Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Κεφάλαιο 3

Άσκηση 19 Σφαίρα ακτίνας R με δυναμικό $V_0(\theta) = k\cos(3\theta)$ στην επιφάνειά της.

α) Βρείτε το Δυναμικό $V(r)$.

β) Βρείτε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma(\theta)$.

a) $r > R$ $$V_>(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$$

$r < R$ $$V_<(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \quad , \quad P_3(\cos\theta) = \frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos(3\theta) = \frac{8}{5} P_3(\cos\theta) - \frac{3}{5} P_1(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow V_0(\theta) = \frac{8k}{5} P_3(\cos\theta) - \frac{3k}{5} P_1(\cos\theta)$$

Προσδιορίζουμε τα A_ℓ, B_ℓ από τις σχέσεις συνέχειας του δυναμικού για $r = R$:

$$V_>(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = V_0(\theta) \quad , \quad \forall\theta$$

$$\Rightarrow \frac{B_1}{R^2} = -\frac{3k}{5} \quad \text{και} \quad \frac{B_3}{R^4} = \frac{8k}{5}, \; B_\ell = 0 \text{ για } \ell \neq 3,1$$

$$\Rightarrow B_1 = -\frac{3k}{5} R^2 \quad \text{και} \quad B_3 = \frac{8k}{5} R^4$$

$$\Rightarrow V_>(r,\theta) = -\frac{3k}{5}\frac{R^2}{r^2} P_1(\cos\theta) + \frac{8k}{5}\frac{R^4}{r^4} P_3(\cos\theta)$$

όμοια: $V_<(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) = V_0(\theta) \quad \forall\theta$

$$\Rightarrow A_1 R = -\frac{3k}{5} \quad \text{και} \quad A_3 R^3 = \frac{8k}{5}, \; A_\ell = 0 \text{ για } \ell \neq 1,3$$

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{3k}{5R} \quad \text{και} \quad A_3 = \frac{8k}{5R^3}$$

$$\Rightarrow V_<(r,\theta) = -\frac{3k}{5}\frac{r}{R} P_1(\cos\theta) + \frac{8k}{5}\frac{r^3}{R^3} P_3(\cos\theta)$$

β) $$\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0} = \vec{E}_>\cdot\hat{r} - \vec{E}_<\cdot\hat{r} = -\left.\frac{\partial V_>}{\partial r}\right|_{r=R} + \left.\frac{\partial V_<}{\partial r}\right|_{r=R}$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta) = -\frac{9}{5}\frac{k\varepsilon_0}{R} P_1(\cos\theta) + \frac{56}{5}\frac{k\varepsilon_0}{R} P_3(\cos\theta)$$

$\boxed{\text{Άσκηση 23}}$ ~~Έχουμε~~ Πυκνότητα φορτίου $\sigma(\theta)$ επάνω σε μια σφαίρα ακτίνας R.

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{για } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ βόρειο ημισφαίριο} \\ -\sigma_0 & \text{για } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, \text{ νότιο ημισφαίριο} \end{cases}$$

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από το σφαιρικό κέλυφος.

ισχύει: $r > R$, $V_>(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$

$r < R$, $V_<(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$

i) Συνθήκη συνέχειας του δυναμικού για $r = R$

$V_<(R,\theta) = V_>(R,\theta) \quad \forall\, \theta \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow \quad \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} = A_\ell R^\ell \quad \forall\, \ell$$

ii) Σχέση δυναμικού (έντασης) φορτίου

$$\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0} = \vec{E}_> \cdot \hat{r} - \vec{E}_< \cdot \hat{r} = -\left.\frac{\partial V_>}{\partial r}\right|_{r=R} + \left.\frac{\partial V_<}{\partial r}\right|_{r=R}$$

$$-\left.\frac{\partial V_>}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \frac{B_\ell}{R^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\left.\frac{\partial V_<}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_\ell R^{\ell-1} P_\ell(\cos\theta)$$

ακόμη από την πρώτη συνθήκη έχουμε: $\frac{B_\ell}{R^{\ell+2}} = A_\ell R^{\ell-1}$

$$\Rightarrow -\left.\frac{\partial V_>}{\partial r}\right|_{r=R} + \left.\frac{\partial V_<}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{B_\ell}{R^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta) = \varepsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{B_\ell}{R^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta)$$

Πολ/ζουμε δεξιά και αριστερά με το πολυώνυμο

Legendre $P_\kappa(\cos\theta)$ ολοκληρώνουμε ως προς την γωνία θ από 0 έως π και βρίσκουμε τον κ συντελεστή.

$$\Rightarrow \int_0^\pi \sigma(\theta) P_\kappa(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \varepsilon_0 \cancel{(2\kappa+1)} \frac{B_\kappa}{R^{\kappa+2}} \frac{2}{\cancel{(2\kappa+1)}}$$

το αριστερό μέλος είναι:

$$\int_0^\pi \sigma(\theta) P_\kappa(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_0 P_\kappa(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta -$$

$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma_0 P_\kappa(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_\kappa(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = -\int_1^0 P_\kappa(x)\, dx = \int_0^1 P_\kappa(x)\, dx$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} P_\kappa(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = -\int_0^{-1} P_\kappa(x) dx = \int_0^1 P_\kappa(-x)\, dx = (-1)^\kappa \int_0^1 P_\kappa(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \sigma(\theta) P_\kappa(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \sigma_0\left(1-(-1)^\kappa\right)\int_0^1 P_\kappa(x)\, dx$$

$$= 2\sigma_0 \int_0^1 P_\kappa(x)\, dx = 2\sigma_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^{(\kappa-1)/2} \frac{(\kappa-2)!!}{2\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)!}$$

για <u>κ = περιττός αριθμός</u>, αλλιώς είναι μηδέν.

Χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις: $P_\ell(1)=1$,

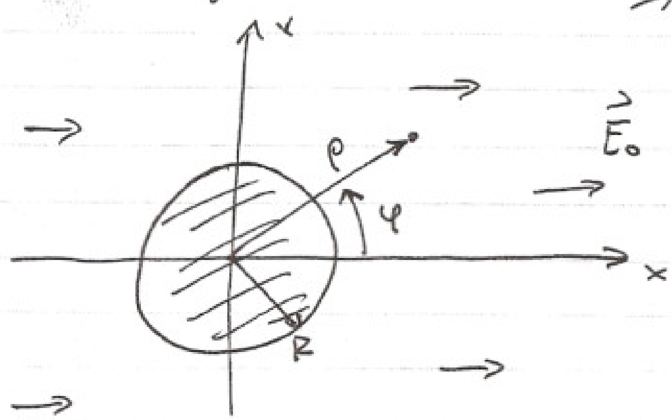
$(2\ell+1)P_\ell(x) = \frac{dP_{\ell+1}}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}}{dx}$ και $\left[P_\ell(0) = (-1)^{\ell/2}\frac{(\ell-1)!!}{\ell!!}\right.$ για ℓ = άρτιος.$\Big]$

$[P_\ell(0)=0$ για ℓ = περιττός$]$.

Άσκηση 25

Έχουμε έναν μεταλλικό κυλινδρικό σωλήνα απείρου μήκους (με άξονα κατά μήκος του z) ακτίνας R, στον χώρο υπάρχει ένα αρχικά ομογενές ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του άξονα του x.
Βρείτε το δυναμικό στον χώρο εκτός του αγώγιμου σωλήνα.

Βρείτε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου που επάγεται στον σωλήνα.



$\vec{E}_0 = E_0 \hat{x}$ αρχικά και επίσης μακριά από τον κύλινδρο δηλαδή για $\rho \to \infty$.

$$\hat{x} = \cos\varphi\, \hat{\rho} - \sin\varphi\, \hat{\varphi}$$

Από την προηγούμενη άσκηση (24) ξέρουμε ότι η ανάπτυξη του δυναμικού σε κυλινδρικές (πολικές) συντεταγμένες είναι:

$$V(\rho,\varphi) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Gamma_n \rho^n + \Delta_n \rho^{-n}\right) \sin n\varphi$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{\Gamma}_n \rho^n + \tilde{\Delta}_n \rho^{-n}\right) \cos n\varphi$$

<u>Συνοριακές συνθήκες</u> i) ο αγώγιμος κύλινδρος είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια, υποθέτουμε με δυναμικό μηδέν

$$\Rightarrow V(R,\varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in (0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_n R^n + \Delta_n R^{-n} = 0 \quad \Rightarrow \Delta_n = -\Gamma_n R^{2n}$$

$$\tilde{\Gamma}_n R^n + \tilde{\Delta}_n R^{-n} = 0 \quad \Rightarrow \tilde{\Delta}_n = -\tilde{\Gamma}_n R^{2n}$$

$$V_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \left(\rho^n - \frac{R^{2n}}{\rho^n}\right) \sin n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_n \left(\rho^n - \frac{R^{2n}}{\rho^n}\right) \cos n\varphi$$

ii) Στο άπειρο ($\rho \to \infty$) το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E}_0$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \xrightarrow[\rho \to \infty]{} E_0 \cos\varphi\, \hat{\rho} - E_0 \sin\varphi\, \hat{\varphi}$$

Χρησιμοποιούμε την ρ συνιστώσα, η φ συνιστώσα θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \left(n\rho^{n-1} + n\frac{R^{2n}}{\rho^{n+1}}\right) \sin n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_n \left(n\rho^{n-1} + n\frac{R^{2n}}{\rho^{n+1}}\right) \cos n\varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} \xrightarrow[\rho \to \infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_n \rho^{n-1} \sin n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\Gamma}_n \rho^{n-1} \cos n\varphi = -E_0 \cos\varphi$$

από την ορθογωνιότητα των $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$ $\forall n$ έχουμε:

$$\tilde{\Gamma}_1 = -E_0, \quad \tilde{\Gamma}_n = 0 \ \forall n > 1, \quad \Gamma_n = 0, \ \forall n.$$

$$\Rightarrow \quad V(\rho,\varphi) = -E_0\left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)\cos\varphi$$

Πυκνότητα επαγόμενου επιφανειακού φορτίου σ:

$$\sigma(\varphi) = \varepsilon_0 \vec{E}(R,\varphi)\cdot\hat{\rho} = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = 2E_0\cos\varphi$$

$$Q_{ολ} = \int_{κυλ.} \sigma\, da = \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi) R\, d\varphi \equiv \text{μηδέν}.$$

Κεφάλαιο 4

Άσκηση 1 Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης ενός διπόλου $\vec{P}$ και ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι:

$$V = -\vec{P}\cdot\vec{E}$$

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ μιας κατανομής φορτίου $\rho(\vec{r})$ και ενός ηλεκτρικού εξωτερικού πεδίου είναι

$$W = \int \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,d^3x$$

Αναπτύσσουμε το δυναμικό σε σειρά taylor στην περιοχή $\vec{r}\approx 0$ που βρίσκεται το φορτίο

$$V(\vec{r}) = V(0) + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}V\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

$$\vec{E}(0) = -\vec{\nabla}V\Big|_{\vec{r}=0}$$

$$\Rightarrow W = V(0)\int\rho(\vec{r})\,d^3x - \int \vec{E}(0)\cdot\vec{r}\,\rho(\vec{r})\,d^3x + \dots$$

$$W = Q\,V(0) - \vec{E}(0)\cdot\vec{P} + \dots \text{(τετράπολο, οκτάπολο, κλπ)}$$

$$Q = \int\rho(\vec{r})\,d^3x \quad , \quad \vec{P} = \int \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,d^3x$$

Όταν έχουμε μόνο ένα δίπολο σημειακό μάλιστα $Q=0$, και οι ανώτερες πολυπολικές ροπές είναι μηδέν.

$$\Rightarrow W = -\vec{P}\cdot\vec{E}\,.$$

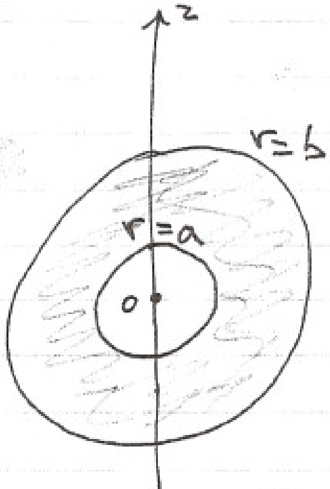
$\boxed{\text{Άσκηση 15}}$

Παχύ σφαιρικό κέλυφος έχει πόλωση

$$\vec{P} = \frac{k}{r}\hat{r} = \vec{P}(r)$$

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο.

a) Εντοπίζοντας όλα τα δέσμια φορτία.



$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -k\,\vec{\nabla}\left(\frac{\hat{r}}{r}\right) = -\frac{k}{r^2}$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\sigma_b(a) = \vec{P}\cdot(-\hat{r}) = -\frac{k}{a}$$

$$\sigma_b(b) = \vec{P}(b)\cdot(\hat{r}) = \frac{k}{b}$$

Ολικό φορτίο Q:

$$Q = -\frac{k}{a}4\pi a^2 + \frac{k}{b}4\pi b^2 - k\int_a^b \frac{1}{r^2}\,r^2 dr\,4\pi = 0$$

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Gauss για τον προσδιορισμό του $\vec{E}$: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_0}$

I) $r < a \Rightarrow E = 0$.

III) $r > b \Rightarrow E = 0$.

II) $a < r < b$

$$4\pi r^2 E(r) = -\frac{k}{\varepsilon_0 a}4\pi a^2 - \frac{k}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{4\pi r'^2 dr'}{r'^2}$$

$$4\pi r^2 E = -\frac{4\pi k a}{\varepsilon_0} - \frac{4\pi k}{\varepsilon_0}(r-a) = -\frac{4\pi k}{\varepsilon_0} r$$

$$E = -\frac{k}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} \;.$$

β) Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Gauss για την ηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$

$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = q_{ελ} = 0$ σε αυτήν την περίπτωση.
για κάθε επιφάνεια.

$$\Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = 0$$

I) $\underline{r<a} \Rightarrow \vec{D}=0 \Rightarrow \vec{E}=0$, III) $\vec{D}=0 \Rightarrow \vec{E}=0$

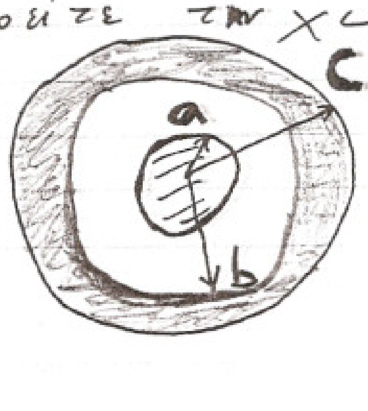
II) $\underline{a<r<b} \Rightarrow \vec{D}=0$ ομοίως

αλλά $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \Rightarrow \varepsilon_0\vec{E} = -\vec{P}$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P} = -\frac{k}{\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r} \;.$$

Άσκηση 21 Δύο ομοαξονικοί αγώγιμοι κύλινδροι άπειρου μήκους ακτίνας a και c $(a<c)$ περιέχουν διηλεκτρικό ε μεταξύ των ακτίνων b και c με $b<c$.

Βρείτε την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους.



$$C = \frac{Q}{V}$$

Q = φορτίο ανά μονάδα μήκους του κυλίνδρου.

Θετικό στον αγωγό με ακτίνα a
αρνητικό στον αγωγό με ακτίνα c.

V = διαφορά δυναμικού $= V_a - V_c$

για την ηλεκτρική μετατόπιση ισχύει ο νόμος του Gauss:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q \quad \text{και} \quad \vec{D} = D(\rho)\,\hat{\rho}$$

$\underline{a<\rho<b}$ $\quad D_I = \dfrac{Q}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{E}_I = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}_I = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{\rho}}{\rho}$

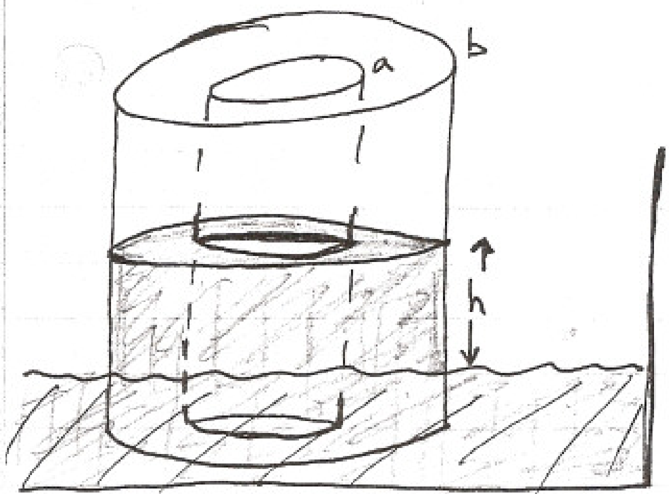
$\underline{b<\rho<c}$ $\quad D_{II} = \dfrac{Q}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{E}_{II} = \dfrac{1}{\varepsilon}\vec{D}_{II} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon}\dfrac{\hat{\rho}}{\rho}$

$$V = V_a - V_c = \int_a^c \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_I\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E}_{II}\cdot d\vec{l} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon}\int_b^c \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{Q}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 29}}$ Δύο ομοαξονικοί κύλινδροι απείρου μήκους (με ακτίνες a και b, a<b) είναι τοποθετημένοι κατακόρυφα σε ένα δοχείο με διηλεκτρικό υγρό. Οι δύο κύλινδροι διατηρούνται σε διαφορά δυναμικού V. Μέχρι ποιο ύψος ανυψώνεται το υγρό στον μεταξύ των οπλισμών χώρο;



Το πρόβλημα έχει κυλινδρική συμμετρία:

$$\vec{E} = \frac{\Lambda}{\rho}\hat{\rho}$$

βρίσκουμε την σταθερά Λ

$$V = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$V = \Lambda \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \Lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \Lambda = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{\hat{\rho}}{\rho}$$ εντός και εκτός του διηλεκτρικού.

Υπολογίζουμε την μεταβολή στην ενέργεια χωρίς διηλεκτρικό και με διηλεκτρικό:

$$W_0 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{όγκο}} \vec{E}^2 \, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b \frac{V^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{2\pi\rho \, d\rho \, h}{\rho^2}$$

$$W_0 = \frac{\pi h \varepsilon_0 V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \text{και} \quad W = \frac{\pi h \varepsilon V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\delta W = \pi(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} h$$ $\Rightarrow$ Η δύναμη που ασκείται στο διηλεκτρικό από το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$F_{\eta\lambda} = \frac{\delta W}{\delta h} = \pi(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Η δύναμη του πεδίου βαρύτητας είναι

$$\vec{F}_{\beta\alpha\rho} = m_{\delta\iota\eta\lambda}\, g = h\pi(b^2-a^2)\, d\, g$$

$d =$ πυκνότητα διηλεκτρικού

$$\Rightarrow \quad F_{\eta\lambda} = F_{\beta\alpha\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \pi(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = h\pi(b^2-a^2)\, d\, g$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\, V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)(b^2-a^2)\, d\, g}$$

Για την δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας ισχύει

$$W_{\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha\varsigma} = m g \frac{h}{2} = \frac{\delta W}{2}$$

Το υπόλοιπο έργο από το ηλεκτρικό πεδίο πήγε στην πόλωση του διηλεκτρικού.
