητες και δεν υπάρχουν άλλες απώλειες στην κοιλότητα του LASER εκτός από αυτές που προκαλούν τα κάτοπτρα.

Ενδεχόμενα χρήσιμες σχέσεις ή σταθερές:

Σταθερά Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$, σταθερά Boltzmann $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$

$$A_{10} = 8\pi \frac{h}{c^3} \nu_{10}^3 B_{10}, \quad \rho_\nu = \frac{8\pi \nu^3 h}{c^3 [e^{h\nu/kT} - 1]}$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα

Καλή επιτυχία.