

## Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

### Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

#### Άσκηση 1.

Εάν οι τελεστές  $A, B$  είναι ερμιτιανοί να δείξετε ότι

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \left(\frac{1}{4}\right) [\langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2]$$

όπου  $D = -i(AB - BA)$  και  $G = AB + BA$ .

Με βάση την προηγούμενη σχέση να αποδειχθεί η γενικευμένη Σχέση Αβεβαιότητας για τα μεγέθη  $A, B$ .

#### Άσκηση 2.

Εξετάστε τότε το γινόμενο αβεβαιότητας δυο ασυμβίβαστων φυσικών μεγεθών παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή του. Δηλαδή τότε ισχύει το ίσον στην γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας.

Εφαρμογή για  $A = x, B = p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ , υποθέτοντας  $\langle x \rangle = 0, \langle p \rangle = 0$ .

#### Άσκηση 3.

Εάν  $\Sigma$  είναι ένας ερμιτιανός πίνακας με την ιδιότητα  $\Sigma^2 = \mathbb{I}$ , όπου  $\mathbb{I}$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας, να δείξετε ότι

$$\exp(ia\Sigma) = \mathbb{I} \cos(a) + i\Sigma \sin(a)$$

Εφαρμογή στους πίνακες του Pauli,  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

#### Άσκηση 4.

Οι διακριτές ιδιοτιμές της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα είναι μη εκφυλισμένες.

#### Άσκηση 5.

Η δυναμική ενέργεια σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα για ένα σωματίδιο μάζας  $m$ , είναι ανάλογη της συνάρτησης δέλτα του Dirac ,

$$V(x) = -a\delta(x) \text{ με } a > 0.$$

Να βρεθούν

α) Οι στάσιμες καταστάσεις.

β) Ο συντελεστής ανάκλασης για ένα προσπίπτον σωματίδιο με ενέργεια  $E > 0$ .

#### Άσκηση 6.

Τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας των μετάλλων βρίσκονται δεσμευμένα μέσα στο μέταλλο από ένα φράγμα δυναμικού. Για την μονοδιάστατη προσέγγιση το δυναμικό αυτό περιγράφεται από την συνάρτηση  $V(x)$ , όπου  $V(x) = 0$  για  $x < 0$  και  $V(x) = V_0$  για  $x > 0$ . Η μέγιστη ενέργεια που συναντάμε για τα ηλεκτρόνια είναι η ενέργεια  $E_f$  του Fermi . Εφαρμόζουμε στο μέταλλο ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο κατά τον άξονα των  $x$ .

Βρείτε τον Συντελεστή Διέλευσης  $T$  για ένα ηλεκτρόνιο που έχει ενέργεια  $E_f$ .

### Άσκηση 7.

Υπολογίστε την αβεβαιότητα θέσης  $\Delta x$  και την αβεβαιότητα ορμής  $\Delta p$  για μια τυχούσα ιδιοσυνάρτηση  $\Psi_n(x) = N \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  του απειρόβαθου πηγαδιού.

### Άσκηση 8.

Ένα σωματίδιο μάζας  $m$  είναι υποχρεωμένο να κινείται μέσα σε ένα διδιάστατο ορθογώνιο κουτί με μήκη πλευρών  $a, b$ . Να βρεθούν οι επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειάς του.

### Άσκηση 9.

Η κατάσταση ενός σωματιδίου σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού περιγράφεται, κατά την χρονική στιγμή  $t = 0$ , από την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi = N(\Psi_1 + \Psi_2)$$

Όπου  $\Psi_1$  και  $\Psi_2$  οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις των δυο πρώτων ενεργειακών σταθμών του πηγαδιού. Υπολογίστε την μέση θέση του σωματιδίου ύστερα από χρόνο  $t$ .

### Άσκηση 10.

Να βρείτε τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων για σωματίδιο στο πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ -V_0 & , 0 < x < a, V_0 > 0 \\ 0 & , x > a \end{cases}$$

### Άσκηση 11.

Να βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας για σωματίδιο στο ασύμμετρο πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} V_3 & , x < 0 \\ V_2 = 0 & , 0 < x < a, \text{ όπου } V_3 > V_1 \text{ και } V_1, V_3 > 0. \\ V_1 & , x > a \end{cases}$$

### Άσκηση 12.

Υπολογίστε τις δυνατές τιμές ενέργειας ενός σωματιδίου μέσα σε δυναμικό της μορφής

$$W(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος;