ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 13/05/10 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Μηχανική 1. Σωματίδιο μάζας m κινείται πάνω σε ευθεία γραμμή και περιγράφεται από τη λαγκραντζιανή

$$L = \frac{1}{12}m^2\dot{x}^4 + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x)$$

όπου $V(x)$ είναι κάποια διαφορίσιμη συνάρτηση της θέσης x του σωματιδίου.
Να βρείτε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης. Ξεκινήστε από αυτή την εξίσωση και δείξτε ότι το σύστημα μπορεί να περιγραφεί κατά τα γνωστά με $V(x)$ τη δυναμική συνάρτηση (δυναμική ενέργεια) του συστήματος.

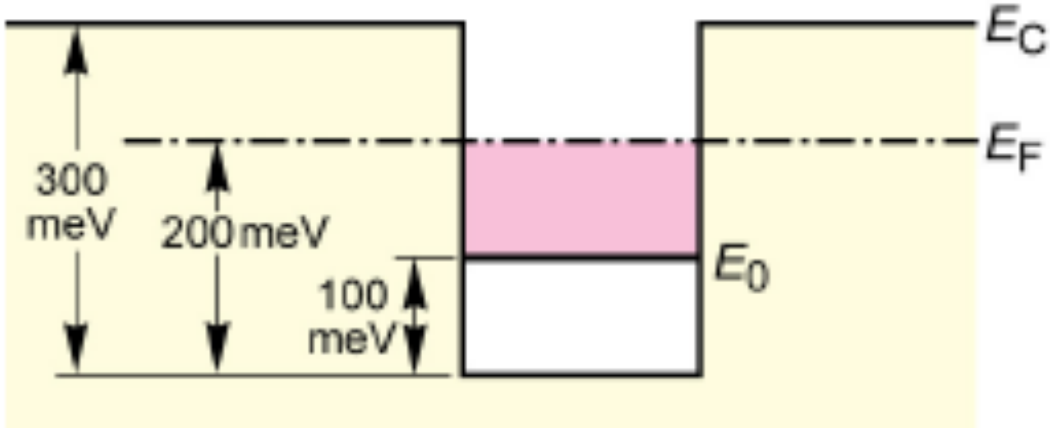
Μηχανική 2.

Δίνεται απλό εκκρεμές με σημειακή μάζα m στο ένα άκρο του. Το μήκος της άμαζης ράβδου του εκκρεμούς είναι d. Το άλλο άκρο, Α, της ράβδου κινείται κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα z σύμφωνα με τη σχέση $z_{\mathrm{A}} = z_{\mathrm{A}}(t) = a + bt^2$, a, b σταθερές. Η κίνηση του εκκρεμούς γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο, μέσα σε σταθερό ομογενές πεδίο βαρύτητας g. Θεωρήστε ως γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία ϕ μεταξύ της ράβδου και του άξονα z ο οποίος έχει θετική φορά προς τα κάτω.
(α) Βρείτε τη λαγκραντζιανή του συστήματος.
(β) Βρείτε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης .
(γ) Στη συνέχεια υποθέστε ότι η γωνία ϕ είναι αρκούντως μικρή ώστε η (διαφορική) εξίσωση κίνησης να είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές. Βρείτε τη συχνότητα ταλάντωσης.
(δ) Κάντε κατάλληλο συλλογισμό που να σας οδηγήσει στη συχνότητα που βρήκατε, χωρίς όμως να λύσετε το πρόβλημα αλλά υποθέτοντας ότι ξέρετε από τη Γενική Φυσική τον τύπο για τη συχνότητα του απλού εκκρεμούς για μικρού πλάτους αιωρήσεις.

Στερεά Κατάσταση 1.

Δίνεται ένα κβαντικό πηγάδι GaAs, όπως φαίνεται στο κάτω σχήμα, το οποίο θεωρήστε το ως διδιάστατο σύστημα ¨ελεύθερων¨ φορέων.
(α) Ποια είναι η πυκνότητα καταστάσεων ανά μονάδα επιφάνειας ενός διδιάστατου κβαντικού πηγαδιού;
(β) Ποια είναι η πυκνότητα φορέων ανά μονάδα επιφάνειας στο συγκεκριμένο κβαντικό πηγάδι για $T = 0$ K;

(γ) Ποια έπρεπε να είναι η πυκνότητα φορέων ανά μονάδα επιφάνειας στο κβαντικό πηγάδι ώστε η επιφάνεια Fermi να φτάσει την ζώνη αγωγιμότητας για $T = 0$ K;
Δίνεται ότι $m^* = 0,067 m_\mathrm{e}$.



Στερεά Κατάσταση 2.

(α) Για ένα άπειρο φύλλο γραφενίου, που συνίσταται από ένα διδιάστατο εξαγωνικό περιοδικό πλέγμα, δίνεται η Χαμιλτονιανή της π-στιβάδας

$$H(\mathbf{k}) = V \begin{pmatrix} 0 & 1 + \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_1} + \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_2} \\ 1 + \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_1} + \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{όπου} \quad \mathbf{a}_1 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2} \right), \quad \mathbf{a}_2 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2} \right)$$

είναι τα διανύσματα βάσης και $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ ο κυματαριθμός.
(α) Διαγωνοποιήστε τον πίνακα και αποδείξτε ότι η σχέση διασποράς της ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$E(k_x, k_y) = \pm V \sqrt{1 + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}k_x a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{k_y a}{2}\right)}$$

(β) Βρείτε την 1^{η} ζώνη Brillouin.
(γ) Υπολογίστε την ενέργεια στα σημεία $K = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, \frac{2\pi}{3a}\right)$ και $M = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, 0\right)$ της $1^{\eta\varsigma}$ ζώνης Brillouin.

Κβαντομηχανική 1.

Ένα σωματίδιο με μάζα μ κινείται σε δακτύλιο με ακτίνα R.
(α) Γράψτε τη Χαμιλτονιανή $\hat{H}$, και
(β) προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας.
(γ) Προσθέστε μια διαταραχή της μορφής $\hat{V} = -\lambda\cos\phi$ και υπολογίστε την ενέργεια της προκύπτουσας θεμελιώδους κατάστασης σε δεύτερη τάξη ως προς λ. Ποιά είναι περίπου η μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει το λ για να είναι ικανοποιητική αυτή η προσέγγιση;

Πιθανώς χρήσιμες σχέσεις:

$$H = \frac{L^2}{2I},\ \hat{L}_z \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi},\ E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)},\ E_0^{(1)} =< 0|\hat{H}|0 >,\ E_0^{(2)} = \sum_{m\neq 0}\frac{|< m|\hat{V}|0 >|^2}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}}.$$

Κβαντομηχανική 2.

Φωτόνιο που οδεύει κατά τον άξονα των z μέσα σε διπλοθλαστικό υλικό περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{pmatrix}$$

Η πιθανότητα το φωτόνιο να είναι πολωμένο κατά τον άξονα των x είναι $|\chi_x|^2$, ενώ για τον άξονα των y είναι είναι $|\chi_y|^2$, όπου, φυσικά, $|\chi_x|^2 + |\chi_y|^2 = 1$. Η κατάσταση πόλωσης του φωτονίου διέπεται από την εξίσωση

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},\quad \hat{H} \equiv \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix}.$$

(1) Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει απορρόφηση από το υλικό, δείξτε ότι $h_{xx}^* = h_{xx},\ h_{yy}^* = h_{yy},\ h_{yx}^* = h_{xy}$.

(2) Για απλότητα μπορείτε στη συνέχεια να θέσετε $h_{xx} = h_{yy} = a,\ h_{xy} = h_{yx} = b$, όπου a και b θετικές πραγματικές σταθερές, με $a > b$. Υποθέστε ότι το φωτόνιο ξεκινάει πολωμένο κατά τον άξονα των x. Ποιά θα είναι η κατάσταση της πόλωσής του τη χρονική στιγμή $T = \frac{\pi\hbar}{4b}$; (Βρείτε πρώτα τις καταστάσεις πόλωσης των οποίων οι πιθανότητες δεν αλλάζουν κατά τη διέλευση από το υλικό. Είναι οι αντίστοιχες των ιδιοτιμών ενέργειας).

Πιθανώς χρήσιμες σχέσεις:

$$\Psi(z,t) = \sum_n \psi_n(z)e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}},\quad \hat{H}\psi_n(z) = E_n\psi_n(z)$$

Κβαντομηχανική 3.

Θεωρήστε σωματίδιο μάζας m που κινείται στο δυναμικό $V(r) = -a\delta(r - r_0),\quad a > 0$. Γράψτε την υπερβατική εξίσωση από την οποία θα προκύψει η ελάχιστη τιμή του a που δίνει δέσμια κατάσταση. Μην επιχειρήσετε να την λύσετε.

Υπενθύμιση: Η εξίσωση για τη συνάρτηση $\chi \equiv r\psi$ είναι: $-\frac{\hbar^2}{2m}\chi'' + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi = E\chi$. Προσοχή στις οριακές συνθήκες.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε (1/2 θέματα Μηχανικής ή 1/2 θέματα Στερεάς Κατάστασης) & 2/3 θέματα Κβαντομηχανικής.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος ΙΙ - Παρασκευή 14/05/10 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

(α) Δυο παράλληλες γραμμικές κατανομές φορτίου απείρου μήκους βρίσκονται σε απόσταση h πάνω από ένα γειωμένο αγώγιμο επίπεδο. Η μεταξύ τους απόσταση είναι $2h$ και έχουν γραμμική πυκνότητα φορτίου $-\lambda$. Ένα θετικό φορτίο Q τοποθετείται σε απόσταση h πάνω από το επίπεδο στο μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο γραμμικών κατανομών φορτίου έτσι ώστε η συνολική δύναμη πάνω στο φορτίο να είναι μηδέν. Βρείτε το Q ως συνάρτηση των λ και h.

(β) Μια σαπουνόφουσκα ακτίνας $R = 10$ cm και πάχους τοιχώματος $d = 3,3 \times 10^{-6}$ cm είναι φορτισμένη και έχει δυναμικό $V = 100$ V. Η σαπουνόφουσκα σπάει και πέφτει με τη μορφή μιας συμπαγούς σφαιρικής σταγόνας. Βρείτε το δυναμικό της σταγόνας θεωρώντας ότι το σαπουνόνερο είναι αγωγός.

ΗΜ 2.

Ένας βρόχος σχήματος παραλληλογράμμου με πλευρές w και l είναι αρχικά ακίνητος (μέσα στο πεδίο βαρύτητας) και αφήνεται για τη χρονική στιγμή $t = 0$ ακριβώς πάνω από μια περιοχή στην οποία έχουμε σταθερό μαγνητικό πεδίο B_o, με κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του κατακόρυφου βρόχου. Ο βρόχος έχει αντίσταση R, αυτεπαγωγή L και μάζα m. Θεωρήστε ότι για $t = 0$ ο βρόχος εφάπτεται του ορίου των δυο περιοχών με το διαφορετικό πεδίο και βρίσκεται στην περιοχή του μηδενικού πεδίου.
(α)Αγνοώντας την αυτεπαγωγή του βρόχου αλλά όχι την αντίσταση, να υπολογίσετε (i) την ταχύτητα του βρόχου ως συνάρτηση του χρόνου, (ii) το ρεύμα που περνά μέσα από την αντίσταση R ως συνάρτηση του χρόνου καθώς και τη φορά του.
(β) Αγνοώντας την αντίσταση του βρόχου αλλά όχι την αυτεπαγωγή, να υπολογίσετε (i) την ταχύτητα του βρόχου ως συνάρτηση του χρόνου, (ii) το ρεύμα που περνά μέσα από την αντίσταση R ως συνάρτηση του χρόνου καθώς και τη φορά του.

ΗΜ 3.

Μαγνητικό δίπολο με μαγνητική διπολική ροπή $\mathbf{m}$ βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_o$, με τα διανύσματα $\mathbf{m}$ και $\mathbf{B}_o$ να είναι προσανατολισμένα αντίθετα.
(α) Δείξτε ότι υπάρχει σφαιρική επιφάνεια, με κέντρο το δίπολο, επί την οποίας το συνολικό ακτινικό μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν, (δηλ., δεν την διαπερνά καμία μαγνητική δυναμική γραμμή), και υπολογίστε την ακτίνα r_o αυτής της επιφάνειας, συναρτήσει των $\mathbf{m}$, $\mathbf{B}_o$, και παγκόσμιων σταθερών.

(β) Πάνω στην σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το δίπολο και ακτίνα r_o, (ερώτημα (α)), να υπολογίσετε την τιμή της εφαπτομενικής συνιστώσας του συνολικού μαγνητικού πεδίου, συναρτήσει του $B_o = |\mathbf{B}_o|$ και της γωνίας θ ως προς την κατεύθυνση του $\mathbf{B}_o$.

[ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Μελετήστε την ακτινική και την εφαπτομενική συνιστώσα κάθε πεδίου, στην επιφάνεια σφαίρας, με κέντρο το δίπολο]

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΣ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

$$\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_o}|}\right) = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r_o}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_o}|^3}, \qquad \int \frac{\mathbf{d}z}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2(z^2+a^2)^{1/2}}, \qquad (1+\epsilon)^a \approx 1+a\epsilon \quad \text{όταν} \quad \epsilon \ll 1$$

Στατιστική Μηχανική 1.

Ένα σύστημα αποτελείται από N σωματίδια με αμελητέα μεταξύ τους αλληλεπίδραση και που το καθένα μπορεί να βρίσκεται σε μία από τρεις καταστάσεις με αντίστοιχες ενέργειες $\epsilon_1 = -\epsilon$, $\epsilon_2 = 0$ και $\epsilon_3 = +\epsilon$, όπου $\epsilon > 0$. Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία σε θερμοκρασία T.
(α) Να βρείτε τη μέση ενέργεια $< E(T) >$, τη μέση τιμή του τετραγώνου της ενέργειας $< E^2(T) >$ και τη θερμοχωρητικότητα $C_{\mathrm{V}}(T)$του συστήματος.
(β) Να βρείτε τη σχέση της $C_{\mathrm{V}}(T)$ με την τυπική απόκλιση, ΔE, της ενέργειας.
(Η τυπική απόκλιση ορίζεται από τη σχέση: $(\Delta E)^2 \equiv < (E - < E >)^2 >$)

Στατιστική Μηχανική 2.

Έστω παγίδα σωματιδίων ικανή να παγιδέψει μέχρι δυο σωματίδια. Κάθε παγιδευμένο σωματίδιο είναι δυνατό να βρίσκεται είτε στο επίπεδο ενέργειας $E_1 = E_o$ είτε στο επίπεδο ενέργειας $E_2 = 3E_o$.
(i) Βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού στο κανονικό σύνολο όταν
(α) Έχουν παγιδευτεί δυο διακριτά σωματίδια
(β) Έχουν παγιδευτεί δυο ταυτόσημα φερμιόνια υποθετικά χωρίς σπιν.
(ii) Θεωρούμε σύστημα N τέτοιων ανεξάρτητων και διακριτών παγίδων σε επαφή με ¨δοχείο¨ σωματιδίων χημικού δυναμικού μ και θερμοκρασίας T.
(α) Βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού στο στατιστικό σύνολο που αναλογεί.
(β) Βρείτε το θερμοδυναμικό δυναμικό που αντιστοιχεί.
(γ) Υποθέτοντας ότι η κάθε παγίδα μπορεί να παγιδεύσει το πολύ ένα σωματίδιο, βρείτε το μέσο αριθμό των παγιδευμένων σωματιδίων.

Στατιστική Μηχανική 3.

Θεωρούμε έναν ¨φραγμένο¨ αρμονικό ταλαντωτή σε ισορροπία σε θερμοκρασία T. Οι ενεργειακές στάθμες του δίνονται όπως και στον απλό αρμονικό ταλάντωτή, $E_n = (1/2+n)\hbar\omega = \epsilon_{\mathrm{o}} + n\epsilon$, υπό τον περιορισμό ότι $n < n_{\mathrm{o}}$. Να υπολογίσετε (σε κλειστή μορφή) στη θερμοκρασία T
(α) τη μέση ενέργεια $< E >$,
(β) τον μέσο αριθμό κατάληψης $< n >$,
(γ) την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz.
Δίνεται:

$$\sum_{i=0}^{m} x_i = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε 1/3 θέματα Στατιστικής & 2/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού ή 2/3 θέματα Στατιστικής & 1/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού

Καλή επιτυχία.