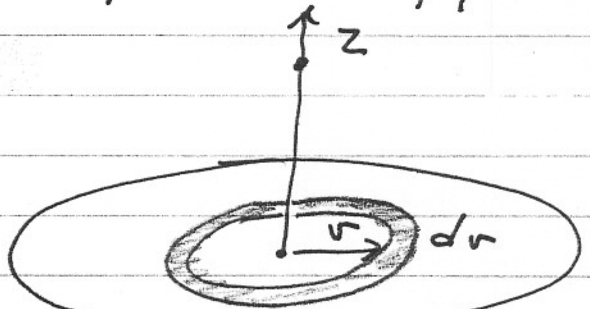
Ασκήσεις Κεφ. 2

Άσκηση 6 Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z πάνω από το κέντρο ενός επίπεδου κυκλικού δίσκου ακτίνας R με ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο σ.



1. χωρίζουμε τον δίσκο σε δαχτυλίδια ακτίνας r και πάχους dr

Το κάθε δαχτυλίδι δημιουργεί στο σημείο z στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο dE_z κατακόρυφο

$$dE_z = \frac{k\,dq\,z}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{k\,\sigma\,2\pi r\,dr\,z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

2. Αθροίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο από κάθε στοιχειώδες δακτύλιο δηλαδή ισοδύναμα ολοκληρώνουμε στη μεταβλητή r από 0 έως R

$$E_z = 2\pi k\sigma z \int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = 2\pi k\sigma z \left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

$$\sqrt{z^2} = |z|$$

$$E_z = 2\pi k\sigma \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right]$$

<u>οριακή συμπεριφορά :</u>

1 <u>$R \gg z$</u>, παίρνω $z>0 \Rightarrow |z| = z$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2}} \simeq \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2} + \dots\right)$$

$$E_z = 2\pi k\sigma - \frac{2\pi k\sigma z}{R} + \frac{2\pi k\sigma z^3}{2R^3} + \dots$$

$$R \gg z \Rightarrow \frac{z}{R} \ll 1 \,,\quad \frac{z}{R} \to 0 \quad \text{όταν } R \to \infty$$

$$\Rightarrow E_z = 2\pi k\sigma = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

2 <u>$z \gg R$</u> ομοίως παίρνω $z>0$, $|z| = z$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} \simeq \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} + \dots\right)$$

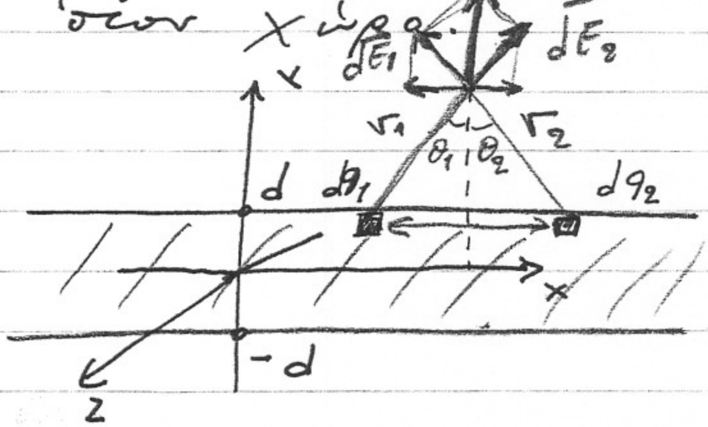
$$E_z = 2\pi k\sigma\left[1 - \overset{1}{\frac{z}{z}} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\overset{1}{\frac{z}{z}} + \dots\right]$$

$$E_z \simeq \frac{2\pi k\sigma R^2}{2z^2} = \frac{\pi\sigma R^2 k}{z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

$$Q = \pi R^2\sigma \,,\quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Άσκηση 17

Μια άπειρη επίπεδη πλάκα πάχους $2d$, φέρει ομογενή χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο.



① Για οποιοδήποτε σημείο στον χώρο μπορώ να αποδείξω ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι κατακόρυφο, δηλαδή

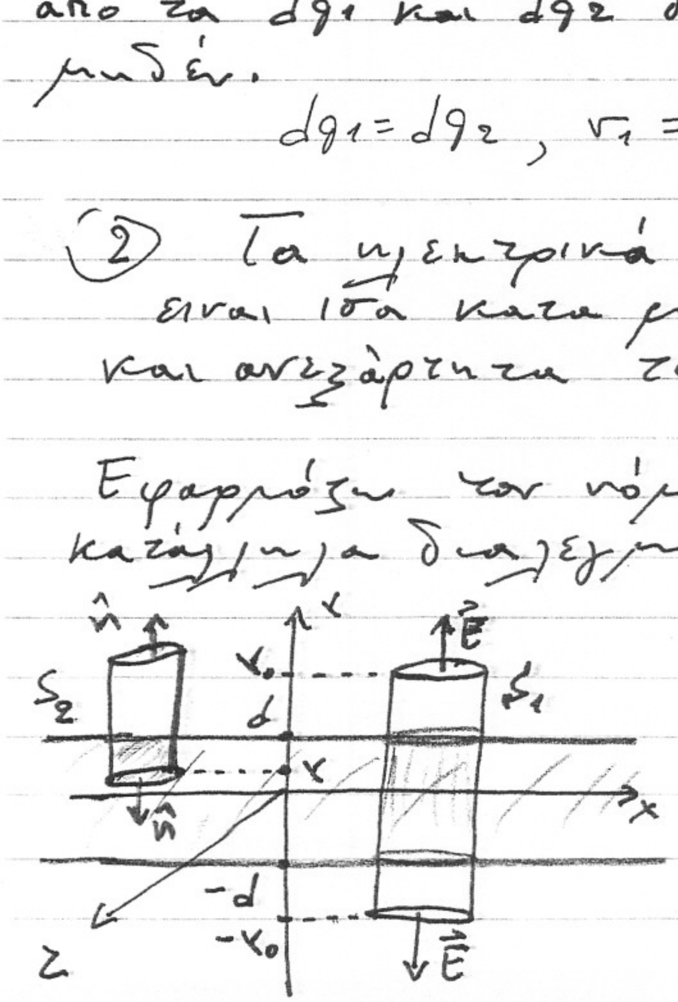
$$\vec{E} = E(x)\,\hat{x}$$

για να το δείξω παίρνω δύο στοιχειώδη ίσα φορτία dq_1, dq_2 συμμετρικά ως προς την προβολή του σημείου αυτού στο επίπεδο (x, z). Όπως στο σχήμα, τότε τα δύο διανύσματα $d\vec{E}_1$ και $d\vec{E}_2$ των ηλεκτρικών πεδίων από τα dq_1 και dq_2 δίνουν οριζόντια συνιστώσα μηδέν.

$$dq_1 = dq_2, \quad r_1 = r_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad |d\vec{E}_1| = |d\vec{E}_2|$$

② Τα ηλεκτρικά πεδία στις θέσεις (x_0) και $(-x_0)$ είναι ίσα κατά μέτρο και αντίθετα και ανεξάρτητα των x, z.

Εφαρμόζω τον νόμο του Gauss σε μια κατάλληλα διαλεγμένη επιφάνεια, παραλληλεπίπεδο ή κύλινδρο.



$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{\varepsilon\nu\tau o\varsigma}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad 2EA = \frac{2dA\rho}{\varepsilon_0}$$

$A =$ εμβαδόν βάσης κυλίνδρου

$2dA =$ όγκος της κατανομής του φορτίου μέσα στην επιφάνεια S_1

$$\Rightarrow \quad E = \frac{d\rho}{\varepsilon_0} = E_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{d\rho}{\varepsilon_0}\hat{x} & \text{για } x > d \\ \vec{E} = -\frac{d\rho}{\varepsilon_0}\hat{x} & \text{για } x < -d \end{cases}$$

(3) Βρίσκω το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο υλικό

Έχουμε και πάλι $\vec{E} = E(x)\hat{x}$.

Παίρνω και πάλι μια κυλινδρική επιφάνεια την S_2, στο σχήμα φαίνεται.

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{\text{εντος}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_0 A - E(x) A = \frac{(d-x)A\rho}{\varepsilon_0}$$

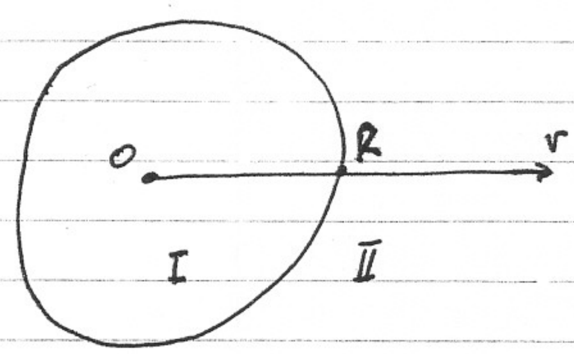
$$\Rightarrow \quad E_0 - E(x) = \frac{(d-x)\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad E(x) = E_0 - \frac{(d-x)\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x}$$

$E(x) \to \pm E_0$ για $x \to \pm d$.

$\boxed{\text{Άσκηση 21}}$ Βρείτε το δυναμικό στο εσωτερικό και στο εξωτερικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης στερεάς σφαίρας με ακτίνα R και ολικό φορτίο Q.

(1) Βρίσκουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στις περιοχές I και II



Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ένταση $\vec{E}$ είναι ακτινική και $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$

Εφαρμόζοντας κατόπιν τον νόμο του Gauss στις δυο περιοχές βρίσκουμε:

$$E_I(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \quad , \quad E_{II}(r) = \frac{kQ}{r^2}$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad , \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

(2) η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δυο σημεία είναι

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$ σε μια συγκεκριμένη διαδρομή.

Το πεδίο είναι ηλεκτροστατικό, οποιαδήποτε διαδρομή δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

$$V(\infty) = 0 \quad , \quad V(r) = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$\underline{r > R}$

$$V(r) = \int_r^\infty \vec{E}_{II}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{kQ}{x^2}\,dx = \frac{kQ}{r}$$

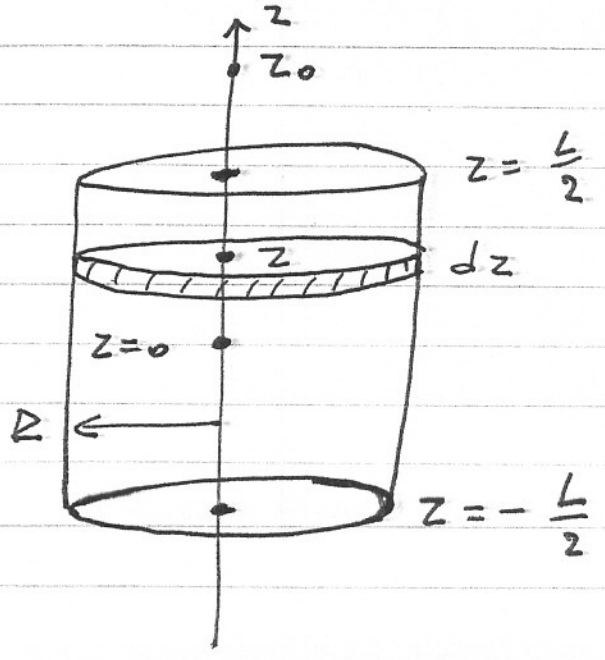
$\underline{r<R}$ $$V(r)=\int_r^R \vec{E}_I\cdot d\vec{l}+\int_R^\infty \vec{E}_{II}\cdot d\vec{l}$$

$$V(r)=\frac{kQ}{R}+\int_r^R \frac{\rho}{3\varepsilon_0}x\,dx=$$

$$=\frac{kQ}{R}+\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\frac{kQ}{R}-\frac{1}{2}\frac{kQ}{R^3}r^2$$

$\boxed{\text{Άσκηση 28}}$ Βρείτε το δυναμικό στον άξονα ενός ομοιόμορφα φορτισμένου στερεού κυλίνδρου, σε απόσταση z_0 από το κέντρο του. Το μήκος του κυλίνδρου είναι L, η ακτίνα του είναι R και η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ.



(1) Βρίσκουμε πρώτα το δυναμικό στο z_0 λόγω του δίσκου πάχους dz στην θέση z.

Χωρίζουμε τον δίσκο σε δαχτυλίδια ακτίνας r και εύρους dr και ολοκληρώνουμε από 0 έως R.

(1)

$$dV_{\delta\alpha\kappa\tau} = \frac{k\, dq}{\sqrt{r^2+h^2}} \quad , \quad h = z_0 - z$$

$$dV_{\delta\alpha\kappa\tau} = \frac{k\, 2\pi r\, dr\, dz\, \rho}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$dV_{\delta\iota\sigma\kappa o\upsilon} = k\, 2\pi\rho\, dz \int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$dV_{\delta\iota\sigma\kappa o\upsilon} = 2\pi k\rho\, dz \left[\sqrt{R^2+h^2} - \sqrt{h^2} \right]$$

(2) Αθροίζουμε το στοιχειώδες δυναμικό όλων των δίσκων.

$$V_{\kappa\upsilon\lambda.}(z_0) = 2\pi k\rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \left[\sqrt{R^2+(z_0-z)^2} - |z_0-z| \right]$$

$$\int dx \sqrt{x^2+a^2} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$V_{\kappa\upsilon\lambda.}(z_0) = 2\pi k\rho \left[-Lz_0 - \int_{\frac{L}{2}+z_0}^{z_0-\frac{L}{2}} dx \sqrt{R^2+x^2} \right]$$

για z_0 εκτός του κυλίνδρου.

Άσκηση 33 Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ακτίνας R και ολικού φορτίου Q.

Βρείτε την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου.

---

a) $$W = \frac{1}{2}\int_{\text{όγκο}} \rho V \, d^3x = \frac{1}{2}\int_0^R \rho\left[\frac{3}{2}k\frac{Q}{R} - k\frac{Q}{2R^3}r^2\right]4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{3\rho}{4}\frac{kQ}{R}4\pi\frac{R^3}{3} - \frac{\rho}{2}\frac{kQ}{2R^3}4\pi\frac{R^5}{5}$$

$$\boxed{W = \frac{3}{5}k\frac{Q^2}{R}} \quad , \quad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad , \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

---

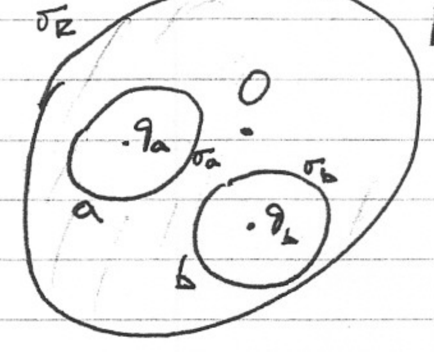
b) $$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{χώρο}} \vec{E}^2 \, d^3x =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R E_I^2 \, 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty E_{II}^2 \, 4\pi r^2 dr$$

$$E_I = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad , \quad E_{II} = \frac{kQ}{r^2}$$

$$W = \frac{3}{5}k\frac{Q^2}{R}$$

Άσκηση 37 Δύο σφαιρικές κοιλότητες ακτίνων a και b έχουν δημιουργηθεί στο εσωτερικό μιας ουδέτερης αγώγιμης σφαίρας ακτίνας R. Στο κέντρο κάθε κοιλότητας τοποθετείται ένα σημειακό φορτίο q_a, q_b.



a) $\sigma_a = \dfrac{-q_a}{4\pi a^2}$, $\sigma_b = \dfrac{-q_b}{4\pi b^2}$

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

Επιφανειακές πυκνότητες φορτίου σταθερές.

b) για $r > R$ $\quad \vec{E} = k \dfrac{q_a + q_b}{r^2} \hat{r}$

γ) κοιλότητα a

$$\vec{E}_a = k \frac{q_a}{r'^2} \hat{r}'$$

κοιλότητα b

$$\vec{E}_b = k \frac{q_b}{r''^2} \hat{r}''$$

δ) Δύναμη σε κάθε φορτίο q_a ή q_b μηδέν.

Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον αγωγό είναι μηδέν.

ε) Εάν ένα τρίτο φορτίο q_c ερχόταν κοντά στον φλοιό τότε θα άλλαζε η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας, δεν θα ήταν ομοιόμορφη.

Συνολικά $q_{σφαίρας}$ = μηδέν

Η ένταση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου θα αλλάξει

$$\underset{r>R}{\vec{E}} = \vec{E}_{q_c} + \underset{\text{του } q_c}{\vec{E}_{ειδώλου}} + \underset{\text{ομοιόμορφο}}{\vec{E}_{(q_a+q_b)}}$$

(λόγω επαγωγίας)