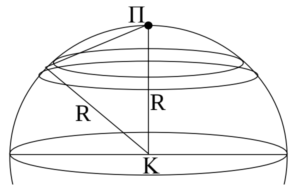
Ασκήσεις για το μάθημα Φυσική ΙΙ (Ηλεκτρομαγνητισμός) της Σχολής ΗΜΜΥ

Ενότητα 1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ (ΦΟΡΤΙΟ –ΠΕΔΙΟ –ΔΥΝΑΜΙΚΟ)

1.1 Μια λεπτή ράβδος μήκους l, ομοιόμορφα φορτισμένη με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ, βρίσκεται πάνω στον άξονα των x, με το ένα της άκρο στο σημείο $x=0$ και το άλλο στο $x=l$. (α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η κατανομή σε σημείο Ρ του άξονα δεξιά της ράβδου, στη θέση x_P (με $x_P > l$). (β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό της κατανομής στο ίδιο σημείο.

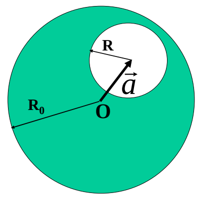
Απ.: (α) $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{x}}{x_P(x_P-l)}$. (β) $V = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(1-\dfrac{l}{x_P}\right)$.



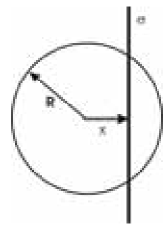
1.2 Ημισφαιρική επιφάνεια ακτίνας R φέρει φορτίο με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ. (α) Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο Κ της ημισφαιρικής επιφάνειας. (β) Να υπολογίσετε το δυναμικό, ως προς το άπειρο, στον πόλο Π της ημισφαιρικής επιφάνειας. (γ) Να υπολογίσετε το δυναμικό, ως προς το άπειρο, στο κέντρο Κ της ημισφαιρικής επιφάνειας. Απ.: (α) $E_z = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$. (β) $V_\Pi = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0\sqrt{2}}$. (γ) $V_K = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$.

1.3 Δύο σημειακά φορτία, $+q$ και $-q/b$ $(0<b,\ b\neq 1)$, είναι τοποθετημένα στην αρχή των αξόνων (0,0,0) και στο σημείο (a,0,0) αντίστοιχα. (α) Σε ποιο σημείο του άξονα των x το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0; (β) Δείξετε ότι η ισοδυναμική επιφάνεια $V=0$ έχει σφαιρικό σχήμα και υπολογίστε τα γεωμετρικά της στοιχεία (κέντρο και ακτίνα).

Απ.: (α) $x = \dfrac{a}{1-1/\sqrt{b}}$. (β) Κέντρο: $\left(\dfrac{ab^2}{b^2-1}, 0, 0\right)$, ακτίνα: $\dfrac{ab}{|b^2-1|}$.



1.4 Φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα στο εσωτερικό σφαίρας ακτίνας R_0, με εξαίρεση μία σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R, της οποίας το κέντρο βρίσκεται στη θέση $\vec{a}$, ως προς το κέντρο Ο της σφαιρικής κατανομής. Το φορτίο έχει σταθερή χωρική πυκνότητα ρ. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας. Απ.: $\vec{E}_{\kappa o\iota\lambda} = (\rho/3\varepsilon_0)\vec{a}$



1.5 Ένα φορτισμένο επίπεδο απείρων διαστάσεων φέρει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας R τέμνει το επίπεδο έτσι ώστε αυτό να βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική ροή Φ_E μέσα από τη σφαιρική επιφάνεια.

Απ.: $\Phi_E = \dfrac{\pi\sigma}{\varepsilon_0}\left(R^2-x^2\right)$ για $x \le R$, $\Phi_E = 0$ για $x \ge R$

1.6 Το πεδίο σε ένα χώρο περιγράφεται από το δυναμικό $V(x,y,z) = -\dfrac{A}{3}x^3 - By$, όπου A και B είναι σταθερές. (α) Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο; (β) Ποια είναι η πυκνότητα φορτίου ρ στο χώρο; (γ) Πόσο έργο απαιτείται για τη μεταφορά ενός σημειακού φορτίου Q από το σημείο $(2,3,0)$ στο σημείο $(-1,2,0)$; (δ) Πόσο φορτίο περικλείεται στον κύβο $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$;

Απ.: (α) $\vec{E} = Ax^2\hat{x} + B\hat{y}$. (β) $\rho = 2\varepsilon_0 Ax$. (γ) $W = (3A+B)Q$. (δ) $q = \varepsilon_0 Aa^4$.

1.7 Δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = c(-x\hat{x} + y\hat{y})$ είναι ηλεκτροστατικό. Υπολογίστε το αντίστοιχο δυναμικό σε όλο το χώρο. Γράψτε τις εξισώσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ οι οποίες περιγράφουν αντίστοιχα τις δυναμικές γραμμές και τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

Απ.: Δυναμικές γραμμές: $xy = a$. Ισοδυναμικές επιφάνειες: $y^2 - x^2 = b$.

1.8 (α) Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε κάθε σημείο του χώρου βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που σχηματίζει το εν λόγω σημείο και ο άξονας Oz ενός συστήματος συντεταγμένων Oxyz, είναι κάθετο στον Oz και το μέτρο του $E(r)$ σε απόσταση r από τον άξονα Oz δίνεται από τις σχέσεις:

$$E(r) = \frac{\alpha^2\beta}{2\varepsilon_0 r} \quad \text{για} \quad r > \alpha, \quad \text{και} \quad E(r) = \frac{\beta r}{2\varepsilon_0} \quad \text{για} \quad r \le \alpha,$$ όπου τα α και β είναι σταθερές.

Να βρείτε την κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου που δημιουργεί αυτό το πεδίο.

Απ.: $\rho = \beta$ για $r \le \alpha$, $\rho = 0$ για $r > \alpha$.

1.9 Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ δίνεται από τις σχέσεις: $\vec{E} = K(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})$ για $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ και $\vec{E} = M\dfrac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ για $x^2 + y^2 + z^2 > R^2$ με K και M σταθερές.

(α) Βρείτε τη (χωρική) πυκνότητα φορτίου για τις δυο περιοχές. (β) Βρείτε την ηλεκτρική ροή από την επιφάνεια σφαίρας με κέντρο το (0,0,0) και ακτίνα $R_1 < R$. (γ) Το ίδιο για σφαίρα με ακτίνα $R_2 > R$. Απ.: (α) $\rho = 3\varepsilon_0 K$ για $r < R$, $\rho = 0$ για $r > R$. (β) $\Phi_E = 4\pi K R_1^3$. (γ) $\Phi_E = 4\pi K R^3$.

1.10 Δίνεται ηλεκτρικό πεδίο, που δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη z, με τη μορφή

$$\vec{E} = 0, \quad \text{για} \quad x^2 + y^2 < R^2, \qquad \text{και} \qquad \vec{E} = A\frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}}{x^2 + y^2} \quad \text{για} \quad x^2 + y^2 \ge R^2,$$ όπου A θετική σταθερά.

(α) Δείξετε ότι το πεδίο $\vec{E}$ είναι ηλεκτροστατικό. (β) Υπολογίστε το δυναμικό παντού στο χώρο, ως προς ένα σημείο του άξονα z. (γ) Δείξετε ότι το συγκεκριμένο πεδίο δημιουργείται από μία επιφανειακή πυκνότητα φορτίου επί της κυλινδρικής επιφάνειεας $x^2 + y^2 = R^2$, $-\infty < z < \infty$, και υπολογίστε αυτή την πυκνότητα.

Απ.: (β) Αν $s \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$,τότε $V = 0$ για $s \le R$, και $V = A\ln(R/s)$ για $s \ge R$. (γ) $\sigma = \varepsilon_0 A/R$.

1.11 Η περιοχή $a \le r \le b$ περιέχει φορτίο με χωρική πυκνότητα $\rho(r) = A/r$, όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων και A μια σταθερά. Στο κέντρο, $r = 0$, υπάρχει ένα σημειακό φορτίο Q.

(α) Ποια πρέπει να είναι η τιμή του A, ώστε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή $a \le r \le b$ να έχει σταθερό μέτρο; (β) Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές $r \le a$ και $r \ge b$; (γ) Σχεδιάστε το $|\vec{E}|$ ως συνάρτηση του r.

Απ.: (α) $A = \dfrac{Q}{2\pi a^2}$. (β) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$ για $r \le a$ και $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{b^2}{a^2}\hat{\mathbf{r}}$ για $r \ge a$.

1.12 Σε περιοχή όπου επικρατεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = Cxy\hat{\mathbf{x}}$ (C μια θετική σταθερά), θεωρήστε την κλειστή επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $0 \le x \le \alpha$, $0 \le y \le \beta$, $0 \le z \le \gamma$.

(α) Δείξετε ότι η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου είναι ίση με $\Phi = \frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma C$. (β) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου $\rho(x, y, z,)$ σε όλο το χώρο. (γ) Βρείτε το ολικό φορτίο που περικλείεται από το παραλληλεπίπεδο, με δύο τρόπους. (δ) Είναι διατηρητικό το πεδίο;

Απ.: (β) $\rho = \varepsilon_0 C y$. (γ) $Q = \frac{1}{2}\varepsilon_0\alpha\beta^2\gamma C$. (δ) $\nabla \times \vec{E} = Cx\hat{\mathbf{z}}$ άρα το $\vec{E}$ δεν είναι διατηρητικό.

1.13 Το ηλεκτρικό πεδίο σε κάποια περιοχή είναι $\vec{E} = kr^3\hat{\mathbf{r}}$ όπου $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ είναι το διάνυσμα θέσης και k μια σταθερά. (α) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου ρ. (β) Βρείτε το ολικό φορτίο που περιέχεται σε μια σφαίρα ακτίνας R με κέντρο το σημείο O. [Η απόκλιση διανύσματος σε σφαιρικές συντεταγμένες, όταν υπάρχει σφαιρική συμμετρία (δηλ. $\vec{E} = E_r\hat{\mathbf{r}}$), είναι $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}(r^2 E_r)$].

Απ.: (α) $\rho = 5\varepsilon_0 k r^2$. (β) $Q = 4\pi\varepsilon_0 k R^5$.