ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ασκήσεις Κεφαλαίου V

Άσκηση 1: Οι θεμελιώδεις σχέσεις μετάθεσης της στροφορμής επιτρέπουν την ύπαρξη ακέραιων και ημιπεριττών ιδιοτιμών. Αλλά για την τροχιακή στροφορμή $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι ακέραιες. Ένας ενδιαφέρων τρόπος για να το δούμε αυτό είναι να ορίσουμε τις κάτωθι γενικευμένες μεταβλητές

$$q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x+\left(a^2/\hbar\right)p_y\right] \qquad p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[p_x-\left(\hbar/a^2\right)y\right]$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x-\left(a^2/\hbar\right)p_y\right] \qquad p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[p_x+\left(\hbar/a^2\right)y\right]$$

όπου a είναι αυθαίρετη σταθερά με διαστάσεις μήκους.

(α) Επαληθεύστε ότι $\left[q_1,q_2\right]=\left[p_1,p_2\right]=0$ και $\left[q_1,p_1\right]=\left[q_2,p_2\right]=i\hbar$

(β) Δείξτε ότι $L_z=\dfrac{\hbar}{2a^2}\left(q_1{}^2-q_2{}^2\right)+\dfrac{a^2}{2\hbar}\left(p_1{}^2-p_2{}^2\right)$

(γ) Επαληθεύεστε ότι $L_z=H_1-H_2$, όπου $H_{1,2}$ είναι η χαμιλτονιανή αρμονικού ταλαντωτή με μάζα $m=\hbar/a^2$ και $\omega=1$.

(δ) Εξηγήστε με βάση τα ανωτέρω γιατί το L_z έχει ακέραιες ιδιοτιμές.

Άσκηση 2: Υπολογίστε τους μεταθέτες των συνιστωσών του $\mathbf{r}$ και του $\mathbf{p}$ με την συνιστώσα της στροφορμής $\mathbf{u}\cdot\mathbf{l}$, όπου $\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ και $\mathbf{u}$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα. Δείξτε ότι μπορούν να γραφούν σε διανυσματική μορφή ως εξής

$$[\mathbf{u}\cdot\mathbf{l},\mathbf{p}]=-i\hbar(\mathbf{u}\times\mathbf{p}) \qquad [\mathbf{u}\cdot\mathbf{l},\mathbf{r}]=-i\hbar(\mathbf{u}\times\mathbf{r})$$

Από τα παραπάνω αποδείξτε ότι κάθε συνιστώσα του $\mathbf{l}$ μετατίθεται με τα βαθμωτά μεγέθη $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{r}^2$ και $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$.

Άσκηση 3: Δίνεται η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση

$\Psi\left(\theta,\phi\right)=N\left(Y_1^{-1}+Y_1^0+2Y_1^{+1}\right)$ όπου $Y_l^m\equiv Y_l^m(\theta,\phi)$ είναι η σφαιρική αρμονική.

(α) Να υπολογίσετε την σταθερά N.

(β) Να υπολογίσετε την αβεβαιότητα στα μεγέθη L_z και L^2.

Άσκηση 4: (α) Δείξτε ότι ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση $g(r)(\sin\theta\sin\phi+i\cos\theta)$ έχει καθορισμένη τιμή του τελεστή στροφορμής L_x.

(β) Ποιες είναι οι πιθανές τιμές μέτρησης της στροφορμής L_z κατά τον άξονα z και με ποια πιθανότητα η κάθε μία.

Άσκηση 5: Σωμάτιο κινούμενο σε σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό ευρίσκεται στην κατάσταση $\Psi(x,y,z) = N(3xy + 2y^2)e^{-ar^2}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Ποιες τιμές θα προκύψουν κατά την μέτρηση της στροφορμής L_z κατά τον z άξονα και με ποια σχετική πιθανότητα;

Άσκηση 6: Σωμάτιο κινούμενο σε σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό ευρίσκεται στην κατάσταση $\Psi(x,y,z) = N(xy + yz + zx)e^{-ar^2}$.

Ποια είναι η πιθανότητα μέτρηση του τετραγώνου της γωνιακής στροφορμής $\mathbf{L}^2$ να δώσει τιμές 0 και $6\hbar^2$ αντίστοιχα; Αν μετρηθεί τιμή $l = 2$, ποια είναι η σχετική πιθανότητα για τις τιμές $m = 2,1,0,-1,-2$;

Άσκηση 7: (α) Να δείξετε ότι σε μία κατάσταση με καθορισμένη τιμή του L_z οι μέσες τιμές των L_x και L_y είναι ίσες με το μηδέν. Να υπολογίσετε επίσης τις μέσες τιμές $<L_x^2>$ και $<L_y^2>$.

(β) Έστω $\hat{\mathbf{n}}$ μοναδιαίο διάνυσμα (θ,ϕ) σε σφαιρικές συντεταγμένες. Δείξτε την παρακάτω σχέση για την προβολή του διανύσματος της στροφορμής στην διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$: $L_n = \sin\theta\cos\phi L_x + \sin\theta\sin\phi L_y + \cos\theta L_z$. Εάν το σύστημα είναι σε μία ιδιοκατάσταση των τελεστών $\mathbf{L}^2$ και L_z με ιδιοτιμές $\hbar^2 l(l+1)$ και $\hbar m$ αντίστοιχα, ποιές είναι οι αναμενόμενες (μέσες) τιμές του L_n και του L_n^2 ;

Άσκηση 8: (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(r,\theta,\varphi)$ η οποία μετατίθεται με τους τρείς τελεστές της στροφορμής, είναι συνάρτηση μόνο του r.

(β) Εάν η συνάρτηση $F(x,y,z)$ μετατίθεται με μόνο έναν από τους τελεστές L_x, L_y ή L_z, τότε αυτή πρέπει να παρουσιάζει αξονική συμμετρία γύρω από τον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων.

Άσκηση 9: (α) Να δράσετε στην ιδιοσυνάρτηση Y_{22} με τον τελεστή L_- και να προσδιορίσετε τις Y_{21} και Y_{20}. Να κάνετε την κανονικοποίηση.

(β) Προσδιορίστε επίσης τις $Y_{2,-1}$ και Y_{20} δρώντας στην $Y_{2,-2}$ με τον τελεστή L_+.

Άσκηση 10: (α) Σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H = \dfrac{L^2}{2I} + gL_z$, I και g θετικές σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Να βρείτε το ενεργειακό του φάσμα. Ποιά πρέπει να είναι η σχέση των I και g έτσι ώστε η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας να είναι διπλά εκφυλισμένη.

(β) Στο προηγούμενο σύστημα να βρείτε την εξάρτηση από τον χρόνο της μέσης τιμής για την x και y συνιστώσα της στροφορμής, $<L_x>$ και $<L_y>$ αντίστοιχα.

(γ) Σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H=\frac{L_x^2+L_y^2}{2I}+g\hbar L_z$, όπου I και g θετικές σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Να βρείτε το ενεργειακό του φάσμα. Αν $g=\frac{1}{4I}$ υπολογίστε την ενέργεια και τον βαθμό εκφυλισμού της πρώτης και τρίτης διεγερμένης κατάστασης.

<u>Άσκηση 11:</u> Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή: $H=\frac{\varepsilon}{\hbar}L_z+\frac{\varepsilon}{\hbar^2}(L_x^2+L_y^2)$,
όπου το ε είναι θετική σταθερά και L_k η συνιστώσα k του τελεστή της στροφορμής.

(α) Προσδιορίστε το ενεργειακό φάσμα της Η για ένα σωματίδιο χωρίς σπιν με $\ell=1$.

(β) Θεωρήστε ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση $\psi(\theta,\phi)=N(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta)$.

Ποία είναι η μέση τιμή της ενέργειας;

<u>Άσκηση 12:</u> Δίνεται η χαμιλτονιανή ενός συστήματος σπιν με δύο ίδιοκαταστάσεις, $H=\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix}$ όπου $E_1\neq E_2\in R$.

(α) Την χρονική στιγμή $t=0$ το σπιν του συστήματος βρέθηκε να είναι στην διεύθυνση $-y$. Γράψτε την αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση.

(β) Γράψτε την κυματοσυνάρτηση του συστήματος για $t\neq 0$.

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο αποτέλεσμα της μέτρησης του σπιν στην διεύθυνση x ως συνάρτηση του χρόνου και να κάνετε τή γραφική του παράσταση.

<u>Άσκηση 13:</u> Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος δύο καταστάσεων είναι ένας ερμιτιανός πίνακας $H=\begin{pmatrix}a & b\\ b^* & a\end{pmatrix}$ με $a\in R$. Εάν το σύστημα είναι αρχικά στην κατάσταση $|\psi(t=0)\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ βρείτε την κατάσταση του συστήματος για $t\neq 0$.

<u>Άσκηση 14:</u> Η αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο περιγράφεται από την χαμιλτονιανή $H=\varepsilon\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

(α) Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου. (β) Την χρονική στιγμή *t=0* το σύστημα μετρήθηκε και το *σπιν* του βρέθηκε στην κατεύθυνση *-z*. Γράψτε την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. (γ) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος για *t>0* και υπολογίστε την πιθανότητα να μετρήσουμε το *σπιν* στην κατεύθυνση *z*.

<u>Άσκηση 15</u>: Η κυματοσυνάρτηση του *spin* ενός ηλεκτρονίου είναι $\psi = c\chi_- + 3c\chi_+$ όπου οι συναρτήσεις χ_+ και χ_- είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της *z* συνιστώσας του *spin* και *c* μία σταθερά κανονικοποίησης. Έστω ότι μετράμε το *spin* του σωματιδίου στην κατεύθυνση ενός άξονα ***n*** όπου αντιστοιχεί ο τελεστής $s_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}s_x + s_y)$, όπου s_x και s_y οι τελεστές του *spin* στις διευθύνσεις *x,y* αντίστοιχα.

(α) Τι τιμές θα βρούμε για το spin του σωματιδίου σε αυτή την κατεύθυνση;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε κάθε μία από τις τιμές αυτές;

(γ) Δώστε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.

<u>Άσκηση 16:</u> (α) Βρείτε τον πίνακα που παριστάνει την προβολή του διανύσματος του *spin* σε μια τυχούσα κατεύθυνση (*θ,φ*). Δείξτε ότι έχει ιδιοτιμές $\pm\frac{\hbar}{2}$.

(β) Βρείτε το διάνυσμα *X* που περιγράφει μία κατάσταση με καθορισμένη προβολή του *spin* σε αυτή τη διεύθυνση.

<u>Άσκηση 17:</u> Ένα σωματίδιο έχει καθορισμένη τιμή του *spin* κατά τον άξονα των *z* ίση με $\frac{\hbar}{2}$.

(α) Υπολογίστε την μέση τιμή της συνιστώσας του *spin* στην κατεύθυνση $\hat{n}$ που σχηματίζει γωνία *θ* με τον άξονα των *z*.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρούμε σε μία μέτρηση της προβολής του spin κατά τον άξονα $\hat{n}$ την τιμή $\frac{\hbar}{2}$ ή $-\frac{\hbar}{2}$ αντίστοιχα.

<u>Άσκηση 18:</u> Ηλεκτρόνιο, ακίνητο, ευρίσκεται σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την σχέση $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\ \hat{z}$. Για $t = 0$ το ηλεκτρόνιο ευρίσκεται στην ιδιοκατάσταση του τελεστή S_n με ιδιοτιμή $+\hbar/2$, όπου $S_n = \vec{S}\cdot\vec{n},\ \vec{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. (α) Υπολογίστε σαν συνάρτηση του χρόνου την πιθανότητα μέτρησης της τιμής $-\hbar/2$ για το *spin* στη κατεύθυνση *x*. (β) Ποία είναι η πιθανότητα μέτρησης της τιμής $\hbar/2$ για το *spin* στην κατεύθυνση *z*;

<u>Άσκηση 19:</u> Ηλεκτρόνιο, ακίνητο, ευρίσκεται σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την σχέση $\vec{B}(t) = B_0 \sin(\omega_0 t)\ \hat{z}$. Για $t = 0$ το ηλεκτρόνιο ευρίσκεται στην ιδιοκατάσταση του τελεστή S_x με ιδιοτιμή $+\hbar/2$. (α) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου την τυχαία χρονική στιγμή t. (β) Υπολογίστε σαν συνάρτηση του χρόνου την μέση τιμή για το *spin* στη κατεύθυνση *x, y* και *z*. Τι παρατηρείται για το διάνυσμα της μέσης τιμής του spin; $<\vec{S}>=\hat{i}<S_x>+\hat{j}<S_y>+\hat{k}<S_z>$.

<u>Άσκηση 20:</u> Το ηλεκτρόνιο σε άτομο υδρογόνου είναι στην κατάσταση

$$\psi(t=0)=R_{21}\left(\sqrt{2/3}\ Y_1^0\chi_+ + \sqrt{1/3}\ Y_1^1\chi_-\right)$$

όπου $\chi_\pm$ είναι οι καταστάσεις σπίν.

(α) Εάν μετρήσετε τα L^2, L_z, S^2 και S_z ποιες είναι οι πιθανές τιμές και με τι πιθανότητα έκαστη ?

(β) Έστω $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ η ολική στροφορμή. Υπολογίστε τα $<\boldsymbol{J}^2>$ και $<J_z>$.

<u>Άσκηση 21:</u> Το ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου την χρονική στιγμή *t=0* είναι στην κατάσταση $\Psi(\vec{r},t=0)=N\Psi_{211}\chi_+$

όπου $\chi_\pm$ είναι οι καταστάσεις σπίν και ψ_{nlm} οι ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του υδρογόνου με συγκεκριμένη ενέργεια. Το ηλεκτρόνιο βρίσκεται υπό την επήρεια ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B}=B_0\hat{z}$ για $t>0$, $H=H_0+H_B$, όπου $H_0=\dfrac{\vec{P}^2}{2m}+V(\vec{r})$ και $H_B=-\vec{\mu}_L\cdot\vec{B}-\vec{\mu}_S\cdot\vec{B}$.

(α) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος για $t>0$.

(β) Εάν μετρήσουμε το σπιν του ηλεκτρονίου στον άξονα *z* τι τιμές θα πάρουμε και με τι πιθανότητα;

(γ) Έστω $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ η ολική στροφορμή. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής για αυτό το σύστημα?

(γ) Υπολογίστε τα $J_z\Psi$ και $\boldsymbol{J}^2\Psi$. Σε ποια τιμή της ολικής στροφορμής αντιστοιχεί η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου;

<u>Άσκηση 22:</u> Δύο σωματίδια με spin $S_1=3/2$ και $S_2=1$ αλληλεπιδρούν τοπικά και η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι: $H=g(S_x^{\ 2}+S_y^{\ 2})$,

όπου *g* μια σταθερά με τις κατάλληλες μονάδες.

α) Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής $\boldsymbol{S}$ των δύο σωματιδίων και τον εκφυλισμό σε κάθε περίπτωση.

β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος.

Άσκηση 23: Δύο σωματίδια με spin S_1=1/2, S_2=1/2 αλληλεπιδρούν τοπικά και η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι: $H=k_1\boldsymbol{S_1}\boldsymbol{S_2}+k_2S_z$

όπου k_1, k_2 σταθερές με τις κατάλληλες μονάδες.

(α) Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής $\boldsymbol{S}$ των δύο σωματιδίων και τον εκφυλισμό σε κάθε περίπτωση.

(β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος και γράψτε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.

(γ) Εάν το σύστημα τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι στην κατάσταση $|\,\chi_-^{(1)},\chi_+^{(2)}\rangle$, ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $|\,\chi_+^{(1)},\chi_-^{(2)}\rangle$ μετά από χρόνο t;

Άσκηση 24: Δύο σωματίδια με μάζες m_1,m_2 και *spin* $s_1=1$, $s_2=1/2$ αντίστοιχα, αλληλεπιδρούν με δυναμική ενέργεια $V(r)=g\dfrac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{r}$, όπου r η σχετική τους απόσταση. (α) Για ποιές τιμές του συνολικού *spin* των δύο σωματιδίων δημιουργούνται δέσμιες καταστάσεις, πόση ενέργεια έχουν και τι εκφυλισμό. Θεωρήστε θετική και αρνητική σταθερά αλληλεπίδρασης g. (β) Στην χαμηλότερη ενεργειακά στάθμη τα δύο σωματίδια έχουν σχετική τροχιακή στροφορμή l ίση με μηδέν και το ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησής τους είναι $R(r)=Ne^{-\frac{r}{a}}$.

Να προσδιορίσετε τη σταθερά a και τη σταθερά κανονικοποίησης N.

Η ανηγμένη μάζα του συστήματος είναι $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

Άσκηση 25: Στην πυρηνική φυσική χρησιμοποιούνται φαινομενολογικά δυναμικά τα οποία εξαρτώνται ρητά από το σπίν των σωματιδίων, όπως:

$$V(r)=V_1(r)+\frac{1}{\hbar^2}\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\;V_2(r)$$

όπου $\vec{S}_i$ είναι ο τελεστής σπίν. Αν το ανωτέρω δυναμικό περιγράφει αλληλεπίδραση πρωτονίου-νετρονίου (σπίν ½) βρείτε την μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας στις καταστάσεις ολικού σπίν $|S=1\rangle$ και $|S=0\rangle$ συναρτήσει των $\langle V_1(r)\rangle$ και $\langle V_2(r)\rangle$. Αν η κατάσταση $|S=0\rangle$ δεν παρατηρείται στην φύση σε αντίθεση με την $|S=1\rangle$, τι συμπεραίνετε για το $\langle V_2(r)\rangle$?

Άσκηση 26: Ένα σωματίδιο με *spin* $s=1/2$ κινείται σε ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων. Βρείτε τις κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου οι οποίες είναι συγχρόνως ιδιοσυναρτήσεις των τριών τελεστών που μετατίθενται $\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{J}^2$ και $J_z=L_z+s_z$. (α) Α΄ τρόπος: Γράψτε τους τελεστές J_z και $\mathbf{J}^2$ υπό μορφή πινάκων π.χ.

$J_z = \begin{pmatrix} L_z + \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & L_z - \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}$ όπου $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$. Υποθέτοντας ότι $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ έχουμε την εξίσωση ιδιοτιμών $\begin{pmatrix} L_z + \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & L_z - \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = m\hbar \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ όπου το m είναι ημιακέραιος πραγματικός αριθμός για να είναι οι λύσεις μονότιμες. Λύνουμε κατόπιν την εξίσωση $\vec{J}^2\Psi = \hbar^2 j(j+1)\Psi$ όπου $j = j_{\max} = \ell + \frac{1}{2}$ και $j = j_{\min} = \ell - \frac{1}{2}$. Εφαρμογή για $\ell = 1$. (β) <u>Β΄ τρόπος:</u> Παίρνουμε την συνάρτηση $\Psi_{j_{\max}, j_{\max}} = Y_{\ell\ell} X_+$ με την μεγαλύτερη τιμή του $m = j_{\max} = \ell + \frac{1}{2}$ και εφαρμόζουμε τον τελεστή J_-, $2j_{max}$ φορές. Για να βρούμε τις κυματοσυναρτήσεις με $j = j_{\min} = \ell - \frac{1}{2}$ ορίζουμε πρώτα την $\Psi_{j_{\min}, j_{\min}}$ ορθογώνια στην $\Psi_{j_{\max}, j_{\ell - 1/2}}$ και κατόπιν εφαρμόζουμε τον τελεστή J_-, $2j_{min}$ φορές. Εφαρμογή για $\ell = 1$.

<u>Άσκηση 27:</u> Εάν J_x, J_y και J_z είναι οι τελεστές που παριστάνουν τις τρείς συνιστώσες του διανύσματος της στροφορμής.

(α) Αποδείξτε τις ισότητες:

$e^{i\gamma J_y} J_z e^{-i\gamma J_y} = J_z \cos(\gamma\hbar) - J_x \sin(\gamma\hbar)$, $\quad e^{i\gamma J_x} J_z e^{-i\gamma J_x} = J_z \cos(\gamma\hbar) + J_y \sin(\gamma\hbar)$,

$e^{i\gamma J_z} J_x e^{-i\gamma J_z} = J_x \cos(\gamma\hbar) + J_y \sin(\gamma\hbar)$ όπου γ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Υπόδειξη: Έστω $A = e^{i\gamma J_y} J_z e^{-i\gamma J_y}$, υπολογίστε την ποσότητα $\frac{dA}{d\gamma}$ και $\frac{d^2 A}{d\gamma^2}$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $e^{\frac{-i\pi}{2\hbar} J_y} Y_{jm}$ είναι ιδιοσυνάρτηση των $\boldsymbol{J}^2$ και J_x , ομοίως δείξτε ότι η $e^{\frac{i\pi}{2\hbar} J_x} Y_{jm}$ είναι ιδιοσυνάρτηση των $\boldsymbol{J}^2$ και J_y., με ιδιοτιμή $m\hbar$ αντίστοιχα.

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\Psi_{jm} = e^{-\frac{i\phi}{\hbar} J_z} e^{-\frac{i\theta}{\hbar} J_y} Y_{jm}$ είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή $J_n = J_x \sin\theta \cos\phi + J_y \sin\theta \sin\phi + J_z \cos\theta$ με ιδιοτιμή $m\hbar$. Υπόδειξη: δείξτε πρώτα ότι $e^{-\frac{i\phi}{\hbar} J_z} e^{-\frac{i\theta}{\hbar} J_y} J_z e^{\frac{i\theta}{\hbar} J_y} e^{\frac{i\phi}{\hbar} J_z} = J_x \sin\theta \cos\phi + J_y \sin\theta \sin\phi + J_z \cos\theta$.

Άσκηση 28: Ορίζουμε J_r, J_θ, J_φ την προβολή του διανύσματος $\boldsymbol{J}$ της στροφορμής στα μοναδιαία ορθογώνια διανύσματα $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\theta}$ και $\boldsymbol{\varphi}$ αντίστοιχα. (α) Να δείξετε ότι οι τρείς αυτοί ερμιτιανοί τελεστές ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης των συνιστωσών της στροφορμής. (β) Να δείξετε ότι ο τελεστής $\vec{J}^2 = J_x^{\,2} + J_y^{\,2} + J_z^{\,2}$ είναι ίσος με $J_r^{\,2} + J_\theta^{\,2} + J_\phi^{\,2}$. (γ) Να βρείτε το φάσμα ιδιοτιμών των τελεστών $\boldsymbol{J}^2$ και J_r.

Άσκηση 29: Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή: $H = \frac{\varepsilon_1}{\hbar}(L_x + L_y) + \frac{\varepsilon_2}{\hbar^2}\vec{L}^2$

όπου τα ε_1, ε_2 είναι θετικές σταθερές και L_k η k συνιστώσα του τελεστή της στροφορμής. (α) Υπολογίστε το ενεργειακό φάσμα της H για ένα σωματίδιο χωρίς *spin*. (β) Προσδιορίστε τις ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής H για ένα σωματίδιο χωρίς *spin* με $\ell = 1$.

Άσκηση 30: (α) Εάν $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι δύο τυχόντα διανύσματα και σ_k οι πίνακες του Pauli, αποδείξτε την σχέση: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$.

(β) Εάν σ_k οι πίνακες του Pauli και θ πραγματικός αριθμός, δείξτε ότι $e^{i\theta\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\theta + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\theta$

(γ) Αποδείξτε την σχέση: $e^{i\theta\hat{n}\cdot\vec{J}}\vec{J}e^{-i\theta\hat{n}\cdot\vec{J}} = \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{J}) - \hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{J})\cos(\theta\hbar) + (\hat{n}\times\vec{J})\sin(\theta\hbar)$, όπου $\vec{J}$ ο διανυσματικός τελεστής της στροφορμής.

Άσκηση 31: Η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης φορτισμένου σωματιδίου μάζας m, φορτίου q και *spin s* με εξωτερικό στατικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι της μορφής $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV - \vec{\mu}_S\cdot\vec{B} = H_0 + H_B$, όπου V το βαθμωτό δυναμικό, δυναμικό Coulomb, και $\vec{A}$ το διανυσματικό δυναμικό, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$.

(α) Εάν $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r})$ το διανυσματικό δυναμικό για ένα εξωτερικό σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, δείξτε ότι η Χαμιλτονιανή μπορεί να πάρει την μορφή:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + qV - \frac{q}{2m}\vec{B}\cdot\vec{L} + \frac{q^2}{8m}(\vec{B}\times\vec{r})^2 - \vec{\mu}_S\cdot\vec{B}.$$

Άρα $H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + qV$, $H_B = -\vec{\mu}_L\cdot\vec{B} - \vec{\mu}_S\cdot\vec{B} + \frac{q^2}{8m}(\vec{B}\times\vec{r})^2$ και $\vec{\mu}_L = \frac{q}{2m}\vec{L}$.

(β) Εκτιμήστε τη σχετική συνεισφορά των δύο όρων αλληλεπίδρασης της Χαμιλτονιανής $-\frac{q}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B}$ και $\frac{q^2}{8m}(\vec{B}\times\vec{r})^2$ για το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο της τάξης του ένα *Tesla*.

Άσκηση 32: Φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q, χωρίς *spin*, κινείται μέσα σε ένα χρονικά σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2$.

(α) Εάν $\vec{B} = B\hat{z}$ και $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ βρείτε τις ενεργειακές στάθμες της Χαμιλτονιανής . Υπόδειξη: ορίζοντας τους κατάλληλους τελεστές $P = \alpha(p_x - qA_x)$ και $Q = \beta(p_y - qA_y)$ να δείξετε ότι $[P,Q] = -i\hbar$. Να γράψετε κατόπιν την Χαμιλτονιανή στην μορφή $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 + \frac{p_z^2}{2m}$ με κατάλληλο ορισμό της ποσότητας ω.

(β) Δείξτε ότι $[L_z, H] = 0$. Αμελώντας την κίνηση στην z κατεύθυνση βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής στο (x, y) επίπεδο (στάθμες Landau).

(γ) Εάν το φορτισμένο σωματίδιο αλληλεπιδρά και με ένα στατικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -Dz\hat{z}$, όπου D θετική σταθερά με κατάλληλες μονάδες, βρείτε τις ενεργειακές στάθμες και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος.

Άσκηση 33: Σωματίδιο μάζας m με *spin 1/2* και μαγνητική διπολική ροπή μ εισέρχεται σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι $B_x=0$, $B_y=-ky$ και $B_z=B_0+kz$. Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t=0$ που εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο είναι της μορφής $\Psi(t=0) = \psi(x,y,z)e^{i\frac{p_0}{\hbar}x}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ όπου $\int \psi^2 d^3x = 1$, $\psi \in R$ και $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

(α) Βρείτε τις πιθανότητες $P_+(z)$, $P_-(z)$ μέτρησης της προβολής του *spin* $\frac{\hbar}{2}$ ή $-\frac{\hbar}{2}$ αντίστοιχα, κατά τον άξονα των z. (β) Ομοίως τις πιθανότητες $P_+(y), P_-(y)$ για την μέτρηση της προβολής του *spin* στον άξονα y. (γ) Εάν $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \vec{\mu}\cdot\vec{B}$ είναι η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου στο μαγνητικό πεδίο να βρείτε τις μέσες τιμές $\langle x\rangle_t$, $\langle y\rangle_t$, $\langle z\rangle_t$ των συντεταγμένων x, y, z σαν συνάρτηση του χρόνου κίνησης μέσα στο μαγνητικό πεδίο. (δ) Να εκφράσετε τις ποσότητες $\langle y\rangle_t$ και $\langle z\rangle_t$ μέσω των πιθανοτήτων $P_\pm(z)$ και $P_\pm(y)$. Τι θα βρίσκαμε εάν $\beta=0$, τι θα είχαμε εάν $\alpha=0$; Ποιο είναι τα αποτέλεσμα εάν αρχικά το spin ήταν $\frac{\hbar}{2}$ κατά τον άξονα των y; (ε) Εάν θεωρήσουμε ότι η αρχική κυματοσυνάρτηση $\Psi(t=0)$ περιγράφει μία δέσμη σωματιδίων με *spin 1/2* που κινείται με ορμή p_0 κατά τον άξονα των x πως συνδέεται αυτή η άσκηση με το πείραμα ***Stern - Gerlach***;