Ασκήσεις για το μάθημα Φυσική ΙΙ (Ηλεκτρομαγνητισμός) της Σχολής ΗΜΜΥ

Ενότητα 4. Επαγωγή, Εξισώσεις του Maxwell, Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα και Διηλεκτρικά

4.1 Κυκλικός αγώγιμος δακτύλιος ακτίνας a κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}} = \upsilon \hat{\mathbf{x}}$ προς τα θετικά *x*. Το επίπεδο του δακτυλίου διατηρείται κάθετο στον άξονα των *x*. Όταν $t = 0$, ο δακτύλιος βρίσκεται στο επίπεδο $x = 0$. Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}} = Cx^2\,\hat{\mathbf{x}}$, όπου *C* είναι θετική σταθερά.

(α) Να υπολογιστεί η επαγόμενη στον δακτύλιο ΗΕΔ ως συνάρτηση του χρόνου.
(β) Αν η ωμική αντίσταση του δακτυλίου είναι *R*, να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας στον δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα $t = 0$ έως *T*.
(γ) Είναι δυνατό να υπάρξει ένα τέτοιο μαγνητικό πεδίο στη φύση;

4.2 Αγώγιμος βρόχος τετραγωνικού σχήματος κινείται στο επίπεδο *xy* με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}} = \upsilon \hat{\mathbf{x}}$ προς τα θετικά *x*. Οι πλευρές του τετραγώνου έχουν μήκος *a* και είναι παράλληλες προς τους άξονες *x* και *y* αντίστοιχα. Για $t = 0$ είναι $x = 0$, όπου *x* είναι η θέση της προπορευόμενης πλευράς του πλαισίου. Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}} = Cx\hat{\mathbf{z}}$, όπου *C* είναι θετική σταθερά.

(α) Να υπολογιστεί η επαγόμενη στο δακτύλιο ηλεκτρεγερτική δύναμη ως συνάρτηση του χρόνου.
(β) Αν η ωμική αντίσταση του δακτυλίου είναι *R*, να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας στον δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως *T*.
(γ) Είναι δυνατό να υπάρξει ένα τέτοιο μαγνητικό πεδίο στη φύση;

4.3 Ευθύγραμμος αγωγός που εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις, διαρρέεται από μεταβλητό ρεύμα $I(t) = I_0\, e^{-\beta t}$, όπου I_0 και β είναι θετικές σταθερές. Ένας επίπεδος αγώγιμος βρόχος σχήματος τετραγώνου έχει δύο από τις πλευρές του παράλληλες προς τον ευθύγραμμο αγωγό. Ο αγωγός και ο βρόχος βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Οι πλευρές του τετραγώνου έχουν μήκος *a*. Η πλησιέστερη στον αγωγό πλευρά του βρόχου απέχει από αυτόν απόσταση ίση με *b*.

(α) Υπολογίστε την ΗΕΔ που επάγεται στο πλαίσιο. (Η αυτεπαγωγή του πλαισίου είναι αμελητέα).
(β) Αν η ωμική αντίσταση του δακτυλίου είναι *R*, να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας στον δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως ∞.

4.4 Δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι λεπτοί αγωγοί εκτείνονται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις και διαρρέονται από ίσα ρεύματα με αντίθετες κατευθύνσεις (στην πραγματικότητα, οι αγωγοί αποτελούν τις δύο πλευρές ορθογώνιου παραλληλόγραμμου βρόχου, του οποίου οι άλλες δύο πλευρές βρίσκονται πολύ μακριά ώστε να μπορούν να αγνοηθούν). Οι αγωγοί απέχουν απόσταση $3a$ ο ένας από τον άλλο.

Συμμετρικά ανάμεσα στους αγωγούς, και στο επίπεδό τους, βρίσκεται αγώγιμος βρόχος σχήματος τετραγώνου πλευράς *a*. Οι δύο πλευρές του τετραγώνου είναι παράλληλες προς τους δύο αγωγούς. Βρείτε το συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής του βρόχου και των δύο αγωγών.

(Υπενθύμιση: Αν ρεύμα I_1 στο βρόχο 1 προκαλεί μαγνητική ροή Φ_2 στο βρόχο 2, ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δύο βρόχων είναι $M_{21} = \Phi_2 / I_1$.)

4.5 Συμπαγής κυλινδρικός αγωγός έχει ακτίνα *a* και εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα *I*, ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διατομή του. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου υπάρχει πολύ λεπτό στρώμα αγώγιμου υλικού, μονωμένο από τον κυλινδρικό αγωγό, μέσα από το οποίο συνολικό ρεύμα *I* κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια.

(α) Δείξετε ότι μαγνητικό πεδίο υπάρχει μόνο στο εσωτερικό του κυλίνδρου, και βρείτε το μέγεθός του σε κάθε σημείο του χώρου.
(β) Υπολογίστε τη μαγνητική ενέργεια που αντιστοιχεί σε μήκος *l* του συστήματος.
(γ) Εξισώνοντας αυτή την ενέργεια με $\frac{1}{2}LI^2$, βρείτε την αυτεπαγωγή *L* μήκους *l* του συστήματος, και την αυτεπαγωγή του ανά μονάδα μήκους.

4.6 Δύο πολύ λεπτά αγώγιμα κυλινδρικά κελύφη έχουν ακτίνες a και b ($a < b$), και εκτείνονται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ο ένας αγωγός διαρρέεται από ρεύμα I, ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του, προς τη μια κατεύθυνση, και ο άλλος διαρρέεται από ρεύμα I, ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του, προς την άλλη κατεύθυνση.

(α) Δείξετε ότι μαγνητικό πεδίο υπάρχει μόνο στο χώρο ανάμεσα στα δύο κελύφη, και βρείτε το μέγεθός του, υποθέτοντας ότι η διαφορά ανάμεσα στα a και b είναι πολύ μικρή σε σχέση με αυτά, ώστε το μαγνητικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των κυλινδρικών επιφανειών να έχει σταθερό μέτρο.

(β) Υπολογίστε τη μαγνητική ενέργεια που αντιστοιχεί σε μήκος l του συστήματος.

(γ) Εξισώνοντας αυτή την ενέργεια με $\frac{1}{2}LI^2$, βρείτε την αυτεπαγωγή L μήκους l του συστήματος, και την αυτεπαγωγή του ανά μονάδα μήκους.

4.7 Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο το οποίο συνοδεύει το ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \left[E_0 \cos(\omega t - kz) + E_{0x}\right]\hat{\boldsymbol{x}} + \left[-E_0 \sin(\omega t - kz) + E_{0y}\right]\hat{\boldsymbol{y}} + E_{0z}\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

σε μία περιοχή του χώρου όπου οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος είναι μηδέν.

4.8 Επίπεδο, μονοχρωματικό, γραμμικά πολωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, δίνεται από τις εξισώσεις: $\vec{\boldsymbol{E}} = E_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)\right]\hat{\boldsymbol{x}}$ και $\vec{\mathbf{B}} = \frac{E_0}{c}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)\right]\hat{\mathbf{y}}$.

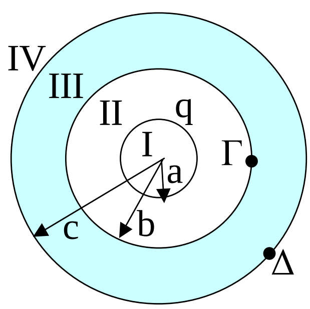
Δείξετε ότι τα πεδία αυτά ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell και την κυματική εξίσωση. Υπολογίστε τη ροή ενέργειας σε κάθε σημείο. Απ.: $\vec{\boldsymbol{S}} = c\varepsilon_0 E^2 \hat{\boldsymbol{z}} = c\frac{1}{\mu_0}B^2\hat{\boldsymbol{z}}$

4.9 Επίπεδο, μονοχρωματικό, γραμμικά πολωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, δίνεται από τις εξισώσεις: $\vec{\boldsymbol{E}} = E_0\hat{\boldsymbol{y}}\sin(\omega t - kx)$ και $\vec{\boldsymbol{B}} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}\sin(\omega t - kx)$, όπου $B_0 = E_0 / c$ και $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Υπολογίστε το διάνυσμα Poynting για το κύμα αυτό και δείξετε ότι είναι ίσο με την πυκνότητα ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας σε κάθε σημείο, επί την ταχύτητα του κύματος.

4.10 Στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $\vec{\boldsymbol{p}} = (\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})\, p/\sqrt{2}$ βρίσκεται στη θέση $\vec{\boldsymbol{r}} = z\hat{\boldsymbol{z}}$, πάνω από αγώγιμο επίπεδο (x, y) το οποίο είναι γειωμένο [$V(x,y,z) = 0$ για $z < 0$ και για κάθε x, y). Να υπολογίσετε τη δύναμη η οποία ασκείται πάνω στο δίπολο.

4.11 Δίνεται σφαιρικός φλοιός από διηλεκτρικό, εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c ($b < c$), του οποίου η σχετική διηλεκτρική σταθερά δίνεται από τη σχέση $\varepsilon_r(r) = A/r^3$, όπου Α θετική σταθερά και r η απόσταση από το κέντρο του φλοιού. Φορτίο q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα στην επιφάνειας μίας σφαίρας ακτίνας a, όπου a < b, ομόκεντρης με το φλοιό. Στο φλοιό δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο. Αν I, II, III, IV είναι οι περιοχές με $r_{\mathrm{I}} <$ a, a $< r_{\mathrm{II}} < b$, $b < r_{\mathrm{III}} < c$, $c < r_{\mathrm{IV}}$, να υπολογίσετε:



(α) Το ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{\boldsymbol{E}}$, σε όλες τις περιοχές του χώρου.

(β) Το διάνυσμα πόλωσης $\vec{\boldsymbol{P}}$ στον φλοιό.

(γ) Τις πυκνότητες δέσμιων φορτίων στον όγκο και στις επιφάνειες του φλοιού, και το συνολικό δέσμιο φορτίο στον φλοιό.

(δ) Τη διαφορά δυναμικού μεταξύ ενός σημείου Γ στην εσωτερική και ενός σημείου Δ στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού.