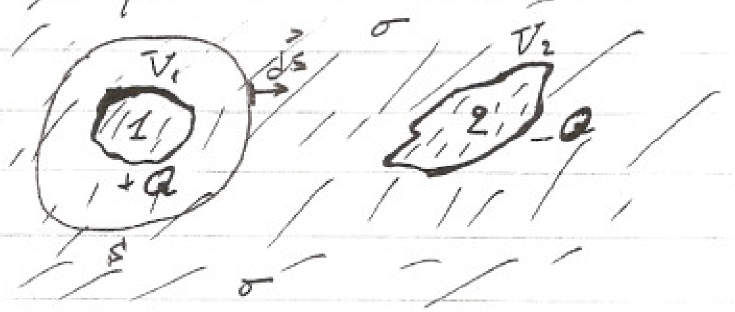
Κεφάλαιο 7

Άσκηση 2

α) Στο εσωτερικό ενός ασθενώς αγώγιμου υλικού αγωγιμότητας σ τοποθετούνται δυο μεταλλικά σώματα. Βρείτε την σχέση μεταξύ αντίστασης και χωρητικότητας.



Τα μεταλλικά αντικείμενα υποθέτουμε ότι έχουν άπειρη αγωγιμότητα άρα είναι ισοδυναμικές επιφάνειες.

Νόμος του ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$
για το ασθενώς αγώγιμο υλικό.

Παίρνουμε μια κλειστή επιφάνεια S που περικλείει το μεταλλικό αντικείμενο 1, για την ένταση του ρεύματος I που διαρρέει την S ισχύει:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sigma \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

για την διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα δύο σώματα 1 και 2 ισχύει:

$$V = V_1 - V_2 = I R = Q \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Η χωρητικότητα του συστήματος είναι:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Q\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\frac{1}{R}}$$

β) Φορτίζουμε αρχικά το σύστημα με τάση $V = V_1 - V_2 = V_0$, $V(t=0) = V_0$.
Αποσυνδέουμε την μπαταρία, βρείτε την διαφορά δυναμικού $V(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Βρήκαμε προηγουμένως $I(t) = \sigma \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$

και $\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = -I(t)$ "εξίσωση συνέχειας".

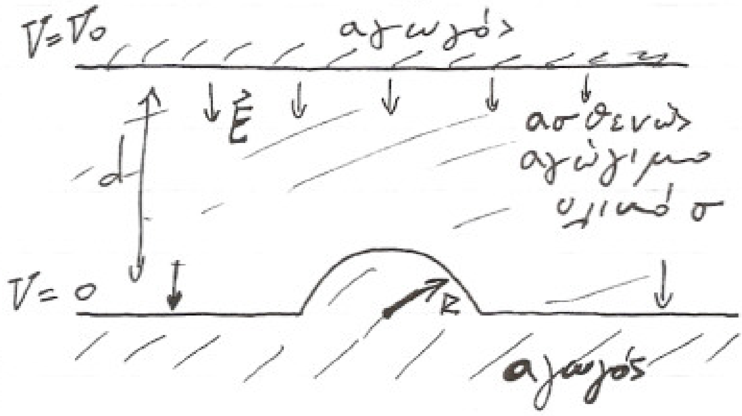
$$\Rightarrow \quad -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} Q \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}$$

επειδή $V(t) = \frac{Q(t)}{C} \Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}}$

$t \to \infty \Rightarrow V(t) = V_1(t) - V_2(t) \to 0$ και $Q(t) \to 0$ σε κάθε μεταλλικό αγωγό.

Η ποσότητα $\frac{\varepsilon_0}{\sigma} = \tau$ έχει διαστάσεις χρόνου.

Άσκηση 3



Πόση είναι η ένταση του ρεύματος που ρέει προς το ημισφαίριο ακτίνας R ?

$$R \ll d$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = \sigma \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Οι μεταλλικοί αγωγοί είναι ισοδυναμικές επιφάνειες σε δυναμικό $V=0$ και $V=V_0$.
Ανάμεσα στους δύο μεταλλικούς αγωγούς το δυναμικό V ικανοποιεί την σχέση:

$\nabla^2 V = 0$. Επειδή $R \ll d$ υποθέτουμε ότι το πεδίο $\vec{E}$ κοντά στον επάνω αγωγό με τάση V_0 έχει την τιμή που θα είχε χωρίς την σφαίρα δηλαδή

$$E_\infty = \frac{V_0}{d} = E_0$$

Και δανειζόμαστε την λύση για το V από το παράδειγμα 8, Κεφ. 3, σελίδα 184 του τόμου I. Διότι σε εκείνο το παράδειγμα και εδώ το δυναμικό V ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες $\Rightarrow$ άρα ίδια λύση.

$$\Rightarrow V(r,\theta) = E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta \quad , 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{(r=R)} = -\frac{dV}{dr}\Big|_{r=R}\hat{r} = -3E_0\cos\theta\,\hat{r}$$

γενικά $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}$

αλλά για $r = R$ η $\hat{\theta}$ συνιστώσα είναι μηδέν.

$$I = \sigma \int_{\text{ημισφαίριο}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 3\sigma E_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 3\sigma E_0\, 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = 6\pi\sigma E_0 R^2 \int_0^1 x\, dx$$

αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta\, d\theta$.

$$\Rightarrow \quad I = 6\pi\sigma E_0 R^2 \frac{1}{2} = 3\pi\sigma E_0 R^2 = 3\pi\sigma R^2 \frac{V_0}{d}.$$

Άσκηση 7 Μεταλλική ράβδος μάζας m ολισθαίνει χωρίς τριβή σε δύο παράλληλες αγώγιμες ράγες που βρίσκονται σε απόσταση ℓ η μία από την άλλη. Οι ράγες συνδέονται με μία αντίσταση R. Στον χώρο υπάρχει ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ ομογενές κάθετο στο σύστημα.

α) Εάν η ράβδος κινείται στιγμιαία προς τα δεξιά με ταχύτητα v, πόση είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα;

Ηλεκτρεγερτική δύναμη $\mathcal{E} = vBl$
ένταση ρεύματος $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

β) Πόση είναι η μαγνητική δύναμη που ασκείται στην ράβδο; $d\vec{F}_L = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$

$$\Rightarrow \quad F_L = IBl = \frac{vB^2l^2}{R}$$

γ) $v(t=0) = v_0$, $v(t) = ?$

Εξίσωση κίνησης $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_L \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -F_L$

$$\Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = -v\frac{B^2l^2}{R} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2l^2}{Rm}dt$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v(t) = v_0\, e^{-\frac{B^2l^2}{Rm}t} = v_0\, e^{-t/\tau}} , \quad \underline{\tau = \frac{Rm}{B^2l^2}}$$

δ) Αρχική κινητική ενέργεια της ράβδου $= \frac{1}{2}mv_0^2$
η ταχύτητα ελαττώνεται συναρτήσει του χρόνου που πηγαίνει αυτή η κινητική ενέργεια;

Η ενέργεια που δίνεται στην αντίσταση είναι:

$$E_R = \int_0^t R\, I^2(t')\,dt' = \int_0^t \frac{\mathcal{E}^2(t')}{R}dt' =$$

$$= \int_0^t \frac{v^2(t)B^2l^2}{R}dt' = \frac{v_0^2B^2l^2}{R}\int_0^t e^{-2\frac{t'}{\tau}}dt' =$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2\int_0^x e^{-x'}dx'$$, αλλαγή μεταβλητής $t \to x$

$$\gamma = \frac{2t}{\tau} = 2\frac{B^2 l^2}{Rm}t$$

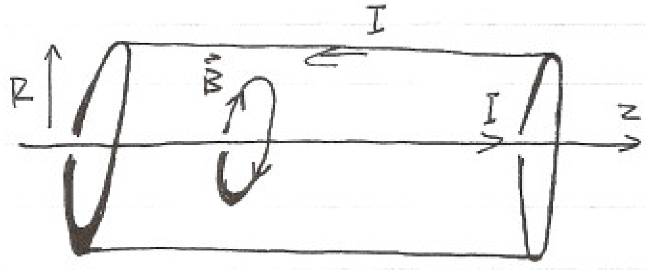
$$\Rightarrow \quad E_R = \frac{1}{2}mV_0^2\left(1 - e^{-2\frac{B^2l^2}{Rm}t}\right)$$

$$E_K(t) = \frac{1}{2}mV_{(t)}^2 = \frac{1}{2}mV_0^2\, e^{-2\frac{B^2l^2}{Rm}t}$$

$$\Rightarrow \quad E_R + E_K = \frac{1}{2}mV_0^2 = E_K(t=0).$$

Άσκηση 13 Εναλλασσόμενο ρεύμα $I(t) = I_0\cos(\omega t)$ διαρρέει προς μια κατεύθυνση ένα ευθύγραμμο σύρμα απείρου μήκους και επιστρέφει μέσω ενός αγώγιμου κυλίνδρου ακτίνας R, ομοαξονικού με το σύρμα.

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$.



Ημιστατική προσέγγιση

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$ νόμος του Ampere

$$\begin{cases} \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}\hat{\varphi}, & r<R \\ \vec{B} = 0, & r>R \end{cases}$$

επαγωγικά φαινόμενα

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ νόμος του Faraday

και $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = E(r)\,\hat{z}$

Προσοχή: Γράψτε το $\vec{E}$ σε κυλινδρικές

συντεταγμένες $\vec{E} = E_r(r)\hat{r} + E_\varphi(r)\hat{\varphi} + E_z(r)\hat{z}$ (7)
και δείχτε ότι με το $\vec{B} = B(r)\hat{\varphi}$ επιζεί μονο η z συνιστώσα του $\vec{E}$.

Ο νόμος του Faraday δίνει λοιπόν

$$-\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \frac{dE}{dr} = -\frac{\mu_0 I_0 \omega \sin(\omega t)}{2\pi r}$$

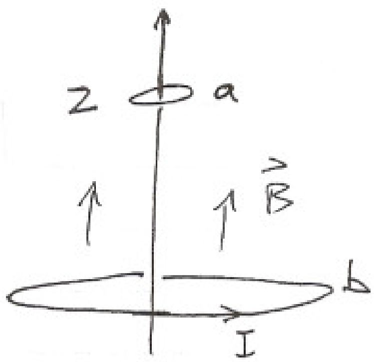
ολοκληρώνοντας απο $r \to R$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(r) - E(R) = -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \sin\omega t \ln\left(\frac{r}{R}\right) \text{ για } r < R. \\ E(r) - E(R) = 0 \text{ για } r > R \Rightarrow E(r) = E(R). \end{cases}$$

$\Rightarrow E(r) = $ σταθερο $=$ μηδεν για $r > R$
διοτι $B = 0$, $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ για $r > R$ και δεν εχουμε επαγωγικά φαινόμενα για $r > R$.

$$\Rightarrow E(r) = -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \sin(\omega t) \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Άσκηση 18 Μικρός κυκλικός συρμάτινος βρόχος (ακτίνας a) βρίσκεται σε απόσταση z πάνω από το κέντρο ενός μεγάλου βρόχου (ακτίνας b). Τα επίπεδα των δύο βρόχων είναι παράλληλα και τέμνονται κάθετα από τον κοινό τους άξονα.
α) ρεύμα I διαρρέει τον μεγάλο βρόχο, βρείτε την ροή που περνάει απο τον μικρό βρόχο.



έχουμε $a \ll b$ και $z \gg a$
Άρα σε πολύ καλή προσέγγιση το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό επάνω στην επιφάνεια του μικρού βρόχου.

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_{\substack{\text{μικρό}\\\text{βρόχο}}} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\pi a^2 b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}} = M I$$

$$\underbrace{M = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{a^2 b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}}$$ { συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής

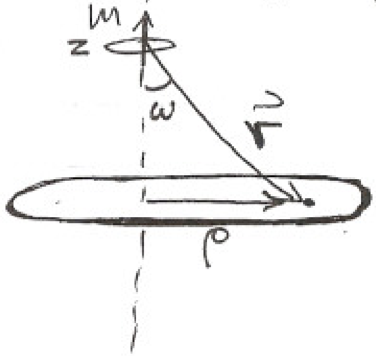
β) ρεύμα I διαρρέει τον μικρό βρόχο, βρείτε την ροή που περνάει από τον μεγάλο βρόχο.

Θεωρούμε τον μικρό βρόχο σαν μαγνητικό δίπολο με μαγνητική διπολική ροπή:

$$\vec{m} = \pi a^2 I \hat{z} = m \hat{z}$$

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται είναι:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m} \right]$$



$$\Phi = \int_{\substack{\text{μεγάλο}\\\text{βρόχο}}} \vec{B}\cdot d\vec{s}, \quad d\vec{s} = \hat{z}\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$\Phi = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3m(\hat{z}\cdot\hat{r})(\hat{r}\cdot\hat{z}) - m\,\hat{z}\cdot\hat{z}\right]\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le b$, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\hat{z}\cdot\hat{r} = -\cos\omega$

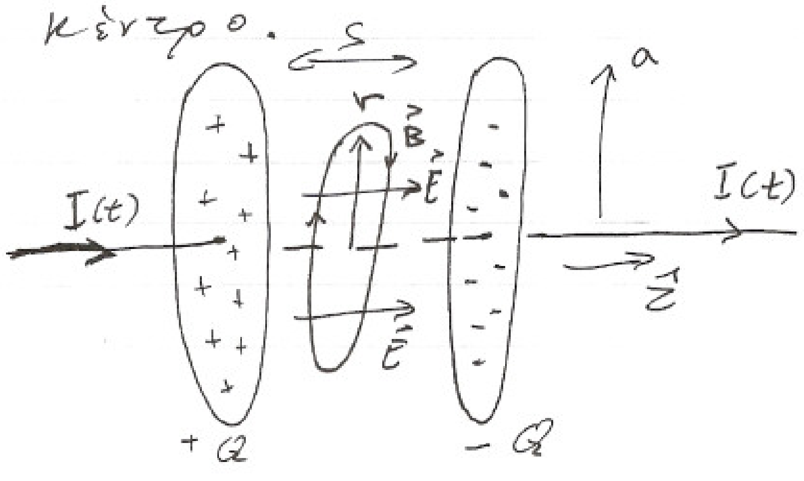
$\cos\omega = \frac{z}{r}$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{2\pi\mu_0}{4\pi}\,\pi a^2 I \left\{ \int_0^b \frac{3z^2}{r^5}\rho\, d\rho - \int_0^b \frac{1}{r^3}\rho\, d\rho \right\}$$

μετά την ολοκλήρωση έχουμε:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \pi}{2}\,\frac{a^2 b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\, I = M\, I$$

$\boxed{\text{Άσκηση 31}}$ Πυκνωτής αποτελείται από δύο παράλληλες κυκλικές πλάκες, με ακτίνα a που απέχουν μεταξύ τους απόσταση s ($s >> a$). Ο πυκνωτής φορτίζεται με ένα ευθύγραμμο σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Για όσο χρονικό διάστημα διαρκεί η φόρτιση του πυκνωτή βρείτε το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο μεταξύ των πλακών και σε απόσταση r ($r < a$) από το κέντρο.



Οι δύο πλάκες του πυκνωτή είναι ισοδυναμικές επιφάνειες.
η αγωγιμότητα των μεταλλικών πλακών άπειρη.

$\vec{E}$ κάθετο στους οπλισμούς (πλάκες) του πυκνωτή και χρονικά μεταβαλλόμενο.

Σε πρώτη προσέγγιση η επιφανειακή πυκνότητα των πλακών σταθερή $\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q(t)}{\pi a^2}\hat{z}$$

Απο τον νόμο του Ampere έχουμε

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \vec{B} = B(r)\,\hat{\varphi}$$

σε ολοκληρωτική μορφή ο νόμος του Ampere γράφεται:

$$\oint_{c_1}\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0\int_{S_1}\frac{d\vec{E}}{dt}\cdot d\vec{s}$$

η κλειστή καμπύλη c_1 είναι ένας κύκλος ακτίνας r

$$\Rightarrow 2\pi r B = \mu_0\varepsilon_0\frac{\frac{dQ}{dt}}{\varepsilon_0\pi a^2}\pi r^2 \quad , \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow B(r,t) = \frac{\mu_0}{2}I(t)\frac{r}{a^2}$$

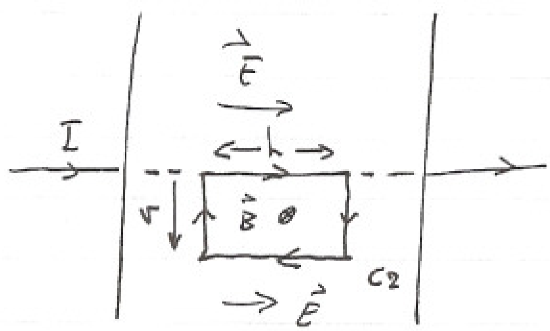
Το μαγνητικό πεδίο είναι χρονικά μεταβαλλόμενο. Άρα δημιουργεί ένα δευτερογενές ηλεκτρικό πεδίο απο τον νόμο της Επαγωγής του Faraday: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

και αυτό με τη σειρά του δίνει από τον νόμο του ampere ένα δευτερογενές μαγνητικό πεδίο....

$$\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \dots \quad \text{με} \quad \vec{E}^{(1)} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi a^2}\hat{z}$$

$$\vec{B} = \vec{B}^{(1)} + \vec{B}^{(2)} + \dots \quad \text{με} \quad \vec{B}^{(1)} = \frac{\mu_0 I(t)}{2}\frac{r}{a^2}\hat{\varphi}$$

για να βρούμε το $E^{(2)}$ εφαρμόζουμε τον νόμο του Faraday σε ολοκληρωτική μορφή στην καμπύλη (παραλληλόγραμμο) C_2:



$$\oint_{C_2} \vec{E}^{(2)}\cdot d\vec{l} = -\int_{S_2} \frac{d\vec{B}^{(1)}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

κρατώμε $\vec{E}(0) = \vec{E}^{(1)}$

$$\Rightarrow \quad -E^{(2)}(r)\,h = -\frac{\mu_0}{2}\frac{dI}{dt}\frac{1}{a^2}h\int_0^r r\,dr = -\frac{\mu_0}{2}\frac{dI}{dt}\frac{r^2}{2a^2}h$$

$$\Rightarrow \quad E^{(2)} = \frac{\mu_0}{4}\frac{dI}{dt}\frac{r^2}{a^2}$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere στην καμπύλη C_1 βρίσκουμε μέσω του $E^{(2)}$ το $B^{(2)}$....

Τελικά η πυκνότητα φορτίου πάνω στις πλάκες είναι $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}$, $\hat{n} = \hat{z}$ και $\hat{n} = -\hat{z}$ αντίστοιχα.

$\boxed{\text{Άσκηση 35}}$ $V(\vec{r},t)=0, \quad \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}$

Βρείτε τα πεδία και τις κατανομές φορτίου και ρεύματος.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\times\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

διότι $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$ και $\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = -\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi\delta(\vec{r})(-1) = \frac{-1}{\varepsilon_0}q\delta(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ πυκνότητα φορτίου $\underbrace{\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})}$, σημειακό φορτίο q στην θέση $\vec{r}=0$.

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\vec{r})$$

$\boxed{\text{Άσκηση 37}}$ Μετασχηματίστε τα προηγούμενα δυναμικά χρησιμοποιώντας την συνάρτηση βαθμίδας:

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r}.$$

$$\Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r} - \frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 42}}$ Ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίνεται από τα δυναμικά:

$V=0, \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 \alpha}{4c}(ct-|x|)^2\, \hat{z}$ για $x<ct$ και μηδέν για $x>ct$.

α) Βρείτε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \alpha}{2}(ct-|x|)\,\hat{z}$$

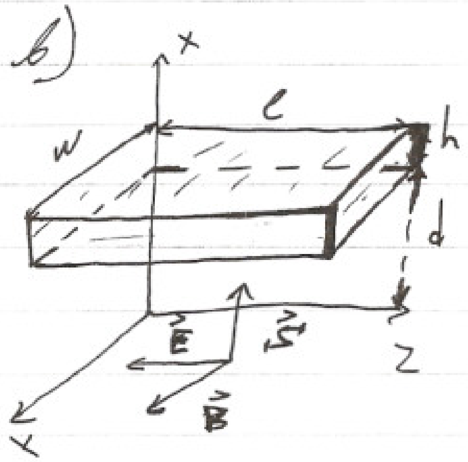
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \alpha}{2c}(ct-|x|)\,\hat{y} & \text{για } x>0 \\ -\frac{\mu_0 \alpha}{2c}(ct-|x|)\,\hat{y} & \text{για } x<0 \end{cases}$$

για $|x|<ct$.

$\vec{E}=0, \ \vec{B}=0$ για $|x|>ct$.

β)



Βρείτε την ενέργεια που υπάρχει στο κουτί διαστάσεων w, l, h την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{d}{c}$.

$W(t_1 = \frac{d}{c}) = 0$ διότι μόλις καταφθάνουν τα πεδία.

Βρείτε την ενέργεια στο κουτί την χρονική στιγμή $t_2 = \frac{d+h}{c}$.

$$W\left(t_2 = \frac{d+h}{c}\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{κουτί}} \vec{E}^2\, d^3x + \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{κουτί}} \vec{B}^2\, d^3x$$

$$W\left(t_2 = \frac{d+h}{c}\right) = wl\,\frac{\varepsilon_0}{2}\,\frac{\mu_0^2\alpha^2}{4}\int_d^{d+h}(d+h-x)^2\,dx$$

$$+\; wl\,\frac{1}{2\mu_0}\,\frac{\mu_0^2\alpha^2}{4c^2}\int_d^{d+h}(d+h-x)^2\,dx$$

$$\Rightarrow\; W(t_2) = wl\,\frac{\varepsilon_0\mu_0^2\alpha^2}{4}\,\frac{h^3}{3} = (wlh)\,\frac{\varepsilon_0\mu_0^2\alpha^2h^2}{12}$$

δ) Βρείτε το διάνυσμα Poynting για $x>0$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = -\frac{\mu_0\alpha^2}{4c}(ct-|x|)^2\,\hat{z}\times\hat{x}$$

$$\Rightarrow\; \underline{\vec{S} = \frac{\mu_0\alpha^2}{4c}(ct-|x|)^2\,\hat{x}}$$

Υπολογίστε την ενέργεια που εισρέει ανά μονάδα χρόνου στο κουτί

$$\frac{dW}{dt} = \int_{S'}\vec{S}\cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0\alpha^2}{4c}(ct-d)^2\,wl$$

Υπολογίστε την ενέργεια που εισρέει κατά το χρονικό διάστημα $t_1 < t < t_2$.

$$W = wl\,\frac{\mu_0\alpha^2}{4c}\int_{t_1=\frac{d}{c}}^{t_2=\frac{d+h}{c}}(ct-d)^2\,dt =$$

$$= (wlh)\,\frac{\varepsilon_0\mu_0\alpha^2h^2}{12}$$