Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Κεφάλαιο 5

Άσκηση 1 Για μια διάταξη φορτίων και ρευμάτων περιορισμένων μέσα σε έναν όγκο V, δείξτε ότι:

$$\int_V \vec{J}\, d^3x = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad \vec{P} = \int_V \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, d^3x .$$

Υπολογίζω το ολοκλήρωμα $\int_V \vec{\nabla}(x\vec{J})\, d^3x =$

$$= \int_V \vec{\nabla}(x)\cdot\vec{J}\, d^3x + \int x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, d^3x =$$

$$= \int \hat{x}\cdot\vec{J}\, d^3x + \int x\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) d^3x = \int_V J_x\, d^3x - \frac{d}{dt}\int_V x\rho\, d^3x$$

ακόμη ισχύει: $$\int_V \vec{\nabla}(x\vec{J})\, d^3x = \oint_S x\vec{J}\cdot d\vec{s} \xrightarrow[S\to\infty]{} 0$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται όταν η επιφάνεια S τείνει στο άπειρο διότι τα φορτία και τα ρεύματα είναι περιορισμένα σε έναν πεπερασμένο όγκο V άρα μηδενίζονται στο άπειρο.

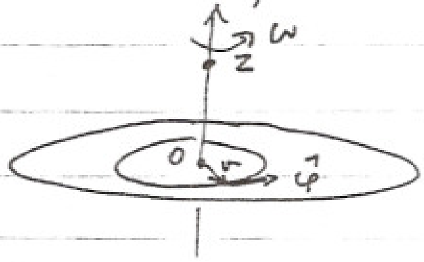
$$\Rightarrow \int_V J_y \, d^3x = \frac{d}{dt}\int_V y\,\rho(\vec{r})\, d^3x$$

το ίδιο ισχύει για την x και την z συνιστώσα άρα και για ολόκληρο το διάνυσμα

$$\vec{J} = J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z}$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{J}\, d^3x = \frac{d}{dt}\int_V \vec{r}\,\rho(\vec{r})\, d^3x = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Άσκηση 13 α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο z επάνω στον άξονα περιστροφής ενός περιστρεφόμενου δίσκου ακτίνας R, γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.



Επάνω στον δίσκο έχουμε επιφανειακά ρεύματα

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \omega r \hat{\varphi}$$

Το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο θα εμφανίζεται επάνω στον άξονα, στο σημείο z, λόγω ενός στοιχειώδους κυκλικού αγωγού στον δίσκο πάχους dr (ακτίνας r) είναι:

$$d\vec{B} = dB_z \hat{z}, \quad dB_z = \frac{\mu_0\, dI}{2}\,\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$dI = K\,dr = \sigma\omega r\,dr$$

$$\Rightarrow \quad dB_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \, \frac{r^3 \, dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

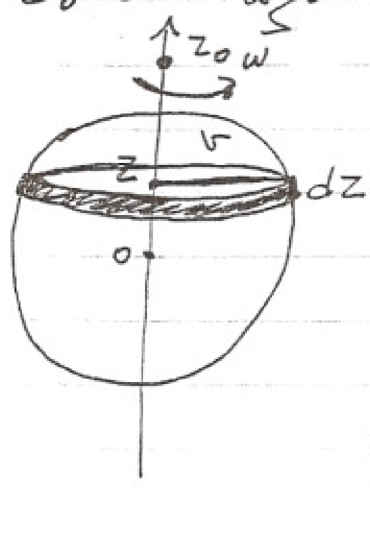
Το συνολικό πεδίο είναι το άθροισμα των μαγνητικών πεδίων από κάθε στοιχειώδες κυκλικό αγωγό

$$\Rightarrow \quad B_z = \sum dB_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3 \, dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z^2}{\sqrt{z^2}} \right]$$

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2|z| \right]$$

β) Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ακτίνας R, με ολικό φορτίο Q, περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα ω. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο z_0 του άξονα περιστροφής ~~για~~ $z_0 > R$.



Μέσα στη σφαίρα εμφανίζονται ρεύματα με πυκνότητα

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \, \vec{\omega} \times \vec{r}$$

ρ = πυκνότητα φορτίων ανά μονάδα όγκου

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

(στοιχειώδεις)
Χωρίζουμε τη σφαίρα σε δίσκους πάχους dz
οι δίσκοι αυτοί δίνουν στο σημείο z_0 ένα
μαγνητικό πεδίο, όπως στο ερώτημα (α)
και μετά αθροίζουμε τό μαγνητικό πεδίο
από όλους τους δίσκους.
Για κάθε δίσκο έχουμε $\sigma \to \rho\, dz$

Έστω τώρα ο δίσκος πάχους dz στη θέση
z δηλαδή με ακτίνα r, $r = \sqrt{R^2 - z^2}$.

$$dB_{\text{δισκου}}(z_0) = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2}\left[\frac{2(z_0-z)^2 + r^2}{\sqrt{r^2 + (z_0-z)^2}} - 2(z_0-z)\right] dz$$

$$dB_{\text{δισκου}}(z_0) = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2}\left[\frac{2(z_0-z)^2 + R^2 - z^2}{\sqrt{R^2 - z^2 + (z_0-z)^2}} - 2(z_0-z)\right] dz$$

$$B(z_0) = \sum_{\text{δισκους}} dB_{\text{δισκο}}(z_0) =$$

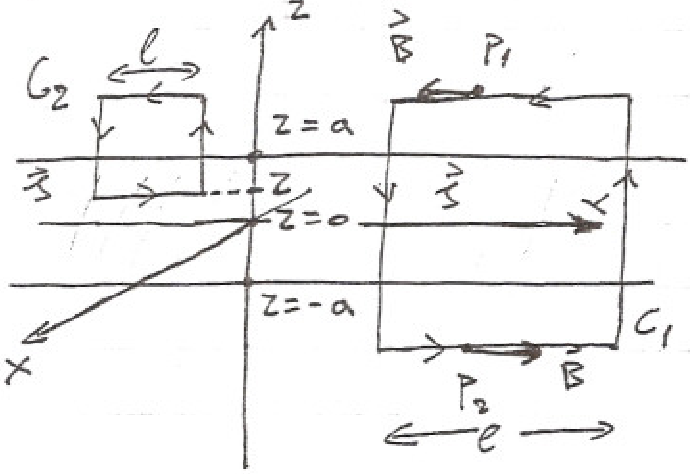
$$= \frac{\mu_0 \rho \omega}{2}\int_{-R}^{R} dz \left[\frac{2(z_0-z)^2 + R^2 - z^2}{\sqrt{R^2 - z^2 + (z_0-z)^2}} - 2(z_0-z)\right]$$

Βρείτε τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται
από έναν πίνακα ολοκληρωμάτων και
υπολογίστε το τελικό αποτέλεσμα.

Άσκηση 16

Μια άπειρη επίπεδη πλάκα πάχους $2a$ (από το $z=-a$ έως το $z=a$) παράλληλη με το (x,y) επίπεδο, διαρρέεται από ομογενές ρεύμα χωρικής πυκνότητας $\vec{J} = J\hat{x}$.

Βρείτε το μαγνητικό πεδίο παντού στον χώρο.



i) Βήμα πρώτο
αποδεικνύουμε χρησιμοποιώντας τον νόμο των Biot-Savart ότι το μαγνητικό πεδίο έχει συνιστώσα μόνο κατά μήκος του άξονα των y.

$\vec{B} = B(z)\hat{y}$ συγκεκριμένα για $z>a$ το μαγνητικό πεδίο βλέπει στο $(-\hat{y})$
για $z<-a \Rightarrow \vec{B}$ βλέπει στο $(\hat{y})$.

ii) Για ίσες ~~αποστάσεις~~ αποστάσεις από τον άξονα $z=0$ θα έχουμε την ίδια τιμή (κατ' απόλυτο τιμή) για το μαγνητικό πεδίο, λόγω συμμετρίας.
Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere στο παραλληλόγραμμο C_1

$$\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} \Rightarrow 2B(z)\,l = \mu_0 J 2a l$$

$\Rightarrow$ για $|z|>a$ έχουμε $B(z) = B_0 = \mu_0 J a$

6

iii) Βρίσκουμε το μαγνητικό πεδίο μέσα στην κατανομή των ρευμάτων δηλαδή για $-a < z < a$

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere στο παραλληλόγραμμο C_2:

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

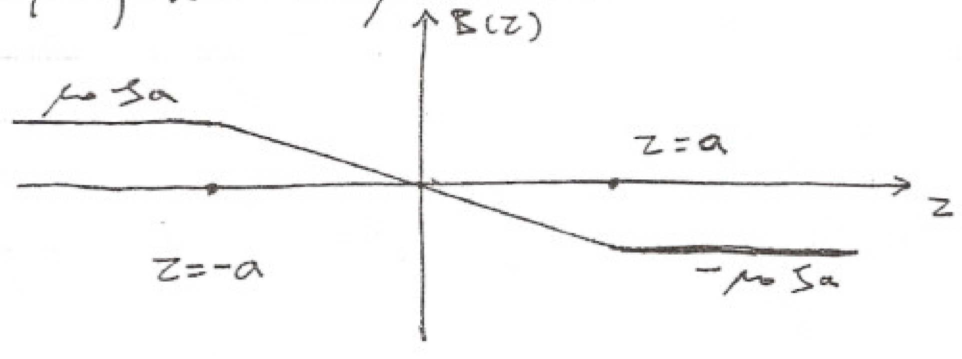
Ξέρουμε ότι για $z > a$ έχουμε $\vec{B} = -B_0 \hat{x}$. Και θέτουμε για $-a < z < a$ $\vec{B} = B(z)\hat{x}$. Εάν βγει θετικό το $B(z)$ κοιτάει δεξιά, εάν βγει αρνητικό κοιτάει αριστερά. Το z, συντεταγμένη της δεύτερης πλευράς του παραλληλογράμμου είναι οποιοδήποτε μεταξύ $-a$ και a.

$$\Rightarrow B_0 \ell + B(z)\ell = \mu_0 J (a - z)\ell$$

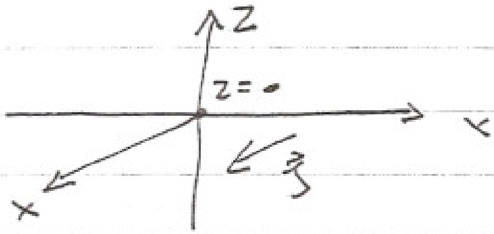
$$\Rightarrow B(z) = \mu_0 J (a - z) - B_0 = -\mu_0 J z$$

$$\Rightarrow \vec{B}(z) = -\mu_0 J z \hat{x}$$

Γραφική παράσταση



Άσκηση 28 Μια άπειρη επίπεδη πλάκα, αμελητέου πάχους, κάθετη στον άξονα των Z (στο σημείο Z=0) διαρρέεται από σταθερό επιφανειακό ρεύμα $\vec{J} = K_0 \hat{x}$. Βρείτε το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ επάνω και κάτω από την πλάκα.



$$\vec{J} = K_0 \hat{x}$$

$$\vec{A} = A(z)\,\hat{x}$$ γιατί?

Το διανυσματικό δυναμικό έχει δύο σχέσεις ορισμού:
$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \text{και} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')\,d^3x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

και οι δύο σχέσεις δείχνουν ότι το $\vec{A} \parallel \vec{J}$ στο συγκεκριμένο πρόβλημα, διότι το διάνυσμα $\vec{J}$ είναι σταθερό στον χώρο.

Ακόμη το διανυσματικό δυναμικό είναι ανεξάρτητο των x και y από την συμμετρία του προβλήματος.

Δεν θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη σχέση για τον ορισμό του $\vec{A}$ διότι το ρεύμα είναι επιφανειακό μόνο, ούτε την δεύτερη διότι το ρεύμα απλώνεται μέχρι το άπειρο.

Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$

αφού βρούμε πρώτα το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

Από την προηγούμενη άσκηση (16) έχουμε

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 K}{2}\hat{y} \quad \text{για } z>0 \quad \Rightarrow \vec{B} = -B_0\hat{y}$$

$$\vec{B} = \mu_0\frac{K}{2}\hat{y} \quad \text{για } z<0 \quad \Rightarrow \vec{B} = B_0\hat{y}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -B_0\hat{y} & \text{για } z>0. \\ B_0\hat{y} & \text{για } z<0. \end{cases}$$

$B_0 = \frac{\mu_0 K}{2}$

$$\Rightarrow \underline{z>0}, \quad \frac{dA}{dz} = -B_0 \Rightarrow A(z) = -B_0 z + A_1$$

$$\underline{z<0}, \quad \frac{dA}{dz} = B_0 \Rightarrow A(z) = B_0 z + A_2$$

Για $z=0$ το διανυσματικό δυναμικό είναι συνεχές

$\Rightarrow A_1 = A_2 = 0$.

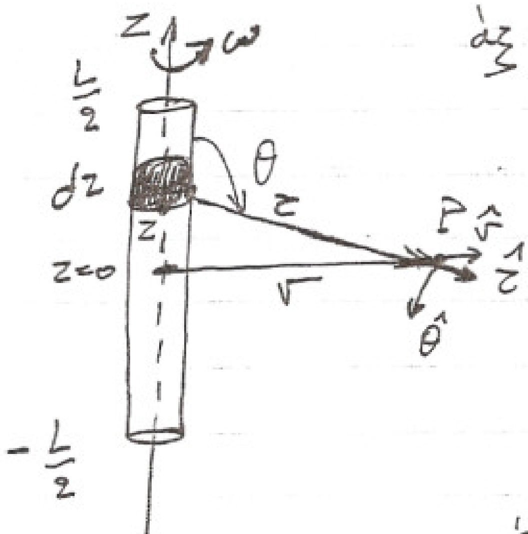
$$\Rightarrow \underline{A(z) = -B_0|z| \quad \forall z}$$

Παρατήρηση (επέκταση του προβλήματος) Εάν η πλάκα είχε πάχος 2a όπως η προηγούμενη άσκηση τότε ποιά είναι η συνάρτηση που δίνει το $\vec{A}$?

$\vec{A} = A(z)\hat{x}$ ξανά, βρείτε το $\vec{B}$ και λύστε την εξίσωση $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$ $\forall z$ (και στις τρείς περιοχές).

Άσκηση 55

Μια λεπτή γυάλινη ράβδος μήκους L και ακτίνας R, φέρει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα ω. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο μεσοκάθετο επίπεδο και σε απόσταση $r \gg R$ από τον άξονα της ράβδου.



Στη θέση z παίρνουμε ένα κομμάτι της ράβδου ύψους dz αυτό διαρρέεται από ρεύμα

$$dI = \sigma \omega R\, dz$$

έχουμε λοιπόν στη θέση αυτή ένα στοιχειώδες Μαγνητικό Δίπολο $d\vec{m}$

$$d\vec{m} = dI\, \pi R^2\, \hat{z} = \sigma \omega \pi R^3\, dz\, \hat{z} = dm\, \hat{z}$$

Το στοιχειώδες μαγνητικό δίπολο δημιουργεί στη θέση P μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ και διανυσματικό δυναμικό $d\vec{A}$:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dm \sin\theta}{z^2} \hat{\varphi} = dA\, \hat{\varphi}$$

$$dA = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma \pi \omega R^3 \sin\theta}{z^2} dz = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3}{4} \frac{r\, dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3 r}{4} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3 L}{4 r \sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4}}}$$

$$\int \frac{dz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2+z^2}}$$

και $\vec{A} = A(r)\,\hat{\varphi}$.

Έχουμε βρει το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ στην θέση $(z=0, r)$ δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο σε αυτήν την θέση, για αυτόν τον σκοπό θα έπρεπε να βρούμε το A σαν συνάρτηση των z και r

διότι $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = - \frac{\partial A}{\partial z}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)\,\hat{z}$

πρώτα παραγωγίζουμε και μετά σπιρίουμε την παράσταση για το σημείο που είμαστε.

Θα υπολογίσουμε απευθείας κατ' ευθείαν το $\vec{B}$.

Το στοιχειώδες διανυσματικό δυναμικό $d\vec{A}$ δίνει ένα στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο στη θέση $(z=0, r)$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dM}{\tau^3}\left(2\cos\theta\,\hat{\tau} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

εκφράζουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\tau}$ και $\hat{\theta}$ μέσω των $\hat{r}$ και $\hat{z}$

$$\hat{\tau} = \cos\theta\,\hat{z} + \sin\theta\,\hat{r}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{z} + \cos\theta\,\hat{r}$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dM}{\tau^3}\left[2\cos^2\theta\,\hat{z} + 3\cos\theta\sin\theta\,\hat{r} - \sin^2\theta\,\hat{z}\right]$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dM}{\tau^3}\left[3\cos^2\theta\,\hat{z} - \hat{z} + 3\cos\theta\sin\theta\,\hat{r}\right]$$

$$\vec{B} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega R^3}{4}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dz}{\tau^3}\left[3\frac{z^2}{\tau^2}\hat{z} - \hat{z} + \cancelto{0}{\frac{3zr}{\tau^2}\hat{r}}\right]$$

αφού $\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{z\,dz}{\tau^5} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{z\,dz}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$

Άρα το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ έχει ουσιαστικά κατά μήκος του $\hat{z}$ μόνο, $\vec{B} = B(r)\,\hat{z}$.

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega R^3}{4}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dz}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\left[3\frac{z^2 \pm r^2}{z^2+r^2} - 1\right]$$

$$B(r) = \frac{\mu_0\sigma\omega R^3}{4}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\left\{\frac{2}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{r^2}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dz}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{L}{r^2\sqrt{r^2+\frac{L^2}{4}}}$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{z}{3r^2}\sqrt{r^2+z^2}\left[\frac{1}{(r^2+z^2)^2} + \frac{2}{r^2(r^2+z^2)}\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{L}{3r^2}\sqrt{r^2+\frac{L^2}{4}}\left[\frac{1}{(r^2+L^2/4)^2} + \frac{2}{r^2(r^2+\frac{L^2}{4})}\right]$$

$$= \frac{L}{3r^2}\sqrt{r^2+\frac{L^2}{4}}\;\frac{3r^2+\frac{L^2}{2}}{r^2(r^2+L^2/4)^2}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0\sigma\omega R^3}{4}\left\{\frac{2L}{r^2\sqrt{r^2+\frac{L^2}{4}}} - \frac{3r^2L}{3r^2}\sqrt{r^2+\frac{L^2}{4}}\;\frac{3r^2+L^2/2}{r^2(r^2+L^2/4)^2}\right\}$$

Κάνουμε τις ενδιάμεσες πράξεις και βρίσκουμε...

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega R^3}{4} L \frac{-r^2}{r^2(r^2+L^2/4)^{\frac{3}{2}}}$$

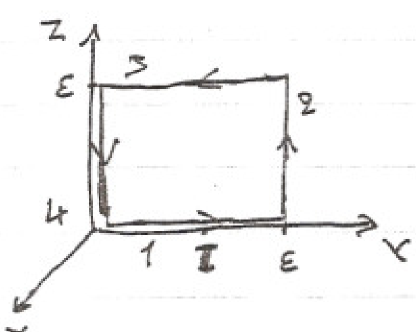
$$\Rightarrow \boxed{B = -\frac{\mu_0\sigma\omega R^3 L}{4(r^2+L^2/4)^{\frac{3}{2}}}} \qquad \vec{B} = B\hat{z}$$

Κεφάλαιο 6

Άσκηση 4 Να αποδείξετε την εξίσωση

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})$$

για την δύναμη που ασκείται σε έναν απειροστό βρόχο διπολικής ροπής $\vec{m}$ που βρίσκεται μέσα σε ένα πεδίο $\vec{B}$.



Η δύναμη που ασκείται σε έναν στοιχειώδη βρόχο εμβαδού ε^2 που διαρρέεται από ρεύμα I είναι

$$\vec{F} = I\oint_c d\vec{l}\times\vec{B}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$\vec{F}_1 = I\int_1 d\vec{l}\times\vec{B}(0,y,0) = I\int_0^{\varepsilon} dy\;\hat{y}\times\vec{B}(0,y,0)$$

$$\vec{F}_3 = I\int_{\varepsilon}^{0} dy\;\hat{y}\times\vec{B}(0,y,\varepsilon) = I\int_{\varepsilon} dy\;\hat{y}\times\vec{B}(0,y,0) +$$

$$+\;\varepsilon I\int_{\varepsilon}^{0} dy\;\hat{y}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}(0,y,0) + \dots =$$

$$= -\int_0^{\varepsilon} dy\;\hat{y}\times\vec{B}(0,y,0) - \varepsilon I\int_0^{\varepsilon} dy\;\hat{y}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}(0,y,0)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = -\varepsilon I\int_0^{\varepsilon} dy\;\hat{y}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}(0,y,0) \simeq -\varepsilon^2 I\;\hat{y}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}(0,0,0)$$

όμοια $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 \simeq \varepsilon^2 I\;\hat{z}\times\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial y}(0,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{F} = I\varepsilon^2 \left(\hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}(0) - \hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}(0) \right) =$$

$$= I\varepsilon^2 \left(\hat{z}\, \partial_y - \hat{y}\, \partial_z \right) \times \vec{B}(0)$$

αλλά $\vec{m} = I\varepsilon^2\, \hat{x}$ και $\vec{m} \times \vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ I\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{m} \times \vec{\nabla} = I\varepsilon^2 \left(\hat{z}\, \partial_y - \hat{y}\, \partial_z \right)$$

$I\varepsilon^2 = m$, $\quad \vec{m} \times \vec{\nabla} = m \left(\hat{z}\, \partial_y - \hat{y}\, \partial_z \right)$

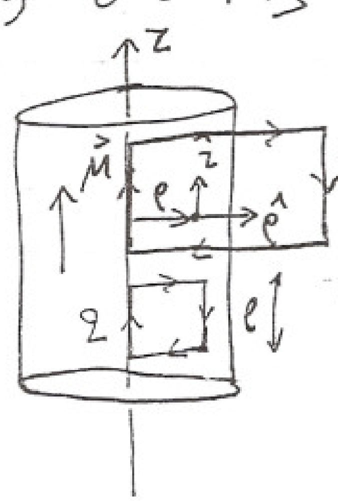
$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}$$

αλλά $(\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) - \vec{m}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$.

Άσκηση 12 Κύλινδρος απείρου μήκους, ακτίνας R με μαγνήτιση παράλληλη με τον άξονά του $\vec{M} = \kappa \rho \hat{z}$.
Βρείτε παντού το μαγνητικό πεδίο.

α) Εντοπίζοντας όλα τα δέσμια ρεύματα



$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = -\kappa \hat{\varphi}$$

επιλύουμε το $\vec{\nabla} \times \vec{M}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{\rho} \Big|_{\rho = R} = \kappa R \hat{\varphi}$$

Επειδή τορείμα ρέει σε κυκλική τροχιά το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο Z συνιστώσα

$$\vec{B} = B(\rho)\hat{z}$$

εαν πάρουμε έναν απειροστό κύλινδρο ακτίνας ρ και πάχους $d\rho$ σε αυτόν τον κύλινδρο ρέει ρεύμα $dI = -k\,d\rho\,\hat{\varphi}$ ανα μονάδα μήκους.
Αυτός ο κύλινδρος θα δώσει μαγνητικό πεδίο σταθερό εντος και μηδεν εκτός.

$\Rightarrow$ Συνολικά έχουμε $\vec{B} = 0$ για $\rho > R$

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere στον βρόχο 1

$$\Rightarrow \oint_{c_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{εντ} \Rightarrow B(0)\,l = \mu_0 kRl + \int_{S_1} \mu_0 \vec{J}_b \cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow B(0)\,l = \mu_0 kRl - \mu_0 kRl \quad , \quad d\vec{a} = dz\,d\rho\,\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow B(0) = 0$$

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere στον βρόχο 2

$$-B(\rho)\,l = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{a} = \mu_0 k l \int_0^{\rho} (-\hat{\varphi})\cdot(d\rho\,\hat{\varphi})$$

$$\Rightarrow -B(\rho)\,l = -\mu_0 k l \rho \Rightarrow B(\rho) = \mu_0 k \rho .$$

β) Χρησιμοποιώντας το βοηθητικό πεδίο $\vec{H}$

Δεν έχουμε ρεύματα $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$

$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} - \vec{\nabla}\cdot\vec{M} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$

Η μαγνήτιση $\vec{M} = k\rho\hat{z}$ έχει μόνο z συνιστώσα

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{M} = \frac{\partial M}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$

$\Rightarrow \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \mu_0\vec{M} = \mu_0 k\rho\hat{z}$

για $0<\rho<R$ και $\vec{B} = 0$ για $\rho > R$.

$\boxed{\text{Άσκηση 15}}$ Ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από δύο κυλινδρικούς σωλήνες ακτίνας a, b ($a<b$). Ανάμεσα στους σωλήνες υπάρχει γραμμικό μονωτικό υλικό μαγνητικής επιδεκτικότητας X_m. Ρεύμα ρέει επιφανειακά σε αντίθετη κατεύθυνση στους δύο αγωγούς ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά τους.

1) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στον χώρο.
2) Υπολογίστε την μαγνήτιση και τα δεσμια ρεύματα.

1) Γραμμικό υλικό $\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\mu}H$, $\mu = X_m(1+\mu_0)$

νόμος του Ampere $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\vec{J}$

$\Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}$ το ρεύμα κατά μήκος

του άξονα του Z $\Rightarrow$ Το μαγνητικό πεδίο σε κύκλους $\vec{B} = B(\rho)\hat{\varphi}$

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere στην ολοκληρωτική του μορφή για έναν κύκλο ακτίνας ρ

$$a<\rho<b \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}.$$

$$\rho>b \Rightarrow \vec{B} = 0.$$

2) Μαγνήτιση $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{\mu}\vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{\chi_m I}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \quad \text{για } a<\rho<b.$$

$$\vec{J}_\Delta = \vec{\nabla}\times\vec{M} = -\frac{\partial M}{\partial z}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho M)\hat{z} = 0$$

Η μαγνήτιση έχει μόνο φ συνιστώσα σε κυλινδρικές συντεταγμένες, $M = M_\varphi(\rho)$.

Επιφανειακό δέσμιο ρεύμα:

$$\vec{K}_\Delta(\rho=a) = \vec{M}(a)\times(-\hat{\rho}) = -\frac{\chi_m I}{2\pi a}\hat{\varphi}\times\hat{\rho} = \frac{\chi_m I}{2\pi a}\hat{z}$$

$$\vec{K}_\Delta(\rho=b) = \vec{M}(b)\times(\hat{\rho}) = -\frac{\chi_m I}{2\pi b}\hat{z}$$

Το ρεύμα που βλέπει το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ είναι:

$$\vec{J}_{ολ} = \vec{J} + K_\Delta = \left(\frac{I}{2\pi a} + \frac{\chi_m I}{2\pi a}\right)\hat{z} = \frac{(1+\chi_m) I}{2\pi a}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{K}_\Delta) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{J} = \mu\vec{J}.$$