ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ασκήσεις Κεφαλαίου ΙΙ

Άσκηση 1: Εάν η κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,0)$ παριστάνει ένα ελεύθερο σωματίδιο, με μάζα m, στη μία διάσταση την χρονική στιγμή $t=0$:

$\Psi(x,0) = N\exp(-\lambda \frac{x^2}{2})$, όπου $N = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$. Να βρεθεί η $\Psi(x,t)$.

Άσκηση 2: α) Δείξτε ότι οι διακριτές ιδιοτιμές της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα δεν είναι εκφυλισμένες.

β) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα να δείξετε ότι μπορούμε να διαλέξουμε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις (δέσμιες καταστάσεις) να είναι πραγματικές.

Άσκηση 3: (α) Για τυχούσα ιδιοσυνάρτηση ψ_n απειρόβαθου φρέατος (από 0 μέχρι L), δείξτε ότι $\langle x\rangle=L/2$ και ότι $\langle x^2\rangle= L^2/3-L^2/(2n^2\pi^2)$. (β) Υπολογίστε επίσης την αβεβαιότητα θέσης Δx και την αβεβαιότητα ορμής Δp.

Άσκηση 4: Ενα σωματίδιο μάζας m, βρίσκεται σε ένα μονοδιάστατο πηγάδι δυναμικού, $V(x)=0$, για $0<x<L$, και $V(x)=+\infty$ για $x<0$ και $x>L$. (α) Να βρείτε, με επιχειρήματα συμμετρίας (ή με άλλο τρόπο) την πιθανότητα, ένα σωματίδιο που βρίσκεται στην κατάσταση $\psi_n(x,t)$ να βρεθεί στο διάστημα $[0, L/2]$. (β) Να υπολογίσετε την έκφραση της πιθανότητας, συναρτήσει και του χρόνου, ώστε το σωματίδιο να βρίσκεται στο διάστημα $[0,L/2]$ εάν η κατάσταση του είναι η

$$\psi=(1/\sqrt{2})\, \psi_1 \exp[-i(E_1/\hbar)t] + (1/\sqrt{2})\, \psi_2 \exp[-i(E_2/\hbar)t]$$

όπου ψ_1 και ψ_2 οι δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις του σωματιδίου στο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.

Άσκηση 5: Σωμάτιο μάζας m κινείται σε «απειρόβαθο» πηγάδι, $0 \le x \le a$, και έχει αρχική κυματοσυνάρτηση που δίνεται από την σχέση $\Psi(x,t=0) = A\sin^3(\pi x/a)$

(α) Προσδιορίστε την σταθερά A και την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$ σαν συνάρτηση του χρόνου t.

(β) Υπολογίστε την αβεβαιότητα της ενέργειας ΔE ως συνάρτηση του χρόνου.

Υπόδειξη: $\sin^3(\theta) = \frac{1}{4}\left(3\sin(\theta) - \sin(3\theta)\right)$

Άσκηση 6: Σωμάτιο μάζας m κινείται σε πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < -a/2 \\ 0 & -a/2 \le x \le a/2 \\ V_0 & x > a/2 \end{cases}.$$

Υπολογίστε το πλάτος a σαν συνάρτηση των m, V_0 και $\hbar$, ώστε να υπάρχει ***μόνο μια δέσμια κατάσταση*** με ενέργεια $E = V_0/2$, όπου $V_0 > 0$.

Άσκηση 7: Σωμάτιο μάζας *m* κινείται στο δυναμικό *V(x)*:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ 0 & -a < x < -b \\ V_0 & -b < x < b \\ 0 & b < x < a \\ \infty & x > a \end{cases}$$ όπου *a,b* θετικές σταθερές, $V_0 > 0$.

Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργεια *E* και το V_0, έτσι ώστε η ιδιοσυνάρτηση *ψ(x)* της Χαμιλτονιανής να ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{d\psi}{dx} = 0$ για $-b<x<b$.

Άσκηση 8: Σωμάτιο μάζας m κινείται σε μονοδιάστατο πηγάδι δυναμικού που δίνεται από την σχέση

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < a \\ V_0, & a < x \end{cases}$$

όπου V_0 θετική σταθερά. (α) Προσδιορίστε το V_0 ώστε το σύστημα να έχει μόνο δύο δέσμιες καταστάσεις. (β) Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή του δυναμικού V_0 κάτω από την οποία το φρέαρ δυναμικού δεν μπορεί να «συγκρατήσει» ούτε μία δέσμια κατάσταση.

Άσκηση 9: Σωμάτιο μάζας *m* μπορεί να κινείται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πλάτους *a*. Την χρονική στιγμή *t=0* βρίσκεται εντοπισμένο στο αριστερό ήμισυ του πηγαδιού και με ίση πιθανότητα να βρεθεί σε κάθε σημείο αυτού του τμήματος.

(α) Γράφτε την κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση την χρονική στιγμή *t=0.*

(β) Υπολογίστε τις πιθανότητες, μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου να δώσει τις τιμές $\pi^2\hbar^2/2ma^2$, $4\pi^2\hbar^2/2ma^2$ και $16\pi^2\hbar^2/2ma^2$ αντίστοιχα.

Άσκηση 10: Να βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας για σωματίδιο μάζας *m* στο ασύμμετρο πηγάδι δυναμικού $V(x) = \begin{cases} V_3 & ,x<0 \\ V_2 = 0 & ,0<x<a \\ V_1 & ,x>a \end{cases}$, όπου $V_3>V_1$ και $V_1, V_3>0$.

Άσκηση 11: Σωματίδιο μάζας *m* βρίσκεται μέσα σε ένα μονοδιάστατο απειρόβαθο φρέαρ δυναμικού εύρους *L*. Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου για *t=0* είναι $\Psi(x,0) = Nx$ όταν $0 \le x \le L/2$ και $\Psi(x,0) = N(L-x)$ όταν $L/2 \le x \le L$. (α) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στην νιοστή ενεργειακή στάθμη. (β) Γράψτε την κυματοσυνάρτηση για μη μηδενικές τιμές του χρόνου. (γ) Βρείτε την μέση τιμή της ενέργειας.

Άσκηση 12: Ένα σωματίδιο μάζας m και ενέργειας $E=V_0$ προσπίπτει από αριστερά σε ένα ορθογώνιο φράγμα δυναμικού ύψους V_0 και πλάτους a. Βρείτε τον συντελεστή διέλευσης T.

Άσκηση 13: Σωματίδιο μάζας m κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση ενός πεδίου δυνάμεων με δυναμική ενέργεια $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2-\frac{1}{g}x^3)$. Εάν η σταθερά, με διαστάσεις μήκους, g είναι πολύ μεγαλύτερη από το χαρακτηριστικό μήκος $(\hbar/m\omega)^{1/2}$ του αρμονικού ταλαντωτή, υπολογίστε την πιθανότητα ένα σωματίδιο αρχικά στην θεμελιώδη στάθμη του αρμονικού ταλαντωτή, στην περιοχή $x=0$, να βρεθεί εκτός του φρέατος δυναμικού για μεγάλες θετικές τιμές του x.

Άσκηση 14: Σωματίδιο μάζας m κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση ενός πεδίου δυνάμεων με δυναμική ενέργεια

$$V(x)=\begin{cases} \infty \quad , & x<0 \\ -V_0 \quad , & 0<x<R \\ \dfrac{\hbar^2 g^2}{2mx^2}, & x\geq R \end{cases}$$

Υπολογίστε τον χρόνο παραμονής ενός σωματιδίου μάζας m και ενέργειας E σε αυτό το δυναμικό, όταν $g>>1$. Εάν θέσουμε $E=\hbar^2k^2/2m$ να εκφράσετε το αποτέλεσμα σαν συνάρτηση της αδιάστατης ποσότητας g/kR.

Άσκηση 15: Τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας των μετάλλων βρίσκονται δεσμευμένα μέσα στο μέταλλο από ένα φράγμα δυναμικού. Για την μονοδιάστατη προσέγγιση το δυναμικό αυτό περιγράφεται από την συνάρτηση $V(x)$, όπου $V(x)=0$ για $x<0$ και $V(x)=V_0$ για $x>0$. Η μέγιστη ενέργεια που συναντάμε για τα ηλεκτρόνια είναι η ενέργεια *Fermi* E_f. Εφαρμόζουμε στο μέταλλο ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο κατά τον άξονα των x. Βρείτε τον συντελεστή διέλευσης T για ένα ηλεκτρόνιο που έχει ενέργεια E_f.

Άσκηση 16: Θεωρήστε το δυναμικό $V(x)=-\dfrac{\hbar^2a^2}{m}\dfrac{1}{\cosh^2(ax)}$ με $a>0$. Δίνεται η κατάσταση σκέδασης $\psi_k(x)=A\left(\dfrac{k-ia\tanh(ax)}{k+ia}\right)e^{-ikx}$ με $k=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}>0$.

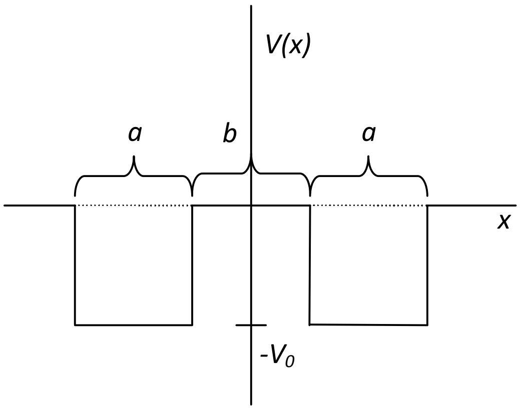
(α) Αποδείξτε ότι ικανοποιεί την χρονο-ανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger.

(b) Βρείτε την ασυμπτωτική μορφή της $\psi_k(x)$ για $x \to \pm\infty$ και υπολογίστε το ρεύμα της πυκνότητας πιθανότητας $j(x)$.

(γ) Υπολογίστε τους συντελεστές ανάκλασης R και διέλευσης T, υποθέτοντας ότι η κατάσταση $\psi_k(x)$ περιγράφει κύμα ερχόμενο εκ δεξιών.

Το δυναμικό $V(x)$ είναι γνωστό ως "reflectionless potential".

<u>Άσκηση 17:</u> Θεωρήστε το δυναμικό του σχήματος, γνωστό και ώς «διπλό πηγάδι».



(α) Βρείτε την ενέργεια των δέσμιων καταστάσεων (γράψτε την μη αλγεβρική εξίσωση που προκύπτει)

(β) Μελετήστε την εξάρτηση από το b των ενεργειών των δύο χαμηλότερων ενεργειακών σταθμών, E_0 και E_1, στα όρια $b \to \infty$ και $b \to 0$.

(γ) Το «διπλό πηγάδι» είναι ένα απλοϊκό μοντέλο για το δυναμικό που ασκείται στο ηλεκτρονίο σε ένα διατομικό μόριο (τα δύο πηγάδια αντιστοιχούν στην ελκτική δύναμη που ασκούν οι πυρήνες). Με βάση την μελέτη που κάνατε στο (β) ερώτημα, μπορείτε να συμπεράνετε αν η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-πυρήνα τείνει να φέρει τους πυρήνες κοντά ή να τους απομακρύνει ?

<u>Άσκηση 18:</u> Να υπολογιστούν οι ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων για ένα σωματίδιο μάζας m το οποίο κινείται στη μία διάσταση με δυναμική ενέργεια $V(x) = -g/x$, $g>0$. Η δυναμική ενέργεια ορίζεται για $x>0$ με τον περιορισμό $\Psi(0)=0$.

<u>Άσκηση 19:</u> Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις των δέσμιων καταστάσεων, με μηδενική ή με αρνητική ενέργεια, για ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με ένα πρόσθετο δέλτα πηγάδι δυναμικού στο κέντρο του.

<u>Άσκηση 20:</u> Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ ενός σωματιδίου μάζας m σε μία διάσταση δίνεται από τη σχέση $V(x) = Ax$, όπου το A είναι θετική σταθερά. (α) Να εξεταστεί αν το ενεργειακό φάσμα του σωματιδίου είναι συνεχές ή διακριτό. (β) Να υπολογιστεί η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου στην αναπαράσταση των ορμών. Το ενεργειακό φάσμα είναι εκφυλισμένο ή μη-εκφυλισμένο; (γ) Γράψτε τη κυματοσυνάρτηση στον χώρο των θέσεων. (δ) Εάν για τη δυναμική ενέργεια ισχύει $V(x=0)=\infty$, ποια επιπλέον συνοριακή συνθήκη επιβάλουμε; Το ενεργειακό φάσμα τώρα θα είναι συνεχές ή διακριτό; Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του σωματιδίου.

<u>Άσκηση 21:</u> Σωματίδιο μάζας *m* κινείται κατά τον άξονα *x* με ιδιοσυνάρτηση βασικής κατάστασης $\Psi(x)=\dfrac{A}{\cosh(\lambda x)}$ όπου Α, λ θετικές σταθερές.

Αν η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας *V(x)* μηδενίζεται για $|x|\to\infty$: (α) Βρείτε την τιμή της ενέργειας της βασικής στάθμης και (β) βρείτε την μορφή της δυναμικής ενέργειας.

Δίνεται ότι: $(\cosh\lambda x)'=\lambda\sinh\lambda x,\ (\sinh\lambda x)'=\lambda\cosh\lambda x,\ \cosh^2\lambda x-\sinh^2\lambda x=1$

<u>Άσκηση 22:</u> Σωματίδιο μάζας *m* κινείται υπό την επίδραση δυναμικού $V(x,y)=V_1(x)+V_2(y)$ στις δύο διαστάσεις. Όπου:

$$V_1(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ 0, & 0\le x<a\\ V_0, & x>a\end{cases}\qquad \text{και}\qquad V_2(y)=\begin{cases}\infty, & y<0\\ 0, & 0\le y<b\\ \infty, & y>b\end{cases}$$

Βρείτε τις δέσμιες ιδιοκαταστάσεις του συστήματος όταν $\dfrac{\pi}{2}\le\sqrt{\dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2}}<\dfrac{3\pi}{2}$.

<u>Άσκηση 23:</u> Ένας αρμονικός ταλαντωτής κατά την χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην κατάσταση $\psi(x,0)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\psi_1(x)+\sqrt{2}\,\psi_2(x)+\sqrt{3}\,\psi_3(x)\right)$

Όπου $\psi_n(x)=\pi^{-1/4}\left(2^n n!\right)^{-1/2}e^{-x^2/2}H_n(x)$ είναι οι κυματοσυναρτήσεις του.

(α) Βρείτε τα $\langle E\rangle$, $\langle x\rangle$ και $\langle p\rangle$, σαν συνάρτηση του χρόνου.

(β) Επαναλάβατε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Ehrenfest. Σχολιάστε.

Υπόδειξη: Δίνεται ότι $H_{n+1}(x)-2x\,H_n(x)+2n\,H_{n-1}(x)=0$ και $H_0(x)=1$. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη αναδρομική σχέση με $n=0$ για να υπολογίσετε το $H_1(x)$ και με $n=1,2$ για τα $H_2(x)$ και $H_3(x)$ αντίστοιχα. Δίνεται $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$ και επίσης θέτουμε $\hbar=m=\omega=1$ στην Χαμιλτονιανή.

Άσκηση 24: Σε αρμονικό ταλαντωτή μάζας m και συχνότητας ω, προσδιορίστε τις σταθερές a, b, c ώστε η κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

να είναι ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής, και υπολογίστε την ενέργειά της.

Άσκηση 25: Η χρονοανεξάρτητη κυματοσυνάρτηση που περιγράφει τη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση ενός κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή με κυκλική συχνότητα ω και μάζα m είναι:

$\Psi(x) = C(2 - 4x^2/a^2)\exp[-x^2/(2a^2)]$ όπου $C=1/(8a\pi^{1/2})$ και $a = (\hbar/m\omega)^{1/2}$.

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας $V(x)$ του σωματιδίου.

(β) Βρείτε τη μέση τιμή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου.

Άσκηση 26: Οι τελεστές a και $a^\dagger$ ορίζονται ως εξής:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

για έναν αρμονικό ταλαντωτή μάζας m και συχνότητας ω. Υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες $a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}$, $a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$ των τελεστών a και $a^\dagger$, όπου Ψ_n είναι ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

(α) Βρείτε την δράση των τελεστών x και p_x στην Ψ_n .

(β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή των τελεστών $(xp_x + p_x x)$ και $(xp_x + p_x x)^2$ ως προς την κυματοσυνάρτηση Ψ_n ενός αρμονικού ταλαντωτή.

Άσκηση 27: Υπολογίστε τη πυκνότητα πιθανότητας στον χώρο των ορμών για έναν ταλαντωτή στη πρώτη διεγερμένη στάθμη. Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί ο ταλαντωτής να έχει ορμή στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή για αυτή την ενέργεια;

Άσκηση 28: (α) Για έναν μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή υπολογίστε τις μέσες τιμές $\langle n|x^2|n\rangle$ και $\langle n|p^2|n\rangle$ καθώς και το γινόμενο αβεβαιότητας $(\Delta x)(\Delta p)$.
(β) Γράψτε τους πίνακες x_{nm}, p_{nm} και N_{nm} όπου N είναι ο τελεστής αριθμού κβάντων.

Άσκηση 29: Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ενέργειας ενός σωματιδίου μέσα σε δυναμικό της μορφής $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0 \end{cases}$

Ποιες είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος;

Άσκηση 30: Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή σταθεράς k. Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου κάποια χρονική στιγμή είναι $\Psi(x) = Nx^2 e^{-\lambda x^2}$, όπου λ θετική σταθερά με κατάλληλες μονάδες, και N η σταθερά κανονικοποίησης. Υπολογίστε τις πιθανότητες να προκύψουν κατά την μέτρηση της ενέργειας οι ενέργειες E_0, E_1 και E_2. Σχεδιάστε τις πιθανότητες σαν συνάρτησει της παραμέτρου λ.

Άσκηση 31: Φορτισμένο σωμάτιο μάζας m και φορτίου q το οποίο δέχεται δύναμη

$F = -kx$ βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E_0. Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου για $x=0$ είναι V_0. Βρείτε (α) τις ενεργειακές στάθμες του σωματίου, (β) την κυματοσυνάρτηση στη θεμελιώδη στάθμη και (γ) τη μέση τιμή της θέσης για τυχαία κατάσταση Ψ_n.

Άσκηση 32: Σωμάτιο με μάζα m κινείται σε μια διάσταση υπό την επίδραση του δυναμικού $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$ και βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση. (α) Αν $\Psi(x,t) = N e^{-bx^2} e^{-iat/\hbar}$ είναι κανονικοποιημένη λύση της χρόνο-εξαρτώμενης εξίσωσης Schrödinger για την θεμελιώδη στάθμη να υπολογίσετε τις σταθερές b, a. (β) Σε δεδομένη χρονική στιγμή επέρχεται απότομη σύλληψη ένος άλλου σωματίου με αποτέλεσμα το νέο σύνθετο σωμάτιο να έχει μάζα $m' = 2m$. Ποιά είναι η πιθανότητα το νέο σύνθετο σωμάτιο να παραμείνει στην θεμελιώδη κατάσταση;

Άσκηση 33: Σωμάτιο μάζας m σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με πλάτος a ($-a/2 < x < a/2$) βρίσκεται στην κατάσταση $\psi_2(x)$ ($n = 2$). Αίφνης το πλάτος του πηγαδιού διπλασιάζεται ($-a < x < a$). (α) Γράψτε τις καινούργιες ίδιο-συναρτήσεις και ίδιο-ενέργειες. (β) Υπολογίστε την πιθανότητα σε μέτρηση της ενέργειας του σωματίου, αυτή να βρεθεί ίση με τιμή που είχε πριν τον διπλασιασμό του πλάτους του πηγαδιού. (γ) Δώστε την έκφραση για την πυκνότητα πιθανότητας στο $x = 0$ για $t > 0$.

Υπόδειξη: Κατά τον διπλασιασμό του πλάτους το σωμάτιο στιγμιαία παραμένει περιορισμένο στο διάστημα $-a/2 < x < a/2$, δηλαδή

$$\psi(x,t=0) = \begin{cases} \psi_2(x) & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & -a < x < -a/2 \;\; a/2 < x < a \end{cases}.$$

Άσκηση 34: Ένα σωματίδιο μάζας m είναι υποχρεωμένο να κινείται μέσα σε ένα διδιάστατο ορθογώνιο κουτί με μήκη πλευρών a, b. (α) Να βρεθούν οι επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειάς του και να γράψετε την γενική μορφή των κυματοσυναρτήσεων. (β) Εάν $a=b$ να γράψετε αναλυτικά τις κυματοσυναρτήσεις για την δεύτερη διεγερμένη στάθμη.

<u>Άσκηση 35:</u> Τρισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή: $H = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2) + \frac{m}{2}(\omega_x{}^2 x^2 + \omega_y{}^2 y^2 + \omega_z{}^2 z^2)$. (α) Υπολογίστε τις δυνατές ενεργειακές στάθμες και τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις του συστήματος. (β) Βρείτε τις στάθμες και τον αντίστοιχο βαθμό εκφυλισμού εάν έχουμε $\omega_x = \omega_y$. Σημείωση: υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το φάσμα του αντίστοιχου μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

<u>Άσκηση 36:</u> Σωμάτιο μάζας *m* κινείται σε δύο διαστάσεις υπό την επίδραση του δυναμικού $V(x,y) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 + y^2 - \varepsilon\, xy\right)$. Λύστε την χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger και βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας.