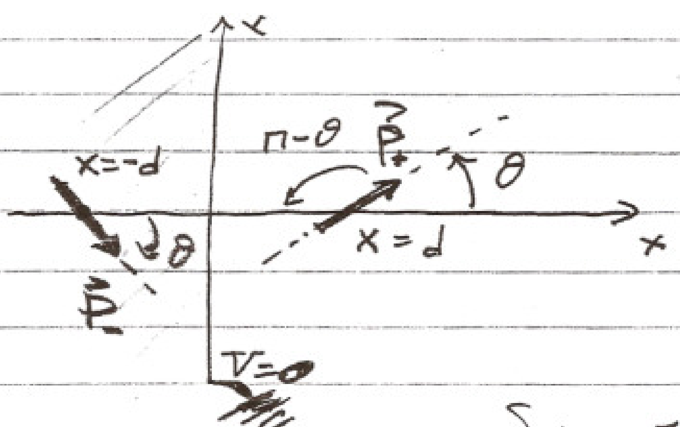
Ασκήσεις Κεφ. 4

Άσκηση 6

Ένα δίπολο $\vec{P}$ βρίσκεται σε απόσταση d από ένα άπειρο γειωμένο αγώγιμο επίπεδο. Το δίπολο σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη στο επίπεδο.

α) Βρείτε την ροπή στο $\vec{P}$.
β) Αν το δίπολο ήταν ελεύθερο να περιστραφεί σε ποια θέση θα ηρεμούσε;



Θα εμφανιστεί ένα δίπολο $\vec{P}_-$ είδωλο του $\vec{P}_+$ από την άλλη μεριά του αγώγιμου επιπέδου σε απόσταση d.

$$V(x=0)=0$$

διότι έχουμε:

$$V_+(x=0^+) = \frac{P\cos(\pi-\theta)}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = -\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

$$V_-(x=0^-) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

$V(x=0) = V_+(x=0^+) + V_-(x=0^-)$ = μηδέν. Πρέπει να δειχτεί και για ένα τυχόν σημείο $(0,y,z)$.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην θέση $x=d$ από το είδωλο δίπολο στην θέση $x=-d$ είναι:

$$\vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{P}_-\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{P}_-\right]$$

$$\hat{r} = \hat{x}, \quad r = 2d, \quad \vec{P}_- = P\cos\theta\,\hat{x} - P\sin\theta\,\hat{y}$$

$$\vec{E}_- = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0}\frac{P}{d^3}\left[3\cos\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}\right]$$

$$\vec{E}_- = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0}\frac{P}{d^3}\left(2\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}\right)$$

η ροπή επάνω στο δίπολο στη θέση $x=d$ είναι

$$\vec{N} = \vec{P}_+ \times \vec{E}_- = \frac{P^2}{32\pi\varepsilon_0 d^3}\left(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}\right) \times \left(2\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}\right)$$

$$\vec{N} = -\frac{P^2}{32\pi\varepsilon_0}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{d^3}\,\hat{z}, \quad \hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$$

β) το δίπολο ηρεμεί για $N=0$

$$\Rightarrow \quad \theta = 0 \quad ή \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

η λύση με $\theta = \frac{\pi}{2}$ έχει την χαμηλότερη ενέργεια είναι ευσταθής $\Rightarrow$ (Άσκηση 7 και Άσκηση 8).

$\boxed{\text{Άσκηση 10}}$ Σφαίρα ακτίνας R φέρει πόλωση

$$\vec{P} = k\vec{r} = kr\hat{r}$$

k = σταθερά, $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα από το κέντρο της σφαίρας.

α) Υπολογίστε τα δέσμια φορτία σ_b, ρ_b

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} = \vec{P}\cdot\hat{r} = kR$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -3k$$

Επιλύσαμε το $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

β) Βρείτε το πεδίο μέσα και έξω από την σφαίρα.

Λύνουμε το ισοδύναμο πρόβλημα μίας συμπαγούς σφαίρας με φορτίο $\rho = -3k$ ανά μονάδα όγκου και επιφανειακό φορτίο $\sigma = kR$ σταθερό χρησιμοποιώντας τον Νόμο του Gauss.

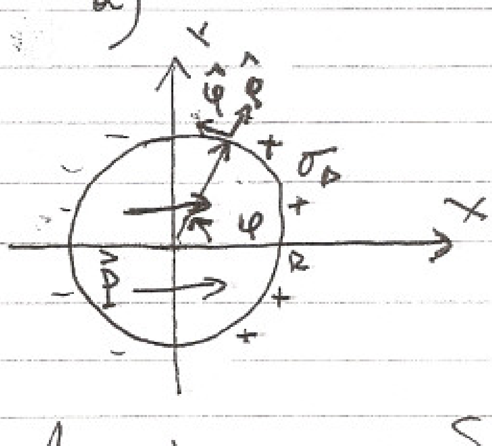
$\boxed{\text{Άσκηση 13}}$ Ένας μακρύς (απείρου μήκους) κύλινδρος, ακτίνας R, φέρει ομοιόμορφη πόλωση $\vec{P} = P\hat{x}$ κάθετη στον άξονά του.

α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο

β) Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο έξω από τον κύλινδρο έχει την μορφή

$$\vec{E}_{>} = \frac{R^2}{2\varepsilon_0 r^2}\left[2(\vec{P}\cdot\hat{\rho})\hat{\rho} - \vec{P}\right]$$

α)



$\rho_\Delta = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$ χωρική πυκνότητα φορτίου λόγω πόλωσης = μηδέν

$$\sigma_\Delta = \vec{P}\cdot\hat{n} = \vec{P}\cdot\hat{\rho} = P\,\hat{x}\cdot\hat{\rho}$$

$\underline{\sigma_\Delta = P\cos\varphi}$ επιφανειακή πυκνότητα φορτίου λόγω πόλωσης.

Αναπτύσσουμε το δυναμικό για $\rho > R$ και $\rho < R$ σε πολικές συντεταγμένες:

$$\underline{\rho > R} \quad V_{>}(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}\left(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\right)$$

$\rho < R$ $\quad V_<(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(\Gamma_n \cos(n\varphi) + \Delta_n \sin(n\varphi) \right)$

Οι συνοριακές συνθήκες θα μας προσδιορίσουν τα A_n, B_n, Γ_n και Δ_n

i) $\quad V_<(R,\varphi) = V_>(R,\varphi) \quad \forall \varphi$

$$\Rightarrow \frac{A_n}{R^n} = \Gamma_n R^n \quad \text{και} \quad \frac{B_n}{R^n} = \Delta_n R^n$$

ii) $\quad \vec{E}_> \cdot \hat{\rho} - \vec{E}_< \cdot \hat{\rho} = \frac{\sigma(\varphi)}{\varepsilon_0} \quad$ για $\rho = R$

$$\Rightarrow -\frac{\partial V_>}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=R} + \frac{\partial V_<}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=R} = \frac{\sigma(\varphi)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R^{n+1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} (\Gamma_n \cos n\varphi + \Delta_n \sin n\varphi)$$

$$= \frac{P}{\varepsilon_0} \cos\varphi \qquad \forall \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{R^2} + \Gamma_1 = \frac{P}{\varepsilon_0} \quad \text{και} \quad \frac{n A_n}{R^{n+1}} + n \Gamma_n R^{n-1} = 0 \quad \text{για } n \geq 2$$

$$\text{και} \quad \frac{n B_n}{R^{n+1}} + n R^{n-1} \Delta_n = 0 \quad \forall n$$

Κάνοντας τις ενδιάμεσες πράξεις βρίσκουμε:

$A_n = 0$, $\Gamma_n = 0$ $\quad \forall n \geq 2$ $\quad$ και $B_n = 0$, $\Delta_n = 0$ $\quad \forall n$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{R} = \Gamma_1 R \quad \text{και} \quad \frac{1}{R^2} A_1 + \Gamma_1 = \frac{P}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_1 = \frac{P}{2\varepsilon_0}, \quad A_1 = \frac{P}{2\varepsilon_0} R^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{<}(\rho,\varphi) = \dfrac{P}{2\varepsilon_0}\,\rho\cos\varphi \\[2ex] V_{>}(\rho,\varphi) = \dfrac{P}{2\varepsilon_0}\,\dfrac{R^2}{\rho}\cos\varphi \end{cases}$$

β) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες

το $\vec{\nabla} V = \hat{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} + \hat{z}\dfrac{\partial V}{\partial z}$

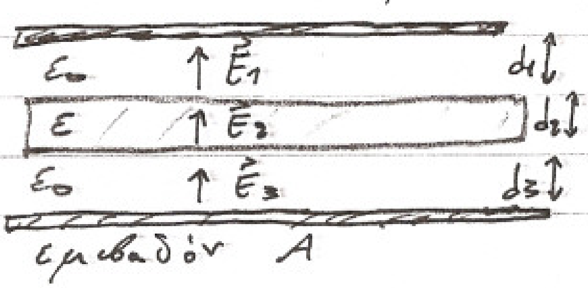
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{<} = -\dfrac{P}{2\varepsilon_0}\,\hat{x} \quad , \quad \hat{x} = \cos\varphi\,\hat{\rho} - \sin\varphi\,\hat{\varphi} \\[2ex] \vec{E}_{>} = \dfrac{P}{2\varepsilon_0}\,\dfrac{R^2}{\rho^2}\left[\cos\varphi\,\hat{\rho} + \sin\varphi\,\hat{\varphi}\right] \end{cases}$$

$$\vec{E}_{>} = \frac{R^2}{2\varepsilon_0\rho^2}\left[P\cos\varphi\,\hat{\rho} + P\sin\varphi\,\hat{\varphi} \pm P\cos\varphi\,\hat{\rho}\right] =$$

$$= \frac{R^2}{2\varepsilon_0\rho^2}\left[2P\cos\varphi\,\hat{\rho} - P\hat{x}\right] = \frac{R^2}{2\varepsilon_0\rho^2}\left[2(\vec{P}\cdot\hat{\rho})\hat{\rho} - \vec{P}\right]$$

Άσκηση 19

α) πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς γεμάτος κατά το ήμισυ με διηλεκτρικό, διηλεκτρικής σταθεράς ε, όπως στο σχήμα. Βρείτε την χωρητικότητα.



$d = d_1 + d_2 + d_3$

$C_0 = \dfrac{A}{d}\varepsilon_0$ χωρητικότητα του πυκνωτή πριν την εισαγωγή του διηλεκτρικού.

απο τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια ενος διηλεκτρικού ισχύει:

$$\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon E_2 \quad \text{και} \quad \varepsilon E_2 = \varepsilon_0 E_3 \Rightarrow E_2 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_1$$

και $E_1 = E_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, σ = επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\Delta V}$$

υπολογίζουμε το $\Delta V = E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3$

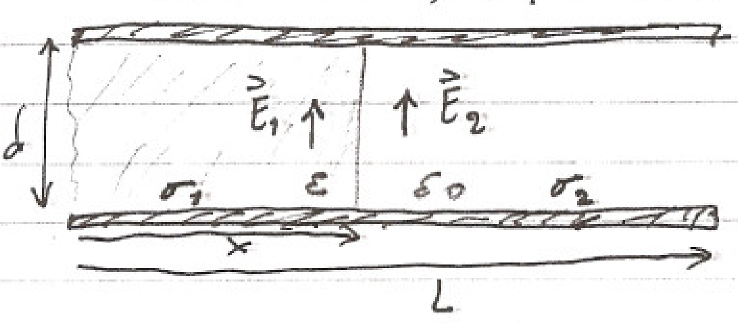
$$\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d_1 + d_3) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d_1 + d_3 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} d_2\right]$$

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d + d_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\right]$$

$$\Rightarrow C = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d + d_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\right]} = \frac{A}{d}\varepsilon_0 \frac{1}{1 + \frac{d_2}{d}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)}$$

$$\boxed{C = C_0 \frac{1}{1 + \frac{d_2}{d}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)}} \qquad C > C_0 .$$

β) Εαν το διηλεκτρικό είναι όπως στο σχήμα βρείτε την νεα χωρητικότητα.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\varepsilon} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$\Delta V = E_2 d = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d \quad , \quad A = sL$$

$$Q = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = \sigma_1 S x + \sigma_2 S (L - x)$$

$$Q = S \sigma_2 \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} x + L - x \right] = S \sigma_2 \left(x \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} + L \right)$$

$$Q = \sigma_2 S L \left[1 + \frac{x}{L} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right]$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S L}{d} \left(1 + \frac{x}{L} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) = C_0 \left[1 + \frac{x}{L} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right]$$

$$\underline{C > C_0}$$

γ) γνωστή η τάση $V = \Delta V$ βρίσκε τα $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$

ερώτημα α) $E_1 = E_3$, $E_2 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_1$

$$\Rightarrow \Delta V = E_1 (d_1 + d_3) + E_2 d_2 = E_1 (d_1 + d_3) + E_1 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} d_2$$

$$\Delta V = E_1 \left[d_1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} d_2 + d_3 \right] \Rightarrow E_1 = \frac{\Delta V}{d_1 + d_3 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} d_2}$$

$$P_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_2 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} E_1$$

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 , \quad D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P_2 = \varepsilon_0 E_1 = D_1$$

ερώτημα β) $E_1 = E_2$, $\Delta V = E_1 d \Rightarrow E_1 = \frac{\Delta V}{d}$

$$P_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_1 , \quad D_1 = \varepsilon_0 E_1 + P_1 = \varepsilon E_1 = \varepsilon E_2$$

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 , \quad D_1 \neq D_2 .$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε και τα δέσμια φορτία.

$\boxed{\text{Άσκηση 25}}$ Μια περιοχή R περιέχει 1) κατανομή φορτίου ρ, 2) Διάφορα κομμάτια γραμμικού διηλεκτρικού με γνωστή σταθερά ε, 3) περιβάλλεται από μια επιφάνεια S με γνωστό και καθορισμένο δυναμικό V. Τότε το δυναμικό σε ολόκληρη την περιοχή R είναι μονοσήμαντα καθορισμένο.

Έστω ότι έχουμε την λύση V_1: $V_1(S) = V$

ισχύει $\vec{E}_1 = -\vec{\nabla} V_1$, $\vec{D}_1 = \varepsilon \vec{E}_1$ σε κάθε διηλεκτρικό και $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}_1 = \rho$

Και την λύση V_2: $V_2(S) = V$

με $\vec{E}_2 = -\vec{\nabla} V_2$, $\vec{D}_2 = \varepsilon \vec{E}_2$ και $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}_2 = \rho$

Ορίζουμε μια τρίτη λύση $V_3 = V_1 - V_2$

τότε $V_3(S) = 0$, $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$, $\vec{D}_3 = \varepsilon \vec{E}_3$

και $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}_3 = 0$.

Θα δείξω ότι $V_3 = 0$ σε όλο το R.

$$\int_R \vec{\nabla}(V_3 \vec{D}_3)\, d^3x = \oint_S V_3 \vec{D}_3 \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\int_R \vec{\nabla}(V_3 \vec{D}_3)\, d^3x = \int_R (\vec{\nabla} V_3)\cdot\vec{D}_3\, d^3x + \int V_3 \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}_3}_{=0} d^3x$$

$$\Rightarrow \int_R \vec{\nabla} V_3 \cdot \vec{D}_3\, d^3x = 0$$

αλλά $\vec{D}_3 = \varepsilon \vec{E}_3$ και $\vec{E}_3 = -\vec{\nabla} V_3$

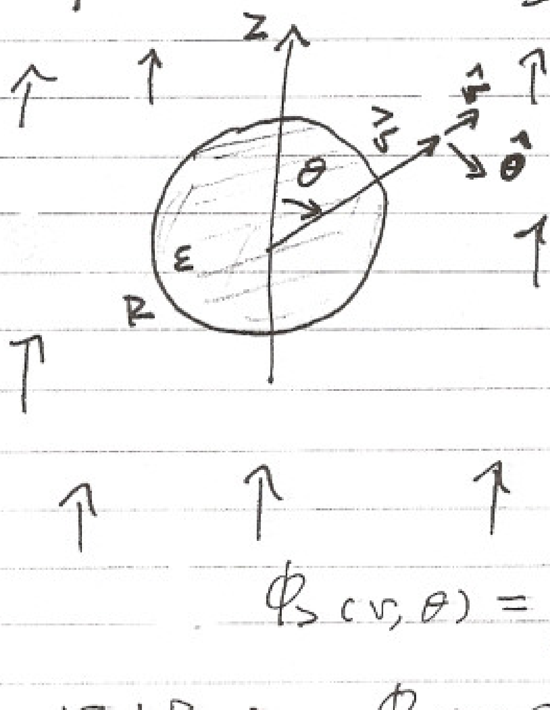
$$\Rightarrow \int_R \vec{E}_3^{\,2}\, d^3x = 0 \Rightarrow \vec{E}_3 = 0 \quad \text{παντού.}$$

επειδή $dV_3 = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V_3 = -d\vec{r} \cdot \vec{E}_3 = 0$

$\Rightarrow V_3 =$ σταθερό σε όλο το $R = V_3(S') = 0$

$\Rightarrow V_1 = V_2$ σε ολόκληρο το R.

Άσκηση 23 Σφαίρα ακτίνας R από γραμμικό διηλεκτρικό ε τοποθετείται σε ένα αρχικά ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0$.
Βρείτε το νέο ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο.



$\vec{E}_0 = E_0 \hat{z} = E_0 (\cos\theta\, \hat{r} - \sin\theta\, \hat{\theta})$

Το πρόβλημα παρουσιάζει αζιμουθιακή συμμετρία, αναπτύσσω λοιπόν το δυναμικό με τα πολυώνυμα Legendre.

$r > R$:

$$\Phi_>(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

$r < R$: $\quad \Phi_<(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Gamma_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$

οριακές συνθήκες: i) $\vec{E}(\vec{r} \to \infty) = E_0 \hat{z}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi_> = -\frac{\partial \Phi_>}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_>}{\partial \theta}\hat{\theta} = E_0 \hat{z}, \quad r \to \infty.$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \Phi_>}{\partial r} \xrightarrow[r\to\infty]{} E_0 \cos\theta \ , \ \frac{\partial \Phi_>}{\partial r} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell A_\ell r^{\ell-1} - \frac{(\ell+1)B_\ell}{r^{\ell+2}}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \Rightarrow A_1 = -E_0$, $A_\ell = 0$ για $\ell \geq 2$.

η δευτερη εξίσωση $-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_>}{\partial \theta} \to -E_0 \sin\theta$
δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

$$\Rightarrow \Phi_>(r,\theta) = A_0 - E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$$

ii) $\Phi_<(R,\theta) = \Phi_>(R,\theta) \quad \forall\ \theta$

$A_0 + \frac{B_0}{R} = \Gamma_0$ ①, $-E_0 R + \frac{B_1}{R^2} = \Gamma_1 R$ ②

$\frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} = \Gamma_\ell R^\ell$ για $\ell \geq 2$. ③

iii) $\varepsilon \vec{E}_< \cdot \hat{r} = \varepsilon_0 \vec{E}_> \cdot \hat{r}$ για $r = R$

$\Rightarrow \varepsilon \left.\frac{\partial \Phi_<}{\partial r}\right|_{r=R} = \varepsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi_>}{\partial r}\right|_{r=R} \Rightarrow B_0 = 0$ και

$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\Gamma_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3}$ ④ , $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\ell\Gamma_\ell R^{\ell-1} = -(\ell+1)\frac{B_\ell}{R^{\ell+2}}$ ⑤ $(\ell \geq 2)$.

Από τις σχέσεις ③ και ⑤ $\Rightarrow B_\ell = 0$, $\Gamma_\ell = 0$ για $\ell \geq 2$.

② και ④ $\Rightarrow \Gamma_1 = \frac{-3E_0}{2+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$, $B_1 = -\frac{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{2+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} E_0 R^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_>(r,\theta) = A_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta \\ \Phi_<(r,\theta) = \Gamma_0 + \Gamma_1 r \cos\theta \end{cases}$$

διαλέγουμε για αρχή του δυναμικού το επίπεδο

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi_>(r, \frac{\pi}{2}) = 0$ και $\Phi_<(r, \frac{\pi}{2}) = 0$

$\Rightarrow A_0 = 0, \Gamma_0 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_>(r,\theta) = \left(-E_0 r + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta \\ \Phi_<(r,\theta) = \Gamma_1 r \cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

Ενταση του ηλεκτρικού πεδίου για $\underline{r < R}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \Phi_<}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_<}{\partial \theta}\hat{\theta} = \frac{3}{2+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} E_0 \hat{z}$$

$\underline{r > R}$

$$\vec{E} = E_0\hat{z} + \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2}\frac{E_0 R^3}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

ο πρώτος όρος είναι το εξωτερικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ενώ ο δεύτερος όρος είναι το ηλεκτρικό πεδίο ενός διπόλου.

$\boxed{\text{Άσκηση 28}}$ Υπολογίστε την ηλεκτροστατική ενέργεια W για μια σφαίρα ακτίνας R με πόλωση $\vec{P}$ στο εσωτερικό της ομοιόμορφη και σταθερή, $\vec{P} = P\hat{z}$.

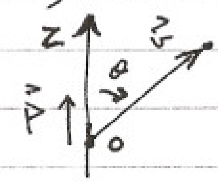
Απο το Παράδειγμα 2 του βιβλίου η ενταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$r<R$ $$\vec{E} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \frac{2}{3}\vec{P} = \frac{2P}{3}\hat{z}$$

$r>R$ $$\vec{E} = \frac{P}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right), \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες



Τρόπος α) $$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{\text{σε όλο}\\ \text{τον χώρο}}} \vec{E}^2\, d^3x$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \frac{P^2}{9\varepsilon_0^2}4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\int_0^\pi \frac{P^2}{9\varepsilon_0^2}\frac{R^6}{r^6}2\pi r^2\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{P^2}{9\varepsilon_0^2}\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{P^2}{9\varepsilon_0^2}\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{P^2}{9\varepsilon_0}2\pi R^3$$

Τρόπος β) $$W = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{σε όλο}\\ \text{τον χώρο}}} \vec{D}\cdot\vec{E}\, d^3x$$

$$W = -\frac{P^2}{9\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\int_0^\pi \frac{P^2}{9\varepsilon_0^2}\frac{R^6}{r^6}2\pi r^2\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta$$

$$W = -\frac{P^2}{9\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{P^2}{9\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 \equiv 0$$

Λάθος, διότι ο τύπος αυτός για την ενέργεια ισχύει μόνο για τα γραμμικά υλικά.

Τρόπος γ) Κατασκευαστικός

Εάν έχω ένα δίπολο $\vec{P}$ αυτό αλληλεπιδρά με ένα υπάρχον ηλεκτρικό πεδίο ως εξής

$$U = -\vec{P}\cdot\vec{E}$$

Άρα χτίζω την πολωμένη σφαίρα ως εξής:

έστω ότι έχω φτιάξει ήδη μία πόλωση $\vec{P}'$ μέσα στην σφαίρα, αυτή δίνει ένα ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}' \quad \text{στο εσωτερικό.}$$

Εάν αλλάξω την πόλωση της σφαίρας κατά $\delta\vec{P}'$ καταναλώνω πρόσθετη ενέργεια

$$\delta W = -\int_{\text{σφαίρα}} \delta\vec{P}'\cdot\vec{E}\, d^3x = \frac{1}{3\varepsilon_0}\int_{\text{σφαίρα}} \delta\vec{P}'\cdot\vec{P}'\, d^3x$$

$$\delta W = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\varepsilon_0}\int_{\text{σφαίρα}} \delta(\vec{P}'^2)\, d^3x\right]$$

$$\delta\vec{P}^2 = 2\vec{P}\cdot\delta\vec{P} \quad \text{γενικά}$$

$$\Rightarrow W = \sum \delta W = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\varepsilon_0}\int_{\text{σφαίρα}} \vec{P}^2_{\text{τελ.}}\, d^3x\right], \quad \vec{P}_{\text{τελ}} = \vec{P}$$

$$\Rightarrow W = \frac{P^2}{6\varepsilon_0}\,\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{P^2}{9\varepsilon_0}2\pi R^3.$$