Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Θεωρήστε την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ N \sin(\frac{n\pi x}{L}) & , 0 < x < L \\ 0 & , x > L \end{cases}$$

α) Υπολογίστε την σταθερά κανονικοποίησης N.

β) Υπολογίστε την κυματοσυνάρτηση στον χώρο των ορμών.

γ) Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας στον χώρο των ορμών.
Τι παρατηρείτε σε σχέση με την κλασική κίνηση;

Άσκηση 2.

Θεωρήστε την κυματοσυνάρτηση
$\Psi(x) = Ne^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2+ip_0\frac{x}{\hbar}}$, όπου $N = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$

α) Υπολογίστε τα $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$.

β) Υπολογίστε τα $(\Delta x)^2$, $(\Delta p)^2$, $(\Delta x)\,(\Delta p)$.

Άσκηση 3.

Εάν η κυματοσυνάρτηση $\Psi(x, 0)$ είναι μια Γκαουσιανή συνάρτηση και παριστάνει ένα ελεύθερο σωματίδιο στην μία διάσταση με μάζα m την χρονική στιγμή $t = 0$:
$\Psi(x, 0) = Ne^{-\lambda\frac{x^2}{2}}$, όπου $N = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$
Να βρεθεί η $\Psi(x, t)$.

Άσκηση 4.

Εάν η δυναμική ενέργεια είναι μιγαδική συνάρτηση της θέσης, $V = V_1 + iV_2$, τότε η πιθανότητα δεν διατηρείται.
Βρείτε την εξίσωση που ισχύει μεταξύ πυκνότητας πιθανότητας και ρεύματος πιθανότητας.

Άσκηση 5.

Να αποδείξετε ότι οι λύσεις της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger , που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές της ενέργειας $E_n \neq E_m$, είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Άσκηση 6.

Εάν l_x, l_y, l_z είναι οι τρεις συνιστώσες της στροφορμής και ορίσουμε τους τελεστές $l_+ = l_x + il_y$, $l_- = l_x - il_y$
Να δείξετε ότι

α) $[l_z, l_+] = \hbar l_+$, $[l_z, l_-] = -\hbar l_-$, $[l_+, l_-] = 2\hbar l_z$.

β) Εάν ισχύει $l_z\Psi = \lambda\Psi$ και $\Phi = l_+\Psi$ τότε $l_z\Phi = (\lambda + \hbar)\Phi$.

Άσκηση 7.

α) Δείξτε ότι $\mathbf{P} = \left(\frac{im}{\hbar}\right)[H, \mathbf{r}]$.

β) Η μέση τιμή της ορμής σε μια διακριτή στάσιμη κατάσταση είναι μηδέν.

Άσκηση 8.

Εάν η συνάρτηση F είναι συνάρτηση του x και άλλων μεγεθών A που μετατίθενται με τον τελεστή p_x, τότε ισχύει
$[p_x, F] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x}$

Άσκηση 9.

Εάν η συνάρτηση $\zeta(x)$ ορίζεται ως εξής
$\zeta(x) = \begin{cases} a & , x > 0 \\ -a & , x < 0 \end{cases}$
Τότε $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = 2a\delta(x)$.

Άσκηση 10.

Εάν ισχύει $[[A, B], A] = 0$, τότε

α) $\left[e^{-sA}, B\right] = -s\,[A, B]\,e^{-sA}$

β) $e^{-sA}Be^{sA} = -s\,[A, B] + B$

Άσκηση 11.

Να ορίσετε την παράγωγο ενός τελεστή ως προς μια παράμετρο t.
Κατόπιν με βάση τον ορισμό να δείξετε ότι

α) $\frac{\mathrm{d}(AB)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}B + A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

β) $\frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}t} = -A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{-1}$

Άσκηση 12.

Να γράψετε στον χώρο των ορμών την εξίσωση του Schrödinger για ένα σωματίδιο με μάζα m και δυναμική ενέργεια $V(\mathbf{r})$.