ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Δευτέρα 19/11/2012 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Στατιστική Μηχανική 1.

Θεωρούμε σωματίδια το καθένα από τα οποία έχει **3 προσπελάσιμες καταστάσεις** με αντίστοιχες **ιδιοτιμές της ενέργειας 0, E** και **2E**.

A.1: *(Βαθμολογία 10/100)*

Αν έχουμε ζεύγος τέτοιων σωματιδίων σε επαφή με δοχείο θερμότητας, να βρεθεί η **συνάρτηση επιμερισμού** όταν τα δύο σωματίδια του ζεύγους είναι:

α) ταυτόσημα **μποζόνια**

β) ταυτόσημα **φερμιόνια**

A.2: *(Βαθμολογία 20/100)*

Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από N διακριτά **ζεύγη** τέτοιων σωματιδίων σε θερμική ισορροπία. Να βρείτε το μέσο αριθμό των **ζευγών** των οποίων **η ενέργεια είναι 2E** για τις περιπτώσεις **α)** και **β)** του ερωτήματος **A.1:**.

A.3: *(Βαθμολογία 20/100)*

Αν έχουμε N_{2E} διακριτά ζεύγη των οποίων η ενέργεια είναι 2E, να υπολογίσετε την **εντροπία** του συστήματος των ζευγών αυτών για τις περιπτώσεις **α)**, και **β)** του ερωτήματος **A.1:**. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

A.4: *(Βαθμολογία 50/100)*

Θεωρούμε ότι κάθε διακριτό ζεύγος μπορεί τώρα να μετακινηθεί μέσα σε πεδίο **τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή** το οποίο δεν επηρεάζει τα εσωτερικά ενεργειακά επίπεδα του ζεύγους. (Οι χώροι Hilbert των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας του ζεύγους και των ταλαντώσεων του ζεύγους είναι ανεξάρτητοι). Να υπολογίσετε υπό αυτές τις συνθήκες τη Συνάρτηση Επιμερισμού Z και την Εσωτερική Ενέργεια U ενός συστήματος N διακριτών ζευγών που αποτελούνται από ταυτόσημα **φερμιόνια**.

Δίνεται ότι για ένα μονοδιάστατο Αρμονικό Ταλαντωτή έχουμε:

$$\mathcal{Z}_C = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} \{e^{-\beta\hbar\omega}\}^n = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh(\hbar\omega/2kT)}$$

Στατιστική Μηχανική 2.

Η συνάρτηση επιμερισμού Z ενός συστήματος ταυτόσημων σωματιδίων δίνεται από τη σχέση

$$Z = \prod_q \left(1 \pm e^{-\beta(E_q-\mu)}\right)^{\pm 1} \tag{0}$$

όπου το (+) είναι για **Φερμιόνια** και το (-) για **Μποζόνια**.

B.1: Να βρείτε (παραθέτοντας τις πράξεις) το μέσο αριθμό σωματιδίων $f_q = \langle n_q \rangle$ τα οποία βρίσκονται στην κατάσταση ενός σωματιδίου με ενέργεια E_q και για τις δύο περιπτώσεις.

B.2: Να βρείτε την **εντροπία** του συστήματος **συναρτήσει των** f_q και για τις δύο περιπτώσεις.

Τα δύο ερωτήματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.
Δίνεται ότι: $S = k \ln Z + k\beta U - k\beta\mu\bar{N}$.

Κβαντομηχανική 1.

Θεωρήστε σωματίδιο με μάζα m και σπιν $\frac{1}{2}$ που αλληλεπιδρά με πολύ βαρύ σωματίδιο με σπιν επίσης $\frac{1}{2}$ μέσω του δυναμικού

$$V(r) = \frac{k}{r}\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2,$$

όπου το k είναι θετική σταθερά και το r είναι η απόσταση μεταξύ τους.
(α) Για ποιά τιμή του ολικού σπιν $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ είναι δυνατόν να υπάρξουν δέσμιες καταστάσεις;
(β) Αν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις, να βρεθούν οι ιδιοτιμές ενέργειας για σφαιρικά συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις $(L = 0)$ της μορφής $\psi(r,\theta,\phi) \to R(r) = Ne^{-\lambda r}$.
(γ) Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή $< r >$ της απόστασης (από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το βαρύ σωματίδιο) του σωματιδίου με μάζα m, αν αυτό περιγράφεται από μια τέτοια κυματοσυνάρτηση.

Ενδεχομένως χρήσιμες σχέσεις:

$$\mathbf{s}^2|s>= s(s+1)\hbar^2, \qquad \nabla^2\psi \to \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right), \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}r r^n e^{-ar} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Κβαντομηχανική 2.

Τα παρακάτω αναφέρονται σε κβαντικά συστήματα μίας διάστασης που περιγράφονται εν γένει από μία Χαμιλτονιανή της μορφής

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

(α) Να δείξετε ότι η χρονική εξέλιξη της μέσης τιμής κάποιου φυσικού μεγέθους A περιγράφεται από τη σχέση:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\langle A\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle [A, H] \rangle$$

(β) Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της μέσης τιμής της ορμής σχετίζεται με τη μέση τιμή της δύναμης σύμφωνα με το 2^o νόμο του Νεύτωνα.
(γ) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ μονοδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στην κατάσταση

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0> + |1>)$$

όπου $|0>$ και $|1>$ η βασική και η πρώτη διεγερμένη κατάσταση, αντίστοιχα. Βρείτε τα $\langle x(t) \rangle$, $\langle p(t) \rangle$.

Τυπολόγιο : Για κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή :

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}p, \qquad a|n >= \sqrt{n}|n-1>, \qquad a^\dagger|n >= \sqrt{n+1}|n+1>$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος ΙΙ - Τρίτη 20/11/2012 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

Επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από δύο παράλληλους οπλισμούς, σχήματος δίσκου με ακτίνα R, που απέχουν απόσταση $L << R$ (ώστε να θεωρούμε αμελητέα τα φαινόμενα των άκρων). Μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή παρεμβάλλεται διηλεκτρικό υλικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_r. Το υλικό έχει το γεωμετρικό σχήμα των οπλισμών, έχει σταθερό πάχος $D = aL$, $(0 < a < 1)$, και είναι τοποθετημένο παράλληλα με τους οπλισμούς, όπου οι επιφάνεις του δίσκου του διηλεκτρικού απέχουν x_1 και x_2, από τους απέναντι οπλισμούς, αντίστοιχα, (έτσι ώστε οπλισμοί και διηλεκτρικό να είναι ομοαξονικοί).
(α) Αν η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι ΔV, να υπολογιστεί η τιμή της ηλεκτρικής μετατόπισης (D), του ηλεκτρικού πεδίου (E) και της πόλωσης (P) στην περιοχή μεταξύ των οπλισμών (εντός και εκτός διηλεκτρικού).
(β) Στην ίδια περίπτωση, να υπολογιστούν τα ελεύθερα φορτία στους οπλισμούς, καθώς και η επιφανειακή και η χωρική πυκνότητα δέσμιων φορτίων στο διηλεκτρικό.
(γ) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του συστήματος (εξαρτάται το αποτέλεσμα από την σχετική θέση του διηλεκτρικού ως προς τους οπλισμούς;).

ΗΜ 2.

Σωληνοειδές πολύ μεγάλου μήκους με n βρόχους ανά μονάδα μήκους και ακτίνα a διαρρέεται από ρεύμα I που αυξάνει με σταθερό ρυθμό, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$, και σχετικά αργό, ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε το ρεύμα μετατόπισης. Θεωρήστε ως άξονα z τη κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.
(α) Υπολογίστε το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο στον άξονα x ή y στο εσωτερικό του πηνίου και σε απόσταση r από τον άξονά του.
(β) Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος Poynting $\boldsymbol{S}$ στο σημείο αυτό. Ποια είναι η φυσική σημασία του;

Μηχανική 1.

Υποθέστε ότι έχετε ένα είδος γενικευμένης μηχανικής όπου η λαγκρανζιανή εξαρτάται και από δεύτερες παραγώγους των γενικευμένων συντεταγμένων ως προς το χρόνο, δηλαδή $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Εφαρμόστε την αρχή του Hamilton με τους περιορισμούς ότι στα άκρα της ολοκλήρωσης οι «μεταβολές» (variations) όχι μόνο των q_i αλλά και των $\dot{q}_i$ είναι μηδέν και δείξτε ότι οι (διαφορικές) εξισώσεις των Euler-Lagrange παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Μηχανική 2.

Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του Hamilton (κανονικές εξισώσεις κίνησης) για το σφαιρικό εκκρεμές. Δείξτε τη διαδικασία που θα σας οδηγήσει στην εύρεση της κίνησης του συστήματος , $\phi = \phi(t),\ \theta = \theta(t)$.

Στερεά Κατάσταση 1.

Θεωρήστε μία διάταξη μέτρησης Hall, στην οποία ο ημιαγωγός είναι ενδογενές γερμάνιο (Ge), με ευκινησίες φορέων $\mu_e = 4000\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$ και $\mu_h = 2000\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$, αντίστοιχα. Θεωρήστε γνωστό ότι, στην περίπτωση που έχουμε δύο είδη φορέων, ο συντελεστής Hall δίνεται από τη σχέση

$$R_H = \frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{e(p\mu_h + n\mu_e)^2}$$

και θεωρήστε ότι στο Γερμάνιο έχουμε ίσες ενεργές πυκνότητες καταστάσεων στις ζώνες σθένους και αγωγιμότητας, $N_V = N_C = 9,5 \times 10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}$, και ενεργειακό χάσμα $E_g \approx 0,600\,\mathrm{eV}$.
(α) Υπολογίστε την ενδογενή συγκέντρωση φορέων του Γερμανίου και τον συντελεστή Hall του ενδογενούς γερμανίου. Πότε μηδενίζεται ο συντελεστής Hall ενός ενδογενούς ημιαγωγού;
(β) Στην περίπτωση που οι διαστάσεις του ενδογενούς γερμανίου, της διάταξης Hall, είναι $L_x \times L_y \times L_z = 10\,\mathrm{mm} \times 2\,\mathrm{mm} \times 0,5\,\mathrm{mm}$, η διαφορά δυναμικού που εφαρμόζεται κατά μήκος της διεύθυνσης x είναι $V = 5\,\mathrm{V}$, και το μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται κατά μήκος της διεύθυνσης z είναι $B = 500\,\mathrm{G}$, να υπολογίσετε την πυκνότητα ρεύματος κατά μήκος της διεύθυνσης x και την επαγόμενη τάση Hall κατά μήκος της διεύθυνσης y.
(γ) Δείξτε ότι, στην περίπτωση έντονης νόθευσης (οπότε κυριαρχεί ένα είδος φορέων), η ανωτέρω σχέση για τον συντελεστή Hall μεταπίπτει, με καλή προσέγγιση, στην απλή μορφή του ενός είδους φορτίων, και υπολογίστε τον συντελεστή Hall ενός μετάλλου με τυπική συγκέντρωση ηλεκτρονίων $10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$.

Δίδονται:

$$n_i = \sqrt{N_c N_V}\mathrm{e}^{-E_g/2kT}, \qquad kT(300\,\mathrm{K}) \approx 26\,\mathrm{meV}, \qquad \mathrm{e}^{-6} \approx 2,5 \times 10^{-3}, \qquad 1\,\mathrm{G} = 10^{-4}\,\mathrm{N/(Am)}$$

Στερεά Κατάσταση 2.

(α) Σχεδιάστε την Irreducible Brillouin Zone (IBZ) και τα σχετικά σημεία υψηλής συμμετρίας για διδιάστατο (στο επίπεδο xy) τετραγωνικό πλέγμα σταθεράς a. Εξηγήστε (είτε με λόγια, είτε με σχήμα) πως προκύπτει η IBZ και ποιες είναι οι διαστάσεις της.
(β) Έστω ότι κάθε σημείο του παραπάνω πλέγματος καταλαμβάνεται από άτομο με p τροχιακά σθένους. Βρείτε την Χαμιλτονιανή μήτρα για τυχαίο κυματάνυσμα $\mathbf{k}$ συναρτήσει των παραμέτρων

$$\epsilon_p = \langle \phi_{p_x}|H^{sp}|\phi_{p_x}\rangle = \langle \phi_{p_y}|H^{sp}|\phi_{p_y}\rangle = \langle \phi_{p_z}|H^{sp}|\phi_{p_z}\rangle$$

$$V_{pp\sigma} = \langle \phi_{p_x}(\mathbf{r})|H^{sp}|\phi_{p_x}(\mathbf{r} \pm a\hat{\boldsymbol{x}})\rangle = \langle \phi_{p_y}(\mathbf{r})|H^{sp}|\phi_{p_y}(\mathbf{r} \pm a\hat{\boldsymbol{y}})\rangle$$

$$V_{pp\pi} = \langle \phi_{p_x}(\mathbf{r})|H^{sp}|\phi_{p_x}(\mathbf{r} \pm a\hat{\mathbf{y}})\rangle = \langle \phi_{p_y}(\mathbf{r})|H^{sp}|\phi_{p_y}(\mathbf{r} \pm a\hat{\boldsymbol{x}})\rangle =$$

$$\langle \phi_{p_z}(\mathbf{r})|H^{sp}|\phi_{p_z}(\mathbf{r} \pm a\hat{\boldsymbol{x}})\rangle = \langle \phi_{p_z}(\mathbf{r})|H^{sp}|\phi_{p_z}(\mathbf{r} \pm a\hat{\boldsymbol{y}})\rangle$$

(ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΣ) ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$\langle \chi_1|H|\chi_2\rangle = \sum_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \langle \phi_1(\mathbf{r})|H|\phi_2(\mathbf{r}-\mathbf{R})\rangle$$

Λέηζερ & Οπτοηλεκτρονική 1.

(α) ΓΙΑ ΕΝΑ ΕΝΕΡΓΟ ΥΛΙΚΟ LASER, ΣΕ ΘΕΡΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ λ ΓΙΑ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΟΙ ΡΥΘΜΟΙ ΑΥΘΟΡΜΗΤΗΣ ΚΑΙ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΕΚΠΟΜΠΗΣ, ΕΞΙΣΩΝΟΝΤΑΙ ΟΤΑΝ Η ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΕΙΝΑΙ $4500\,\mathrm{K}$. [30 ΜΟΝΑΔΕΣ].

(β)
(β.1) ΕΑΝ Η ΕΝΤΑΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΔΙΠΛΑΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΑΠΛΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΕΝΑΝ ΕΝΙΣΧΥΤΗ LASER ΜΗΚΟΥΣ $0,5\,\mathrm{m}$, ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ ΤΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΑΠΟΛΑΒΗΣ (ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ) ΑΣΘΕΝΟΥΣ ΣΗΜΑΤΟΣ γ, ΘΕΩΡΩΝΤΑΣ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΠΩΛΕΙΕΣ.
(β.2) ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ ΤΙΣ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΑΤΟΠΤΡΩΝ ΠΟΥ ΑΠΑΙΤΟΥΝΤΑΙ ΓΙΑ ΝΑ ΔΙΑΤΗΡΗΘΟΥΝ ΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΕ ΕΝΑ LASER, ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΕΧΕΙ ΜΗΚΟΣ $0,1\,\mathrm{m}$, ΘΕΩΡΩΝΤΑΣ ΟΤΙ Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΛΑΒΗΣ (ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ) ΑΣΘΕΝΟΥΣ ΣΗΜΑΤΟΣ ΕΙΝΑΙ $1\,\mathrm{m}^{-1}$. ΤΑ ΚΑΤΟΠΤΡΑ ΕΧΟΥΝ ΤΙΣ ΙΔΙΕΣ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΛΛΕΣ ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΣΤΗΝ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ ΤΟΥ LASER ΕΚΤΟΣ ΑΠΟ ΑΥΤΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΑΛΟΥΝ ΤΑ ΚΑΤΟΠΤΡΑ. [70 ΜΟΝΑΔΕΣ].

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ Ή ΣΤΑΘΕΡΕΣ :
ΣΤΑΘΕΡΑ PLANCK $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js.
ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΣΤΟ ΚΕΝΟ $c = 3,00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$.
ΣΤΑΘΕΡΑ ΒΟΛΤΖΜΑΝΝ $k = 1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$.
$A_{10} = 8\pi\hbar\nu_{10}^3 B_{10}/c^3,\ \rho_\nu = 8\pi\nu^3\hbar/c^3[\mathrm{e}^{h\nu/kT} - 1]$.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα

Καλή επιτυχία.