<u>ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ</u>

<u>Ασκήσεις Κεφαλαίου Ι</u>

<u>Άσκηση 1:</u> Θεωρήστε δύο ορθοκανονικά διανύσματα ψ_1 και ψ_2 και υποθέστε ότι αποτελούν βάση σε ένα χώρο δύο διαστάσεων. Θεωρήστε επίσης ένα τελαστή T που ορίζεται στο χώρο αυτό και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$T\psi_1=2\psi_1+\psi_2, \quad T\psi_2=\psi_1+2\psi_2$$

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή T.

<u>Άσκηση 2:</u> Ένας τελεστης A έχει δύο κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις ψ_1 και ψ_2, με ιδιοτιμές α_1 και α_2 αντίστοιχα. Ο τελεστής B έχει επίσης δύο κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις φ_1 και φ_2, με ιδιοτιμές β_1 και β_2. Οι ιδιοκαταστάσεις των δύο τελεστών υπακούουν στις σχέσεις:

$$\psi_1 = (\phi_1 + 2\phi_2)/\sqrt{5}, \quad \psi_2 = (2\phi_1 - \phi_2)/\sqrt{5}$$

(α) Μετράμε την ποσότητα A και βρίσκουμε την τιμή α_1. Ποιά είναι η κατάσταση του συστήματος αμέσως μετά την μέτρηση; (β) Εάν μετρηθεί η ποσότητα B ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα, ποιά είναι η πιθανότητα για κάθε αποτέλεσμα; (γ) Αμέσως μετά την μέτρηση του B μετράμε ξανά το A. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε την τιμή α_1;

<u>Άσκηση 3:</u> Θεωρούμε έναν ερμιτιανό τελεστή T με την ιδιότητα $T^4=1$. Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή T; Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του T εάν αυτός ο τελεστής δεν είναι ερμιτιανός;

<u>Άσκηση 4:</u> Δίδεται η κατάσταση υπέρθεσης $\Psi = N(\psi_1 - i\psi_2 + 2\psi_3)$, όπου ψ_k είναι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του μεγέθους G με ιδιοτιμές g, $3g$, $2g$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $<G>$ και την αβεβαιότητα ΔG του μεγέθους G στην δοσμένη κατάσταση Ψ.

<u>Άσκηση 5:</u> Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου σε μία ορισμένη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $\psi(x,t=0) = N(3\psi_1(x) + 2i\psi_2(x))$. Όπου $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας με ιδιοτιμές E_1 και E_2 αντίστοιχα. (α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα της ενέργειας. (β) Εάν υποθέσουμε ότι $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ είναι αντίστοιχα άρτια και περιττή συνάρτηση, να υπολογίσετε τη μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου.

<u>Άσκηση 6:</u> Ένα μονοδιάστατο πρόβλημα χαρακτηρίζεται από δέσμιες καταστάσεις με ενέργειες E_n και ορθοκανονικό σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\psi_n(x)$ με n ακέραιο και ομοτιμία (parity) $(-1)^n$. Δίνεται η κυματοσυνάρτηση του συστήματος $\Psi(x,t)$ για $t=0$: $\Psi(x,t=0)=\frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1(x)+\frac{-i}{\sqrt{3}}\psi_3(x)+C\psi_5(x)$

(α) Υπολογίστε τον συντελεστή C έτσι ώστε αυτή να είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα και γράψτε την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$ σε χρόνο t. (β) Βρείτε την πιθανότητα μια μέτρηση της ενέργειας στο χρόνο t να σας δώσει την τιμή E_5. (γ) Οι μέσες τιμές θέσης, ορμής και ενέργειας, $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ και $\langle H\rangle$ μεταβάλλονται με τον χρόνο; Εξηγείστε.

<u>Άσκηση 7:</u> Ηλεκτρόνιο περιγράφεται από κυματοσυνάρτηση που μηδενίζεται για αρνητικά *x*, ενώ για θετικά *x* δίνεται από τη σχέση: $\Psi = Ne^{-x}(1 - e^{-x})$. (α) Βρείτε την τιμή του *N* που κανονικοποιεί την *Ψ*. (β) Για ποιά τιμή του *x* η πιθανότητα εύρεσης του ηλεκτρονίου στην περιοχή γίνεται μέγιστη; (γ) Βρείτε την $<x>$, συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την πιο πιθανή θέση του προηγούμενου ερωτήματος και σχολιάστε.

<u>Άσκηση 8:</u> Ηλεκτρόνιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση που μηδενίζεται για αρνητικά x, ενώ για θετικά x δίνεται από τη σχέση: $\Psi = Ne^{-|x|/a}$, $a>0$. (α) Βρείτε την τιμή του *N* που κανονικοποιεί την *Ψ*. (β) Βρείτε στη συνέχεια την αναμενόμενη τιμή $<x>$ και την τυπική απόκλιση Δx. (γ) Ποιά είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρεθεί σε απόσταση μιάς τυπικής απόκλισης από την αναμενόμενη τιμή του, δηλαδή από το $<x> - \Delta x$ μέχρι το $<x> + \Delta x$;

<u>Άσκηση 9:</u> Θεωρήστε την κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi(x)=N\exp\left(-\frac{a}{2}(x-x_0)^2+ip_0\frac{x}{\hbar}\right),\quad \text{όπου}\quad N=\left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4}$$

(α) Υπολογίστε τα $<x>$, $<x^2>$, $<p>$, $<p^2>$. (β) Υπολογίστε τα $(\Delta x)^2$, $(\Delta p)^2$, $(\Delta x)(\Delta p)$.

<u>Άσκηση 10:</u> Ένα κβαντικό σύστημα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x)$ όπου $\Psi = a_0\psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + ... = \sum_{k=0}^{N} a_k\psi_k$, ψ_n είναι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής με ενέργεια αντίστοιχα E_n και a_n κατάλληλες σταθερές. Υπολογίστε την μέση τιμή της ενέργειας $<E>$ και δείξτε ότι $<E>\geq E_0$ όπου E_0 η ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης του συστήματος.

<u>Άσκηση 11:</u> Η μέτρηση της ενέργειας σε ένα κβαντικό σύστημα την χρονική στιγμή $t=0$ έδωσε τις τιμές E_1, E_2 και E_3 με πιθανότητα αντίστοιχα $1/2$, $1/4$ και $1/4$. (α) Γράψτε την έκφραση της κυματοσυνάρτησης $\Psi(x,0)$. (β) Δώστε την $\Psi(x,t)$ για $t>0$. (γ) Ποιες από τις παρακάτω φυσικές ποσότητες $p^2/2m$, $V(x)$, H έχουν μέσες τιμές ανεξάρτητες του χρόνου;

Άσκηση 12: Σωματίδιο μάζας *m* κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F= - kx$, $k>0$ και η κατάστασή του σε μια ορισμένη στιγμή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2/2}$$

(α) Έχει το σωματίδιο απόλυτα καθορισμένη ενέργεια; Υπάρχει κατάλληλη τιμή του λ για την οποία η απάντηση είναι καταφατική;

(β) Για οιοδήποτε λ υπολογίστε την μέση τιμή της ενέργειας του σωματιδίου και σχεδιάστε πρόχειρα την εξάρτησή της από το λ. Τι παρατηρείτε, ποία η σχέση με το ερώτημα (α);

Δίνεται το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-\alpha x^2)dx = \frac{(2n)!}{n!(4\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Άσκηση 13: Ένα σωματίδιο μάζας *m* περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t) = N\exp[-\lambda(\frac{mx^2}{\hbar} + it)]$ όπου N και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Βρείτε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x)$ έτσι ώστε η Ψ να ικανοποιεί την χρονοεξαρτώμενη εξίσωση του Schroedinger.

Άσκηση 14: Εάν η δυναμική ενέργεια είναι μιγαδική συνάρτηση της θέσης, $V=V_1+iV_2$, τότε η πιθανότητα δεν διατηρείται. Βρείτε την εξίσωση που ισχύει μεταξύ πιθανότητας και ρεύματος πιθανότητας.

Άσκηση 15: Να αποδείξετε ότι οι λύσεις της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης του Schroedinger, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές της ενέργειας $E_n \neq E_m$, είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Άσκηση 16: Εάν οι τελεστές A, B είναι ερμιτιανοί να δείξετε ότι

$$<A^2><B^2> \geq \frac{1}{4}(<G>^2 + <D>^2) \text{ όπου } D = -i(AB - BA) \text{ και } G = AB + BA .$$

Με βάση την προηγούμενη σχέση να αποδειχθεί η γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας για τα μεγέθη A, B.

Άσκηση 17: Εξετάστε πότε το γινόμενο αβεβαιότητας δύο ασυμβίβαστων φυσικών μεγεθών παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή του. Δηλαδή πότε ισχύει το ίσον στην γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας. Εφαρμογή για $A = x$, $B = p = -i\hbar\frac{d}{dx}$, υποθέτοντας $<x>= 0, <p>= 0$.

Άσκηση 18: Εάν Σ είναι ένας ερμιτιανός πίνακας με την ιδιότητα $\Sigma^2=I$, όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας, να δείξετε ότι $\exp(ia\Sigma) = I\cos(a) + i\Sigma\sin(a)$.

Εφαρμογή στους πίνακες του Pauli, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 19: Εάν η συνάρτηση F είναι συνάρτηση του x και άλλων μεγεθών A που μετατίθενται με τον τελεστή p_x, τότε ισχύει $[p_x, F] = -i\hbar\dfrac{\partial F}{\partial x}$.

Άσκηση 20: (α) Δείξτε ότι $\vec{P} = \dfrac{im}{\hbar}[H, \vec{r}]$. (β) Η μέση τιμή της ορμής σε μία διακριτή στάσιμη κατάσταση είναι μηδέν. (γ) Εάν η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι κανονικοποιήσημη και πραγματική, η μέση τιμή της ορμής του σωματιδίου είναι μηδέν.

Άσκηση 21: Υπολογίστε την χρονική μεταβολή της μέσης τιμής του τετραγώνου της θέσης $\dfrac{d<x^2>}{dt}$ για ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται σε μία διάσταση. Ομοίως για την ποσότητα $(\Delta x)^2$.

Άσκηση 22: Η μέση τιμή της θέσης και της ορμής, την χρονική στιγμή $t=0$, ενός σωματιδίου μάζας m και φορτίου q που κάνει μονοδιάστατη κίνηση είναι μηδέν. Υπολογίστε την μέση τιμή της θέσης και της ορμής μετά από χρόνο t εάν το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου E.

Άσκηση 23: Εάν H είναι η Χαμιλτονιανή ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μάζας m και συχνότητας ω, υπολογίστε τις ποσότητες $\dfrac{d<x>}{dt}$, $\dfrac{d<p>}{dt}$ και δείξτε ότι $\dfrac{d^2<x>}{dt^2} = -\omega^2 <x>$.

Άσκηση 24: Ένα φορτισμένο σωματίδιο αλληλεπιδρά με ένα ημιτονοειδές ηλεκτρικό πεδίο. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος δίνεται από τη σχέση $H = \dfrac{p^2}{2m} + xqE_0\sin(\omega t)$.

Υπολογίστε τις ποσότητες $\dfrac{d<x>}{dt}$, $\dfrac{d<p>}{dt}$ και $\dfrac{d<H>}{dt}$.

Άσκηση 25: α) Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα να δείξετε ότι ισχύει

$$\frac{d}{dt}<xp>= 2<T> - <x\frac{dV}{dx}>$$

όπου H = T + V, και T η κινητική ενέργεια.

β) Δείξτε ότι εάν το σύστημα είναι σε μια δέσμια κατάσταση το αριστερό μέλος είναι μηδέν.

γ) Δείξτε ότι <T> = <V> για τις δέσμιες καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

<u>Άσκηση 26:</u> Εάν ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z είναι οι τρείς συνιστώσες της στροφορμής και ορίσουμε τους τελεστές $\ell_+ = \ell_x + i\ell_y$, $\ell_- = \ell_x - i\ell_y$. Να δείξετε ότι:

(α) $[\ell_z, \ell_+] = \hbar\ell_+$, $[\ell_z, \ell_-] = -\hbar\ell_-$, $[\ell_+, \ell_-] = 2\hbar\ell_z$.

(β) Εάν ισχύει $\ell_z\Psi = \lambda\Psi$ και $\Phi = \ell_+\Psi$ τότε $\ell_z\Phi = (\lambda + \hbar)\Phi$.

<u>Άσκηση 27:</u> Εάν η κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος είναι σφαιρικά συμμετρική τότε και οι τρεις συνιστώσες της στροφορμής είναι επακριβώς καθορισμένες και έχουν τιμή ίση με το μηδέν.

<u>Άσκηση 28:</u> Εάν η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή l_z με ιδιοτιμή $m\hbar$, υπολογίστε την μέση τιμή της προβολής της στροφορμής στην κατεύθυνση (θ,φ).

<u>Άσκηση 29:</u> Να ορίσετε την παράγωγο ενός τελεστή ως προς μία παράμετρο t.

Κατόπιν με βάση τον ορισμό να δείξετε ότι:

(α) $\dfrac{d(AB)}{dt} = \dfrac{dA}{dt}B + A\dfrac{dB}{dt}$, (β) $\dfrac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\dfrac{dA}{dt}A^{-1}$

<u>Άσκηση 30:</u> Εάν ισχύει $[[A,B],A] = 0$ και $[B,[A,B]] = 0$, τότε

(α) $[e^{-sA}, B] = -s[A,B]e^{-sA}$

(β) $e^{-sA}Be^{sA} = -s[A,B] + B$, εφαρμογή $e^{ipa/\hbar}xe^{-ipa/\hbar} = x + a$

(γ) $e^A e^B = e^{A+B}e^{[A,B]/2}$, εφαρμογή $e^A e^{-A} = 1$

<u>Άσκηση 31:</u> (α) Εάν $A = e^K$ τότε $A^\dagger = e^{K^\dagger}$.

(β) Δείξτε ότι κάθε μοναδιαίος τελεστής U μπορεί να γραφτεί στην μορφή $U=e^{iA}$ όπου A ερμιτιανός τελεστής.

<u>Άσκηση 32:</u> (α) Εάν η συνάρτηση $\zeta(x)$ ορίζεται ως εξής

$\zeta(x) = \begin{cases} a & ,x > 0 \\ -a & ,x < 0 \end{cases}$. Τότε $\dfrac{d\zeta}{dx} = 2a\delta(x)$.

(β) Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα: (i) $\int_0^\infty [\sin(x) + 2]\delta(x - \pi/2)dx$

(ii) $\int_{-1}^{1} \exp(|x|+1)\delta(x+3)dx$, (iii) $\int_{-1}^{1} \exp(|x|+1)\delta(x)dx$

Άσκηση 33: Να γράψετε στον χώρο των ορμών την εξίσωση του *Schroedinger* για ένα σωματίδιο με μάζα *m* και δυναμική ενέργεια *V(**r**)*.

Άσκηση 34: Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου σε μία ορισμένη χρονική στιγμή είναι $\psi(x) = Ne^{-b|x|}$. (α) Υπολογίστε την κυματοσυνάρτηση στον χώρο των ορμών. (β) Ποιά είναι η πιθανότητα να βρούμε σε μία μέτρηση ορμή μεγαλύτερη από $\hbar b$; (γ) Εάν το σωματίδιο είναι ελεύθερο να βρείτε την κυματοσυνάρτηση μετά από χρόνο *t*.

Άσκηση 35: Θεωρήστε την κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & ,x<0 \\ N\sin(\frac{n\pi x}{L}), & 0<x<L \\ 0 & ,x>L \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την σταθερά κανονικοποίησης *N*. (β) Υπολογίστε την κυματοσυνάρτηση στον χώρο των ορμών. (γ) Υπολογίστε τη πυκνότητα πιθανότητας στον χώρο των ορμών. Τι παρατηρείτε σε σχέση με την κλασική κινηση;

Άσκηση 36: Η Χαμιλτονιανή για ένα σύστημα τριών καταστάσεων δίνεται από τον πίνακα $H = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Δύο άλλες φυσικές ποσότητες *A*, *B* δίνονται μέσω πινάκων $A = \kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ όπου ε_0, κ, λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί . (α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των *H*, *A* και *B*.

(β) Υποθέτουμε ότι το σύστημα βρίσκεται την χρονική στιγμή *t=0* στην κατάσταση

$|y(0)\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b^* \end{pmatrix}$ όπου $|a|^2 + 2|b|^2 = 1$. Βρείτε την μέση τιμή των *H*, *A*, *B*.

(γ) Βρείτε την κατάσταση $|y(t)\rangle$. Εάν μετρήσουμε την ενέργεια σε αυτή την κατάσταση τι τιμές θα βρούμε και με ποια πιθανότητα; Ομοίως για τις ποσότητες *A*, *B*.