ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ασκήσεις Κεφαλαίου IV

Άσκηση 1: Σωματίδιο μάζας Μ κινείται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R. Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας, τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις και τον εκφυλισμό.

Άσκηση 2: Σωματίδιο μάζας Μ κινείται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R. Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας, τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις και τον εκφυλισμό.

Άσκηση 3: (α) Να δείξετε ότι $\langle \Psi_n | [H, A] | \Psi_n \rangle = 0$ για κάθε ιδιοσυνάρτηση Ψ_n της Χαμιλτονιανής *H* και έναν οποιονδήποτε τελεστή *A* του φυσικού συστήματος.

(β) Εάν $H = \dfrac{\vec{P}^2}{2m} + V(r)$ και χρησιμοποιώντας τον τελεστή $A = \vec{r} \cdot \vec{P}$ αποδείξτε ότι για κάθε ιδιοσυνάρτηση της Χαμιλτονιανής ισχύει $2\langle T \rangle = -\langle V \rangle$, όπου *T* ο τελεστής της κινητικής ενέργειας και *V(r)* η δυναμική ενέργεια για το άτομο του υδρογόνου (**θεώρημα Virial**). Άρα για το άτομο του υδρογόνου έχουμε $< n | V | n >= 2E_n$ και $< n | T | n >= -E_n$.

Άσκηση 4 (α) Υπολογίστε τον μεταθέτη της κινητικής ενέργειας $\dfrac{\hat{p}^2}{2m}$ με τις συνιστώσες $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ και $\hat{L}_z$ της στροφορμής ($\hat{p}^2 = \hat{p}_x{}^2 + \hat{p}_y{}^2 + \hat{p}_z{}^2$).

(β) Να δείξετε ότι $\left[\hat{L}_x, \hat{H}\right] = 0$, $\left[\hat{L}_y, \hat{H}\right] = 0$ και $\left[\hat{L}_z, \hat{H}\right] = 0$ όταν το δυναμικό είναι συνάρτηση του μέτρου $r = |\vec{\mathbf{r}}|$ μόνο και $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + V(r)$.

Άσκηση 5: Δείξτε ότι ο ερμιτιανός τελεστής που αντιστοιχεί στην ακτινική συνιστώσα της ορμής $p_r = -i\hbar \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} r$ στις τρεις διαστάσεις δίνεται από την σχέση $p_r = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \dfrac{\mathbf{r}}{r}\right]$ και ότι ο τελεστής $p_r = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial r}$ δεν είναι ερμιτιανός.

Άσκηση 6: Σωμάτιο μάζας *m* κινείται σε τρισδιάστατο πηγάδι δυναμικού που δίνεται από την σχέση

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ V_0 & r > a \end{cases}$$

όπου V_0 θετική σταθερά. Προσδιορίστε το V_0 ώστε το σύστημα να έχει για $l = 0$ μόνο τρείς δέσμιες καταστάσεις.

Άσκηση 7: Σωματίδιο μάζας *m* κινείται ελεύθερα στο χώρο ανάμεσα σε δύο αδιαπέραστες σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες $r=a$ και $r=b$, $a<b$.

α) Γράψτε την Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.

β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του σωματιδίου για στροφορμή l ίση με το μηδέν.

Άσκηση 8: Σωμάτιο μάζας m κινείται σε τρισδιάστατο πηγάδι δυναμικού που δίνεται από την σχέση

$$V(r)=\begin{cases}\infty, & r<a\\ 0, & a<r<b\\ V_0, & b<r\end{cases}$$

όπου V_0 θετική σταθερά.

(α) Δώστε πειστικά επιχειρήματα για να δικαιολογήσετε το ότι η ενέργεια ελάχιστης κατάστασης αντιστοιχεί σε $l=0$.

(β) Προσδιορίστε το V_0 ώστε το σύστημα να έχει για $l=0$ μόνο δύο δέσμιες καταστάσεις.

Άσκηση 9: Βρείτε το ενεργειακό φάσμα και τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις για τον τρισδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή, $V(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2$. Λύστε την εξίσωση του *Shroedinger* σε σφαιρικές συντεταγμένες αναπτύσσοντας την κυματοσυνάρτηση σε δυναμοσειρά του *r*.

Άσκηση 10: Η κυματοσυνάρτηση του ατόμου του Υδρογόνου (υποθέτοντας άπειρη την μάζα του πυρήνα) είναι

$$\psi(r,\theta,\varphi)=cre^{-\frac{r}{2\alpha}}\cos\theta$$

Όπου c μια σταθερά κανονικοποίησης και $\alpha=\dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$.

α) Υπολογίστε την z–συνιστώσα της στροφορμής L_z και τον κβαντικό αριθμό ℓ της στροφορμής.

β) Υπολογίστε την μέση τιμή της κινητικής ενέργειας του ατόμου.

γ) Υπολογίστε την ολική ενέργεια.

Άσκηση 11: Η συνάρτηση $\psi(\vec{r})=cre^{-\frac{r}{2a}}e^{i\phi}\sin\theta$ είναι η κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος μάζας *m* το οποίο έχει δυναμική ενέργεια $V(r)=\frac{\gamma}{r}$ και ορισμένη στροφορμή ℓ, όπου γ και α σταθερές. Να υπολογίσετε:

α) Την στροφορμή ℓ του συστήματος.

β) Την ενέργεια E του συστήματος.

γ) Την σταθερά γ σαν συνάρτηση των m, $\hbar$ και α.

<u>Άσκηση 12:</u> Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται την χρονική στιγμή $t=0$ από την κυματοσυνάρτηση: $\Psi=N(\psi_{100}-\psi_{211}+\psi_{32,-1})$,

όπου ψ_{100}, ψ_{211} και $\psi_{32,-1}$ κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου. (α) Υπολογίστε τον συντελεστή κανονικοποίησης N και την χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. (β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $<\boldsymbol{L}^2>$, $<L_z>$ και $<E>$, καθώς και την αβεβαιότητα $\Delta\boldsymbol{L}^2$.

<u>Άσκηση 13:</u> Την χρονική στιγμή $t=0$ η κυματοσυνάρτηση του ατόμου του υδρογόνου δίνεται από την

$$\Psi(\mathbf{r},0)=\left(\ 2\,c\ \psi_{21-1}(\mathbf{r})+c\,\psi_{321}(\mathbf{r})-c\,\psi_{31-1}(\mathbf{r})\ \right)$$

όπου οι δείκτες αντιστοιχούν στους κβαντικούς αριθμούς n,l,m.

(α) Βρείτε την κανονικοποιημένη συνάρτηση του ατόμου για τυχαία χρονική στιγμή t και την μέση τιμή της ενέργειας.

(β) Βρείτε την μέση τιμή $\langle \mathbf{L}^2\rangle$ και $\langle L_z\rangle$.

(γ) Υποθέτοντας οτι πραγματοποίησαμε μέτρηση η οποία έδωσε $l=2$ και $m=+1$ περιγράψτε την κυματοσυνάρτηση αμέσως μετά την μέτρηση.

<u>Άσκηση 14:</u> Δέσμιο ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου βρίσκεται υπό την επήρεια του ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B}=B\hat{z}$ (αγνοήστε το σπίν του ηλεκτρονίου). Η χαμιλτονιανή του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$H=H_0-\omega L_z$$

Όπου $\omega=eB/2m_e c$.

Οι ιδιοκαταστάσεις ψ_{nlm} και οι ιδιοτιμές της ενέργειας $E^{(0)}_{nlm}$ της χαμιλτονιανής H_0, θεωρούνται γνωστές. Υποθέτουμε ότι το σύστημα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση

$$\Psi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{21-1}+\psi_{211})$$

Ποια είναι η πιθανότητα ως συνάρτηση του χρόνου να βρεθεί το σύστημα στις παρακάτω καταστάσεις

$$(a)\,|2p_x>=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{21-1}-\psi_{211})\quad (b)\,|2p_y>=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{21-1}+\psi_{211})$$

$$(c)\,|2p_z>=\psi_{210}$$

Άσκηση 15: Άτομο υδρογόνου βρίσκεται στη βασική του κατάσταση *1s*, *n=1* και *l=0*. (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε απόσταση από τον πυρήνα μεγαλύτερη από ότι επιτρέπει η κλασσική θεωρία. (β) Βρείτε την αναμενόμενη τιμή $<x>$ κατά τον άξονα των x και την $<x^2>$. Υπόδειξη, να εκμεταλλευτείτε την συμμετρία της κυματοσυνάρτησης.

Άσκηση 16: Το άτομο του υδρογόνου βρίσκεται στην κατάσταση $2p_{-1}$ ($\equiv nL_m$). Υπολογίστε: (α) την μέση απόσταση του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα και την $<x^2>$, (β) την μέση κινητική και δυναμική του ενέργεια. Σημείωση, οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται ως *s*, *p*, *d*, *f* … όταν έχουν τροχιακή στροφορμή L = 0, 1, 2, 3 … αντίστοιχα.

Άσκηση 17: Ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται στη κατάσταση $\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)$. (α) Να υπολογίσετε την αβεβαιότητα Δr της συντεταγμένης r, επίσης την μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την αναγωγική σχέση (σχέση Kramers):

$$\frac{k+1}{n^2}<r^k>-(2k+1)\alpha<r^{k-1}>+\frac{k}{4}[(2l+1)^2-k^2]\alpha^2<r^{k-2}>=0,\ k>-(2l+1)$$

για $k=0$, $k=1$ και $k=2$. Τι βρίσκουμε για $k = -1$;

(β) Αποδείξτε την σχέση Kramers. Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ακτινική εξίσωση για το άτομο του υδρογόνου $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR_{nl})+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}R_{nl}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_{nl}}{r}=E_nR_{nl}$

Όπου $E_n=-\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{n^2a^2}\frac{\hbar^2}{2m}$ και $a=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$. Ορίζοντας την ποσότητα $u=rR_{nl}$ βρίσκουμε την διαφορική εξίσωση $\frac{d^2u}{dr^2}=\frac{l(l+1)u}{r^2}-\frac{2u}{ar}+\frac{u}{n^2a^2}$. Κατόπιν υπολογίστε την ποσότητα $\int_0^\infty \frac{d^2u}{dr^2}r^k u\,dr$ με δύο τρόπους.

Άσκηση 18: Άτομο τριτίου ^3H (Z=1) έχει το ηλεκτρόνιο στην θεμελιώδη του κατάσταση. Σε αμελητέο χρονικό διάστημα το τρίτιο μεταστοιχειώνεται σε ιόν ηλίου $^3He^+$ (Z=2).

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο στο ιόν $^3He^+$, να βρεθεί στην θεμελιώδη κατάσταση.

(β) Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στο ιόν $^3He^+$, στην κατάσταση $(n,l,m)=(2,1,0)$.

Υπόδειξη: Λάβετε υπ' όψιν την αλλαγή του ατομικού αριθμού.

<u>Άσκηση 19:</u> Το δευτέριο, το ιόν του ηλίου και το υδρογόνο είναι παραδείγματα μονοηλεκτρονικών ατόμων. Ο πυρήνας του δευτερίου έχει το ίδιο φορτίο με το υδρογόνο αλλά διπλάσια μάζα ενώ του ηλίου δύο φορές το φορτίο και τέσσερεις φορές την μάζα του υδρογόνου. Δώστε μια κατά το δυνατόν ακριβή εκτίμηση του λόγου των ενεργειών των θεμελιωδών καταστάσεων λαμβάνοντας υπ' όψιν την διαφορά στην ανηγμένη μάζα.

<u>Άσκηση 20:</u> Βρείτε στον χώρο των ορμών την κυματοσυνάρτηση $\Phi(\boldsymbol{p})$ για την θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου. Υπολογίστε την ποσότητα $<\boldsymbol{p}^2>$ και την μέση κινητική ενέργεια και συγκρίνετε με την ενέργεια του συστήματος στην θεμελιώδη στάθμη.

<u>Άσκηση 21:</u> Υπολογίστε την πιθανότητα το ηλεκτρόνιο στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου να βρεθεί μέσα στον πυρήνα. Υποθέτουμε ότι η ακτίνα του πυρήνα είναι b, $b<<a$ όπου a η ακτίνα του *Bohr*, και ότι η κυματοσυνάρτηση είναι ακριβής και μέσα στον πυρήνα του ατόμου. Πόση είναι η πιθανότητα εάν υποθέσουμε την κυματοσυνάρτηση σταθερή για $r<b$, εκτιμήστε το σφάλμα σχετικά με τον ακριβή υπολογισμό.

<u>Άσκηση 22:</u> Φορτισμένο σωματίδιο μάζας M και φορτίου q κινείται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R στο (x, y) επίπεδο. Το σωματίδιο βρίσκεται εντός εξωτερικού ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}=E_0\hat{x}$. Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του συστήματος διαταρακτικά στην πρώτη μη μηδενική τάξη προσέγγισης.

<u>Άσκηση 23:</u> Φορτισμένο σωματίδιο μάζας M και φορτίου q κινείται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R. Το σωματίδιο βρίσκεται εντός εξωτερικού ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}=E_0\hat{z}$. Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του συστήματος διαταρακτικά στην πρώτη μη μηδενική τάξη προσέγγισης.

<u>Άσκηση 24</u>: (α) Υπολογίστε την σχετικιστική διόρθωση πρώτης τάξης για την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου του Υδρογόνου. Η διόρθωση δίνεται κλασσικά από την σχέση

$$\Delta E=\sqrt{c^4m^2+c^2p^2}-mc^2-\frac{p^2}{2m}$$

Θεωρήστε ότι η ορμή είναι πολύ μικρότερη της «μάζας», σύμφωνα με τη σχέση $p << mc$, αναπτύξετε κατά Taylor και κρατήστε τον πρώτο μη μηδενικό όρο.

$$\alpha = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \quad , \quad E_1 = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \quad , \quad \psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}$$

(β) Υπολογίστε την σχετικιστική διόρθωση πρώτης τάξης στην ενέργεια για την κατάσταση Ψ_{nlm}.

<u>Άσκηση 25:</u> (Άτομο Ηλίου) Το άτομο του ηλίου (Z=2) έχει δύο ηλεκτρόνια στη θεμελιώδη στάθμη τα οποία αλληλεπιδρούν με απωστικό δυναμικό Coulomb. Υπολογίστε την ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

<u>Άσκηση 26:</u> Υπολογίστε διαταρακτικά τη διόρθωση στην ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης του ατόμου του υδρογόνου που οφείλεται στο πεπερασμένο μέγεθος του πυρήνα. Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας είναι σφαιρικός, ακτίνας *b*, ομοιόμορφα φορτισμένος. Η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου στο πεδίο του πυρήνα είναι:

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > b \\ -\dfrac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 b} + \dfrac{e^2 r^2}{8\pi\varepsilon_0 b^3}, & r < b \end{cases}$$

<u>Άσκηση 27:</u> (Φαινόμενο Stark) Άτομο υδρογόνου τοποθετείται μέσα σε ένα ομοιόμορφο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_0\hat{z}$. Η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $V = eE_0 z$. (α) Υπολογίστε τη διόρθωση στην ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών. (β) Υπολογίστε τη διόρθωση στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης στάθμης, *n=2*, σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών και την κυματοσυνάρτηση στη μηδενική τάξη προσέγγισης.

<u>Μαθηματικό συμπλήρωμα – τυπολόγιο:</u>

$$\int_0^\infty r^k e^{-\frac{r}{\alpha}} dr = k!\alpha^{k+1}$$

$$\int r^k e^{\lambda r} dr = \frac{e^{\lambda r}}{\lambda}\left\{ r^k - \frac{kr^{k-1}}{\lambda} + \frac{k(k-1)r^{k-2}}{\lambda^2} - \ldots \frac{(-1)^k k!}{\lambda^k} \right\}$$

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2 + \ldots$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR)$$

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}), \qquad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\int_0^\infty R^*_{nl}(r)R_{nl}(r)dr = \frac{2}{(2l+1)n^3a^2}$$

$$\cos\theta Y_{lm} = \left[\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1,m} + \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} Y_{l-1,m}$$

$$e^{-i\varphi}\sin\theta Y_{lm} = -\left[\frac{(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1,m-1} + \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} Y_{l-1,m-1}$$