Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

$$
\begin{aligned}
\langle A^2 \rangle &= \int \Psi^* A^2 \Psi \mathrm{d}x = \int (A\Psi)^* (A\Psi) \mathrm{d}x \\
\langle B^2 \rangle &= \int \Psi^* B^2 \Psi \mathrm{d}x = \int (B\Psi)^* (B\Psi) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Ανισότητα του Schwartz :

$$
\begin{aligned}
&\left(\int \Phi_1^* \Phi_1 \mathrm{d}x \right) \left(\int \Phi_2^* \Phi_2 \mathrm{d}x \right) \geqslant \left| \int \Phi_1^* \Phi_2 \mathrm{d}x \right|^2 \\
&\Rightarrow \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle = \left(\int (A\Psi)^* (A\Psi) \mathrm{d}x \right) \left(\int (B\Psi)^* (B\Psi) \mathrm{d}x \right) \geqslant \\
&\geqslant \left| \int (A\Psi)^* (B\Psi) \mathrm{d}x \right|^2 = \\
&= \left| \int \Psi^* AB \Psi \mathrm{d}x \right|^2 = |\langle AB \rangle|^2 = \\
&= (\mathrm{Re}\langle AB \rangle)^2 + (\mathrm{Im}\langle AB \rangle)^2
\end{aligned}
$$

Ο τελεστής $C = AB$ δεν είναι ερμιτιανός ($C^\dagger = (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$), άρα η μέση τιμή του $\langle C \rangle = \langle AB \rangle$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός.
Ορίζουμε τον C σαν το μιγαδικό άθροισμα δυο ερμιτιανών τελεστών.
Έχουμε

$$
\begin{aligned}
&C = \frac{1}{2}(AB + BA) + i\frac{1}{2i}(AB - BA) = \\
&= \frac{1}{2}(G + iD) \\
&\quad G = AB + BA, \quad D = \frac{1}{i}(AB - BA), G^\dagger = G, \quad D^\dagger = D \\
&\Rightarrow \langle C \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle G \rangle + i \langle D \rangle \right) \\
&\langle G \rangle, \langle D \rangle \in \mathrm{R} \\
&\Rightarrow |\langle AB \rangle|^2 = |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4}\left(\langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2 \right)
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geqslant \frac{1}{4}\left(\langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2 \right) \qquad \blacksquare
$$

Θα αποδείξουμε τώρα την γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας: $(\Delta A)(\Delta B) = \frac{1}{2}| < [A, B] > |$

Επειδή $\langle D \rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle D \rangle^2 \in \mathbb{R}^+$ και ομοίως $\langle G \rangle^2 \in \mathbb{R}^+$
επομένως

$$\Rightarrow \langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2 \geqslant \langle D \rangle^2 \Rightarrow \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle D \rangle^2$$

άρα

$$|\langle AB \rangle|^2 \geqslant \frac{1}{4} \langle D \rangle^2$$

Έχουμε

$$i\langle D \rangle = \langle (AB - BA) \rangle = \langle [A, B] \rangle$$
$$i^2 \langle D \rangle^2 = \langle [A, B] \rangle^2$$
$$\Rightarrow \langle D \rangle^2 = -\langle [A, B] \rangle^2$$

δηλαδή ο $\langle [A, B] \rangle^2$ είναι αρνητικός αριθμός.
Άρα

$$\langle D \rangle^2 = \left| \langle [A, B] \rangle^2 \right| \Rightarrow \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle [A, B] \rangle^2 \right|$$

επειδή $\langle [A, B] \rangle = i\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
τότε $\langle [A, B] \rangle^2 = -\alpha^2$
και $\left| \langle [A, B] \rangle^2 \right| = \alpha^2 = |\langle [A, B] \rangle|^2$

$$\Rightarrow \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geqslant \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 \qquad \blacksquare$$

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$
$$(\Delta B)^2 = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle$$
$$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle \geqslant \frac{1}{4} |\langle [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle] \rangle|^2$$

από την προηγούμενη σχέση, αλλά:
$[A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle] = (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) - (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle) = AB - BA = [A, B]$

$$\Rightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geqslant \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$
$$\Rightarrow (\Delta A)(\Delta B) \geqslant \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 2.

Για να έχουμε την ισότητα στην γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας θα πρέπει να ισχύουν δυο ισότητες.
Πρώτον από την ανισότητα του Schwartz , για να γίνει ισότητα, τα δυο διανύσματα Φ_1 και Φ_2 θα πρέπει να είναι παράλληλα μεταξύ τους

$$\Rightarrow (A - \langle A\rangle)\Psi = c(B - \langle B\rangle)\Psi$$

Δεύτερον θα πρέπει η $\langle G\rangle = 0$
δηλαδή $\langle (A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle) + (B - \langle B\rangle)(A - \langle A\rangle)\rangle = 0$
εάν θέσουμε $A' = A - \langle A\rangle$ και $B' = B - \langle B\rangle$, τότε

$$\begin{aligned}
&\langle A'B'\rangle + \langle B'A'\rangle = 0 \\
&\Rightarrow c^*\langle B'B'\rangle + c\langle B'B'\rangle = 0 \\
&\Rightarrow (c + c^*)\langle B'B'\rangle = 0 \Rightarrow c + c^* = 0 \\
&\Rightarrow c = i\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow (A - \langle A\rangle)\Psi = i\alpha(B - \langle B\rangle)\Psi \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Εφαρμογή:
Έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}
&x\Psi = (i)(-i)\alpha\hbar\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} \\
&\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\alpha h}\Psi \Rightarrow \Psi(x) = Ne^{\frac{x^2}{2\alpha\hbar}}
\end{aligned}$$

Για να είναι κανονικοποιημένη η κυματοσυνάρτηση θέλουμε $\alpha < 0$.
Θέτουμε $\lambda = -\frac{1}{\alpha\hbar} > 0$

$$\Rightarrow \Psi(x) = Ne^{-\lambda\frac{x^2}{2}} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 3.

$$
\begin{aligned}
&e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \\
&\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \\
&\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{51} + \cdots \\
&e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{51} + \cdots\right) \\
&\Sigma^2 = \mathbb{I}, \quad \Sigma^3 = \Sigma\Sigma^2 = \Sigma, \quad \Sigma^4 = \mathbb{I}, \quad \Sigma^5 = \Sigma, \quad \ldots \\
&\Rightarrow e^{i\alpha\Sigma} = \mathbb{I} + (i\alpha\Sigma) + \frac{(i\alpha\Sigma)^2}{2!} + \frac{(i\alpha\Sigma)^3}{3!} + \frac{(i\alpha\Sigma)^4}{4!} + \cdots \\
&= \mathbb{I}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} + \cdots\right) + i\Sigma\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \cdots\right) \\
&= \mathbb{I}\cos(\alpha) + i\Sigma\sin(\alpha) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Άσκηση 4.

Έστω ότι έχουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις Ψ_1 και Ψ_2 με την ίδια ιδιοενέργεια E. Τότε

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\Psi_1 \\
&\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\Psi_2 \\
&\Rightarrow \frac{\Psi_1''}{\Psi_1} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right) = \frac{\Psi_2''}{\Psi_2} \\
&\Rightarrow \Psi_2\Psi_1'' - \Psi_1\Psi_2'' = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Psi_2\Psi_1' - \Psi_1\Psi_2'\right) = 0
\end{aligned}
$$

Άρα η ποσότητα $\Psi_2\Psi_1' - \Psi_1\Psi_2'$ είναι μια σταθερά και μάλιστα είναι μηδέν διότι $\Psi_1, \Psi_2 \to 0$ όταν $x \to \infty$. Έτσι

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Psi_1'}{\Psi_1} = \frac{\Psi_2'}{\Psi_2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(\Psi_1)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(\Psi_2)) \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(\frac{\Psi_1}{\Psi_2}\right)\right) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{\Psi_1}{\Psi_2}\right) = \alpha \\
&\Rightarrow \frac{\Psi_1}{\Psi_2} = \beta, \beta = e^{\alpha} \Rightarrow \Psi_1 = \beta\Psi_2
\end{aligned}
$$

γραμμικά εξαρτημένες. $\blacksquare$

Άσκηση 5.

α) Στάσιμες καταστάσεις

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}-\alpha\delta(x)\Psi=E\Psi$$

για $x\neq 0$ έχουμε μόνο τον κινητικό όρο

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2mE}{h^2}\Psi$$

Εάν $E<0$ ορίζουμε το

$$k^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}=\frac{2m\left|E\right|}{\hbar^2}>0$$

και η λύση είναι η κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x)=\begin{cases} Be^{kx} & ,x<0\\ Ae^{-kx} & ,x>0\end{cases}$$

Αφού μάλιστα η $\Psi(x)$ είναι συνεχής στο μηδέν, προκύπτει ότι $A=B$ και $\Psi(x)=Ae^{-k|x|}$.
Προσδιορισμός του E:
Ολοκληρώνουμε την εξίσωση του Schrödinger στο διάστημα $(-\epsilon,\epsilon)$

$$\Rightarrow -\frac{h^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Psi''\mathrm{d}x-\alpha\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\Psi(x)\mathrm{d}x=E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Psi(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Psi(x)\mathrm{d}x\xrightarrow[\epsilon\to 0]{}0,\qquad \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\Psi(x)\mathrm{d}x=\Psi(0)$$
$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Psi')\mathrm{d}x=\Psi'(x=\epsilon)-\Psi'(x=-\epsilon)$$

για $\epsilon\to 0$ έχουμε

$$\Rightarrow -\frac{h^2}{2m}\left[(-Ak)-(Ak)\right]-\alpha A=0$$
$$\Rightarrow \frac{h^2k}{m}=\alpha\Rightarrow k=\frac{m\alpha}{h^2}\Rightarrow k^2=\frac{m^2\alpha^2}{h^4}$$
$$\frac{2m\left|E\right|}{h^2}=\frac{m^2\alpha^2}{h^4}\Rightarrow |E|=\frac{m\alpha^2}{2h^2}$$

Προσδιορισμός του A:
Κανονικοποίηση της $\Psi(x)$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k|x|} \mathrm{d}x = 1 \\
&\Rightarrow 1 = 2A^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2kx} \mathrm{d}x = \frac{2A^2}{2k} \Rightarrow A^2 = k \\
&\Rightarrow A = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{h} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

β) Έστω κύμα προσπίπτον από τα αριστερά

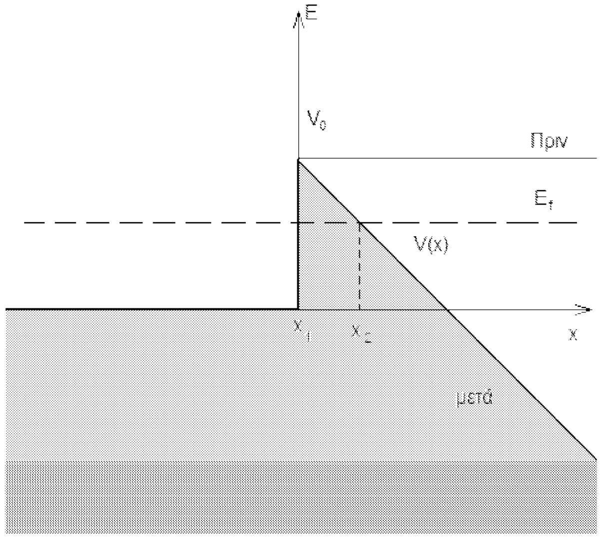
$$
\begin{aligned}
&-\frac{h^2}{2m}\Psi'' - \alpha\delta(x)\Psi = E\Psi, \quad E > 0 \\
&\Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0, x \neq 0 \\
&\Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad x < 0 \\
&\Psi_2(x) = Fe^{ikx}, \quad x > 0 \\
&\Psi_1(x=0) = \Psi_2(x=0) \Rightarrow A + B = F \\
&\left.\frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = ikA - ikB = ik(A-B) \\
&\left.\frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = ikF
\end{aligned}
$$

Από το ολοκλήρωμα της εξίσωσης του Schrödinger από $(-\epsilon, \epsilon)$ για $\epsilon \to 0$ έχουμε:

$-\frac{h^2}{2m}\left[ikF - ik(A-B)\right] = \alpha(A+B) \Rightarrow$
$-\frac{h^2}{2m}\left[ik(A+B) - ik(A-B)\right] = \alpha(A+B) \Rightarrow$
$B = i\frac{m\alpha}{k\hbar^2}(A+B) \Rightarrow B = i\frac{\beta}{1-i\beta}A$
με $\beta = \frac{m\alpha}{kh^2}$.

Έχουμε τελικά

$$
\begin{aligned}
&R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \\
&T = 1 - R = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 6

Άσκηση 6.

Ο συντελεστής διέλευσης προσεγγιστικά είναι:

$$T \simeq e^{-2\int_{x_1}^{x_2} k_2(x)\mathrm{d}x} = e^{-2\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V(x)-E_f)}\mathrm{d}x}$$

βρίσκουμε λοιπόν τα x_1, x_2 και $V(x)$ όταν $\vec{E} = \mathscr{E}_0\hat{x}$.

$$V(x) - V(0) = \int_x^0 e\vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = \int_x^0 e\mathscr{E}_0\mathrm{d}x = -e\mathscr{E}_0 x, \quad V(0) = V_0$$
$$\Rightarrow V(x) = V_0 - e\mathscr{E}_0 x$$

σημεία $x_1, x_2, x_1 = 0 \Rightarrow E_f = V_0 - e\mathscr{E}_0 x_2$

$e\mathscr{E}_0 x_2 = V_0 - E_f$
$\Rightarrow x_2 = \frac{(V_0 - E_f)}{e\mathscr{E}_0}$

Ορίζουμε $W = V_0 - E_f =$ συνάρτηση έργου

$$x_2 = \frac{W}{e\mathscr{E}_0}$$
$$T = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^{x_2}\sqrt{V_0 - E_f - e\mathscr{E}_0 x}\mathrm{d}x\right)$$
$$T = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^{\frac{W}{e\mathscr{E}_0}}\sqrt{W - e\mathscr{E}_0 x}\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^{\frac{W}{e\mathscr{E}_0}}\sqrt{e\mathscr{E}_0}\sqrt{\frac{W}{e\mathscr{E}_0} - x}\mathrm{d}x\right)$$

Όμως

$$\int_0^{x_2} \sqrt{x_2 - x}\mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{3}\right)(x_2 - x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}(x_2)^{\frac{3}{2}}$$

Άρα

$$T = \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar}\frac{W^{\frac{3}{2}}}{e\mathscr{E}_0}\right)$$

που είναι ο τύπος των Fowler - Nordheim. ■

Άσκηση 7.

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

όπου $N = \sqrt{\frac{2}{L}}$ λόγω κανονικοποίησης.

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right)\mathrm{d}x$$

Ξέρουμε ότι

$$\int x \sin^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} - x\frac{\sin(2ax)}{4a} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2}$$
$$\int x^2 \cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin(ax)$$

Άρα

$$\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$
$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{L}{\sqrt{12}}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$
$$\langle p \rangle = 0$$

για κάθε πραγματική κυματοσυνάρτηση.

$$\langle p^2 \rangle = (-ih)^2 \int_0^L \Psi(x)\Psi''(x)\mathrm{d}x =$$
$$= (-i\hbar)^2 \left(\int_0^L (\Psi(x)\Psi'(x))'\mathrm{d}x - \int_0^L \Psi'(x)\Psi'(x)\mathrm{d}x \right) =$$
$$= 0 + \hbar^2 \int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα όμως έχουμε

$$H = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p^2 = 2mH$$
$$\Rightarrow \langle p^2 \rangle = 2m\langle H \rangle = 2mE_n = 2m\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}n^2$$
$$\Rightarrow \langle p^2 \rangle = \frac{h^2\pi^2}{L^2}n^2 \Rightarrow \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \frac{h\pi}{L}n$$

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{12}}n\left(1 - \frac{6}{n^2p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$n = 1 \Rightarrow (\Delta x)(\Delta p) = h\frac{\pi}{\sqrt{12}}\sqrt{1 - \frac{6}{\pi^2}} \simeq 0.568h$$

Άσκηση 8.

$$-\frac{h^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) + V(x,y)\Psi = E\Psi$$
$$V(x,y) = \begin{cases} \infty & , \{x < 0 \lor x > a\} \land \{y < 0 \lor y > b\} \\ 0 & , \{0 < x < a\} \land \{0 < y < b\} \end{cases}$$
$$\Psi(x,y) = \Psi_1(x)\Psi_2(y), \quad E = E_1 + E_2$$
$$\Psi(x = 0, y = 0) = 0, \Psi(x = a, x = b) = 0$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Schrödinger έχουμε δυο εξισώσεις που πρέπει να ισχύουν συγχρόνως:

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2} = E_1\Psi_1 \tag{1}$$

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2} = E_2\Psi_2 \tag{2}$$

$$(1) \Rightarrow \quad k_1^2 = \frac{2mE_1}{\hbar^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2} = -k_1^2\Psi_1$$
$$\Psi_1(x) = \sin k_1 x$$
$$k_1 a = n_1\pi \Rightarrow k_1 = n_1\frac{\pi}{a}, \quad n_1 = 1, 2, \dots$$
$$2\frac{mE_1}{h^2} = \frac{n_1^2\pi^2}{a^2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Psi_{n_1} = \sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right) \\ \\ E_{n_1} = n_1^2\frac{\pi^2 h^2}{2ma^2} \end{cases}$$

Ομοίως

$$(2) \Rightarrow \quad \begin{cases} \Psi_{n_2} = \sin\left(\frac{n_2\pi}{b}x\right) \\ \\ E_{n_2} = n_2^2\frac{\pi^2 h^2}{2mb^2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \Psi_{n_1,n_2}(x,y) = A_{n_1,n_2}\sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)$$
$$E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2 h^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right)$$

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y A_{n_1,n_2}^2 \sin^2\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right) = 1$$
$$\Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

Άσκηση 9.

$$\int \Psi^*(x,0)\Psi(x,0)\mathrm{d}x = 1$$
$$\Rightarrow \int \Psi^*(x,0)\Psi(x,0)\mathrm{d}x = N^*N\int(\Psi_1^* + \Psi_2^*)(\Psi_1 + \Psi_2)\mathrm{d}x =$$
$$= N^*N\left(\int \Psi_1^*\Psi_1\mathrm{d}x + 0 + 0 + \int \Psi_2^*\Psi_2\mathrm{d}x\right) = 2N^*N$$
$$\Rightarrow N^2 = \frac{1}{2}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}}, N \in \mathrm{R}$$

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(x)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \Psi_2(x)e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right) \\
\langle x\rangle_t &= \int \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^L x\Psi_1^*(x)\Psi_1(x)\mathrm{d}x + \int_0^L x\Psi_2^*(x)\Psi_2(x)\mathrm{d}x\right. \\
&\qquad \left. + \int_0^L x\Psi_1^* e^{i\frac{E_1 t}{\hbar}}\Psi_2(x)e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\mathrm{d}x + \int_0^L x\Psi_2^* e^{i\frac{E_2 t}{\hbar}}\Psi_1(x)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad E_1 = \frac{h^2\pi^2}{2mL^2} \\
\Psi_2(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad E_2 = 4\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x &= \frac{2}{L}\int_0^L \left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{L^2}{\pi^2}\right)\sin^2\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}\frac{\pi x}{L} \\
= \frac{2L}{\pi^2}\int_0^\pi y\sin^2 y\mathrm{d}y &= \frac{2L}{\pi^2}\left(\frac{y^2}{4} - \frac{y\sin 2y}{4} - \frac{\cos 2y}{8}\right)\Bigg|_0^\pi \\
= \frac{2L}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - 0 - \frac{1}{8}(1-1)\right) &= \frac{2L}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4} = \frac{L}{2}
\end{aligned}
$$

ομοίως

$$
\frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}
$$

Έτσι

$$
\langle x\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{i(E_1-E_2)\frac{t}{\hbar}} + e^{-i(E_1-E_2)\frac{t}{\hbar}}\right)\int_0^L \Psi_1(x)x\Psi_2(x)\mathrm{d}x
$$

Ορίζουμε:

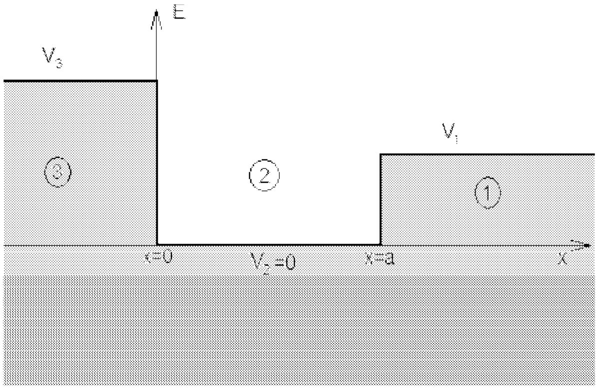
$$
\begin{aligned}
w_{12} &= \frac{E_1 - E_2}{\hbar}, \quad \langle x\rangle_{12} = \int_0^L \Psi_1(x)x\Psi_2(x)\mathrm{d}x \\
\langle x\rangle_t &= \frac{L}{2} + \langle x\rangle_{12}\cos(w_{12}t)
\end{aligned}
$$

Τέλος ισχύει,

$$
\langle x\rangle_{12} = \frac{2}{L}\int_0^L x\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = -\frac{16}{9\pi^2}L
$$

καθώς

$$2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)=\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)-\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 11

Άσκηση 11.

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\Psi=E\Psi$$

Ζητάμε το διακριτό φάσμα, άρα έχουμε: $V_3>V_1>E>0$.
Λύνουμε το πρόβλημα κατά περιοχές:

$$3)\Rightarrow\quad -\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_3}{\mathrm{d}x^2}+V_3\Psi_3=E\Psi_3,\quad k_3^2=\frac{2m}{h^2}(V_3-E)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi_3}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2m}{\hbar^2}(V_3-E)\Psi_3$$
$$\Psi_3''=k_3^2\Psi_3\Rightarrow\Psi_3(x)=A_3e^{k_3x}$$

$$2)\Rightarrow\quad -\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2}=E\Psi_2,\quad k_2^2=\frac{2m}{h^2}E$$
$$\Psi_2''=-k_2^2\Psi_2$$
$$\Rightarrow\Psi_2(x)=A_2e^{ik_2x}+B_2e^{-ik_2x}$$

$$1)\Rightarrow\quad -\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2}+V_1\Psi_1=E\Psi_1,\quad k_1^2=\frac{2m}{h^2}(V_1-E)$$
$$\Psi_1''=k_1^2\Psi_1\Rightarrow\Psi_1(x)=B_1e^{-k_1x}$$

Η $\Psi(x)$ είναι συνεχής για $x=0$ και $x=a$.
Επίσης, η $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}$ είναι συνεχής και αυτή στα ίδια σημεία.

Έτσι

$$
\begin{aligned}
&x=0: \quad A_3 = A_2 + B_2\\
&A_3k_3 = iA_2k_2 - iB_2k_2\\
&x=a: e^{-k_1\alpha}B_1 = A_2e^{ik_2a} + B_2e^{-ik_2a}\\
&-B_1k_1e^{-k_1\alpha} = iA_2k_2e^{ik_2a} - iB_2k_2e^{-ik_2a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x=0: \quad A_2k_3 + B_2k_3 = iA_2k_2 - iB_2k_2\\
&\Rightarrow A_2(k_3 - ik_2) = -B_2(k_3 + ik_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x=a: \quad -A_2k_1e^{ik_2a} - B_2k_1e^{-ik_2a} = iA_2k_2e^{ik_2a} - iB_2k_2e^{-ik_2a}\\
&\Rightarrow -A_2(k_1 + ik_2)e^{ik_2a} = B_2(k_1 - ik_2)e^{-ik_2a}
\end{aligned}
$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\frac{k_1 + ik_2}{k_3 - ik_2}e^{ik_2a} = \frac{k_1 - ik_2}{k_3 + ik_2}e^{-ik_2a}\\
&e^{i2k_2a} = \frac{(k_1 - ik_2)(k_3 - ik_2)}{(k_1 + ik_2)(k_3 + ik_2)}
\end{aligned}
$$

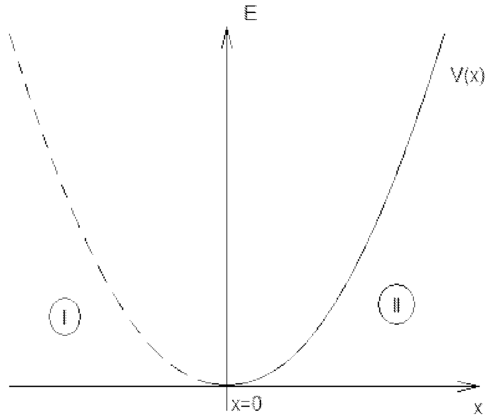
Την παραπάνω εξίσωση την λύνουμε γραφικά. ■

Υπόδειξη:
$e^{2ik_2\alpha}$ = [Πραγματικό Μέρος] + i[Φανταστικό Μέρος] και
$tan(2k_2\alpha)$ = [Φανταστικό Μέρος]/[Πραγματικό Μέρος]

Ορίζουμε τους αδιάστατους αριθμούς
$z = 2k_2a = 2\sqrt{\frac{2m}{h^2}}\sqrt{E}a$, $z_1 = \sqrt{\frac{2m}{h^2}}\sqrt{V_1}a$ και $z_3 = \sqrt{\frac{2m}{h^2}}\sqrt{V_3}a$.
Έτσι

$$
\tan(z) = -\frac{z\sqrt{z_1^2 - \frac{z^2}{4}}\left(z_3^2 - \frac{z^2}{2}\right) + \left(z_1^2 - \frac{z^2}{2}\right)z\sqrt{z_3^2 - \frac{z^2}{4}}}{\left(z_1^2 - \frac{z^2}{2}\right)\left(z_3^2 - \frac{z^2}{2}\right) - z^2\sqrt{z_1^2 - \frac{z^2}{4}}\sqrt{z_3^2 - \frac{z^2}{4}}}
$$

Η γραφική λύση συνίσταται στην εύρεση των σημείων τομής των γραφημάτων που προκύπτουν από το αριστερό και δεξί μέλος ξεχωριστά της παραπάνω παράστασης με τον περιορισμό για το z, $4z_1^2 \geqslant z^2$.



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 12

Άσκηση 12.

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\Psi=E\Psi$$

Περιοχή I: $\Psi_1(x)=0$
Περιοχή II: $-\dfrac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}mx^2\omega^2\Psi_2=E\Psi_2$ με την συνθήκη $\Psi_2(x=0)=0$.
Οι συναρτήσεις $\Psi_n(x)=c_n e^{-a\frac{x^2}{2}}H_n(\sqrt{\alpha}x)$ με $\alpha=\dfrac{m\omega}{h}$ ικανοποιούν την εξίσωση του Schrödinger για κάθε x, με ενέργεια $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.
Τα $H_n(\sqrt{\alpha}x)$ είναι πολυώνυμα του $\sqrt{\alpha}x$ άρτια ή περιττά ανάλογα με το n.
Άρα για $n=2k+1\Rightarrow H_{2k+1}(\sqrt{\alpha}x)=$ πολυώνυμο περιττού βαθμού.

$$\Rightarrow H_{2k+1}(x=0)=0$$

$$\Rightarrow \Psi_k(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ c_{2k+1}e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}H_{2k+1}(\sqrt{\alpha}x) & ,x>0\end{cases}$$

$$E_k=(2k+\frac{3}{2})\hbar\omega,\quad k=0,1,2,\ldots$$

Ελάχιστη ενέργεια:

$$E_0=\frac{3}{2}\hbar\omega$$