<u>ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ</u>

<u>Ασκήσεις Κεφαλαίου ΙΙΙ</u>

<u>Άσκηση 1:</u> Σωματίδιο μάζας m κινείται μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πλάτους a ($0<x<a$).

(α) Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις Ψ_n και τις ιδιοτιμές της ενέργειας E_n του σωματιδίου.

(β) Μία μικρή διαταραχή $V(x)$ προστίθεται στο σύστημα , $V(x)= -V_0$ για $0<x<a/2$ και $V(x)=0$ για $a/2<x<a$, $V_0>0$. Να υπολογίσετε τις ενέργειες W_n του σωματιδίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

(γ) Ομοίως όταν έχουμε $V(x)= -V_0$ για $0<x<a/2$ και $V(x)=V_0$ για $a/2<x<a$.

(δ) Ομοίως όταν γενικεύσουμε με το διαταρακτικό δυναμικό $V(x)=V_0\sin(\frac{\pi x}{a})$.

<u>Άσκηση 2:</u> Σωμάτιο μάζας m κινείται στο δυναμικό $V(x)$:

$$V(x)=\begin{cases} \infty & x<0 \\ 0 & 0\le x<b \\ V_0 & b\le x\le c \\ 0 & c<x\le a \\ \infty & x>a \end{cases}$$ όπου a,b,c θετικές σταθερές, $V_0>0$.

Θεωρώντας το V_0 σαν διαταραχή να υπολογίσετε τις ενέργειες E_n και τις κυματοσυναρτήσεις Φ_n του σωματιδίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

<u>Άσκηση 3:</u> Σωματίδιο μάζας m κινείται σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μεταξύ των θέσεων $-a$ και a.

α) Βρείτε την ενέργεια και την κυματοσυνάρτηση για την θεμελιώδη και για την πρώτη διεγερμένη στάθμη.

β) Μία μικρή διαταραχή $V(x)=\varepsilon|x|/a$ προστίθεται στο σύστημα. Χρησιμοποιήστε θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης για να υπολογίσετε την μεταβολή στην ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης και την κυματοσυνάρτηση σε προσέγγιση πρώτης τάξης.

γ) Υπολογίστε την πιθανότητα μετάβασης από τη θεμελιώδη στάθμη στην πρώτη διεγερμένη στάθμη (του αδιατάραχτου προβλήματος) εάν η διαταραχή $V(x)=\varepsilon|x|/a$ διαρκεί χρόνο T.

<u>Άσκηση 4:</u> Η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου μάζας m σε δύο διαστάσεις είναι μηδέν όταν $0\le x\le 2a$ και $0\le y\le 2a$ και άπειρη για όλες τις άλλες τιμές των x και y. Αν στην Χαμιλτονιανή προστεθεί ένας ακόμη όρος αλληλεπίδρασης της μορφής $V=bxy$ όπου b θετική σταθερά να βρείτε την ενέργεια σε πρώτη τάξη της θεωρίας των διαταραχών για την θεμελιώδη, την πρώτη και την δεύτερη διεγερμένη στάθμη. Επίσης την κυματοσυνάρτηση των καταστάσεων για την εκφυλισμένη στάθμη σε μηδενική τάξη της θεωρίας διαταραχών.

<u>Άσκηση 5:</u> Δύο ταυτόσημα σωματίδια, χωρίς σπιν, τοποθετούνται μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού εύρους *a*. Η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι συμμετρική στην εναλλαγή των σωματιδίων. Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν ασθενικά το ένα με το άλλο, μέσω του διαταρακτικού δυναμικού $V(x_1, x_2) = \pm a V_0 \delta(x_1 - x_2)$ όπου V_0 μία θετική σταθερά με διαστάσεις ενέργειας. Υπολογίστε σε πρώτης τάξης προσέγγιση την ενέργεια για την θεμελιώδη και την πρώτη διεγερμένη στάθμη και στις δύο περιπτώσεις, ελκτικό και απωστικό δυναμικό.

<u>Άσκηση 6:</u> Φορτισμένο σωμάτιο μάζας *m* και φορτίου *q* το οποίο δέχεται δύναμη

$F = -kx$ βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης ε_0. Βρείτε τις ενεργειακές στάθμες του σωματίου και τις κυματοσυναρτήσεις στη πρώτη μη μηδενική τάξη προσέγγισης της θεωρίας διαταραχών.

<u>Άσκηση 7:</u> (α) Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. (β) Υπολογίστε την σχετικιστική διόρθωση πρώτης τάξης των ενεργειακών σταθμών ενός αρμονικού ταλαντωτή. Η διόρθωση δίνεται κλασσικά από την σχέση

$$\Delta E = \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} - mc^2 - \frac{p^2}{2m}$$

Θεωρώντας ότι η ορμή είναι πολύ μικρότερη της «μάζας», σύμφωνα με τη σχέση $p << mc$.

Σημείωση, για τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή δίνονται οι σχέσεις:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}),\ a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}},\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}\ ,\quad a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$$

<u>Άσκηση 8:</u> Ένας διδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή: $H_0 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$.

(α) Να δοθεί μία γενική έκφραση για τις ενεργειακές στάθμες της H_0, και να βρείτε τον εκφυλισμό τους.

(β) Να εκφράσετε την κυματοσυνάρτηση του συστήματος για την θεμελιώδη στάθμη και την πρώτη διεγερμένη σαν συνάρτηση των κυματοσυναρτήσεων ψ_k του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

(γ) Εάν το σύστημα έχει ενέργεια $E = 2\hbar\omega$ και προστεθεί μία ασθενής διαταραχή της μορφής $V(x) = ax^4$, $a > 0$, ο εκφυλισμός αίρεται. Να βρείτε τις νέες ενεργειακές στάθμες του συστήματος.

<u>Άσκηση 9:</u> Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης για έναν τρισδιάστατο ταλαντωτή μάζας *m* με δυναμική ενέργεια: $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \lambda r^4$.

Δίνονται: Η κυματοσυνάρτηση του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή στην θεμελιώδη στάθμη $\Psi_0(x) = \sqrt[4]{a/\pi}\exp(-ax^2/2)$, $a = m\omega/\hbar$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\exp(-ax^2)dx = \frac{(2n)!}{n!(4a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

<u>Άσκηση 10</u>: Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου μάζας *m* στο χώρο δίνεται από την σχέση $H = \frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) + bx^2yz$

Όπου *b* είναι μία σταθερά με κατάλληλες μονάδες.

(α) Να υπολογιστούν οι ενέργειες και οι κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου για *b=0.* Οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις του μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή θεωρούνται γνωστές.

(β) Εάν $b \neq 0$ και $b << m\omega^2$, να υπολογιστούν σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών οι ενέργειες της χαμηλότερης εκφυλισμένης στάθμης του πρώτου ερωτήματος και οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις σε μηδενική τάξη.

<u>Άσκηση 11:</u> Σωματίδιο μάζας *m*, κινούμενο στη μία διάσταση, έχει δυναμική ενέργεια $V(x) = V_0 e^{\lambda x^2}$ με *λ>0.* Υπολογίστε προσεγγιστικά την ενέργεια για την θεμελιώδη και την πρώτη διεγερμένη στάθμη.

<u>Άσκηση 12:</u> Σωματίδιο μάζας *m* κινείται σε μία διάσταση μέσα σε ένα δυναμικό της μορφής $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}(\frac{x}{b})^{2\lambda}$ όπου *b* είναι μία παράμετρος με διαστάσεις μήκους και *λ<<1.*

(α) Υπολογίστε χρησιμοποιώντας την θεωρία διαταραχών την ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης. Υπόδειξη, γράφτε το δυναμικό *V(x)* στην μορφή $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \Delta V$ όπου $\Delta V = \frac{m\omega^2 x^2}{2}((\frac{x}{b})^{2\lambda} - 1)$.

(β) Υποθέτοντας ότι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι $\psi(x,a) = (a/\pi)^{1/4} e^{-ax^2/2}$, υπολογίστε την μέση τιμή της ενέργεια για το δυναμικό *V(x)*. Βρείτε την τιμή της παραμέτρου *a* που ελαχιστοποιεί την μέση τιμή της ενέργειας και υπολογίστε την τιμή της ελάχιστης ενέργειας.

(γ) Αναπτύξτε την ελάχιστη τιμή της ενέργειας από το ερώτημα (β) ως προς *λ* και συγκρίνετε με το ερώτημα (α).

<u>Άσκηση 13:</u> Την χρονική στιγμή *t=0*, ένα κβαντομηχανικό σύστημα είναι σε μια κατάσταση $\Psi_1^{(0)}$, η οποία ανήκει σε μια διπλά εκφυλισμένη στάθμη. Να οριστεί η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $\Psi_2^{(0)}$ με την ίδια αδιατάραχτη ενέργεια κάποια χρονική στιγμή $t \neq 0$. Η μετάβαση οφείλεται στην δράση μιας διαταραχής *V(x)* χρονικά σταθερής.

<u>Άσκηση 14:</u> Σε ένα κβαντομηχανικό σύστημα δύο καταστάσεων $\Psi_a(x)$, $\Psi_b(x)$ δρα για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα μία δύναμη η οποία περιγράφεται από ένα διαταρακτικό δυναμικό της μορφής $V(x,t)=V(x)\delta(t)$ όπου *δ* η συνάρτηση του *Dirac* και *V(x)* πραγματική συνάρτηση του *x*. Εάν το σύστημα ήταν αρχικά (για $t \to -\infty$) στην κατάσταση Ψ_a βρείτε την πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση Ψ_b σε χρόνο *t>0*. Υποθέστε ότι τα στοιχεία του πίνακα V_{aa} και V_{bb} είναι μηδέν. Βρείτε επίσης την πιθανότητα μετάβασης $P_{a\to b}$ για $t \to \infty$.

<u>Άσκηση 15:</u> Φορτισμένος αρμονικός ταλαντωτής στην κατάσταση Ψ_n αλληλεπιδρά με ένα περαστικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο της μορφής:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-\lambda t^2}, \ \lambda > 0, \ \vec{E}_0 = E_0 \hat{x}$$

Βρείτε το πλάτος μετάβασης στην κατάσταση Ψ_m.

<u>Άσκηση 16:</u> Ένα ομαλό ηλεκτρικό πεδίο δρα ξαφνικά σε έναν φορτισμένο αρμονικό ταλαντωτή στην θεμελιώδη κατάσταση. Να ορίσετε την πιθανότητα μετάβασης του ταλαντωτή στις διεγερμένες καταστάσεις.

<u>Άσκηση 17:</u> Σωματίδιο μάζας *m* και φορτίου *q* κινείται μέσα σε μονοδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού εύρους *a*. (α) Θεωρούμε ότι στο σωματίδιο δρα ένα ομογενές ασθενές ηλεκτρικό πεδίο E_0. Να υπολογίσετε την πρώτη μη τετριμμένη διόρθωση στην ενέργεια, όταν το σωματίδιο είναι στην θεμελιώδη στάθμη. (β) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση σε πρώτης τάξης προσέγγιση, υπολογίστε την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στη πρώτη διεγερμένη στάθμη του απειρόβαθου πηγαδιού. (γ) Υποθέτουμε τώρα ότι το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο δρα για *t>0* και είναι χρονικά εξηρτημένο της μορφής $\mathrm{E}(t) = E_0 e^{-t/\tau}$. Ποια είναι η πιθανότητα μετάβασης του σωματιδίου από την θεμελιώδη στάθμη στην πρώτη διεγερμένη;