

ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική II

Κανονική εξέταση χειμερινού εξαμήνου, 08/06/2007.

Διδάσκων Κ. Φαράκος

Θέμα I. Σωματίο μάζας m κινείται στο δυναμικό $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ 0 & -a < x < -b \\ V_0 & -b < x < b \\ 0 & b < x < a \\ \infty & x > a \end{cases} \quad \text{όπου } a, b \text{ θετικές σταθερές, } V_0 > 0.$$

Ζητείται να υπολογισθεί η ενέργεια E και το V_0 , έτσι ώστε η ιδιοσυνάρτηση $\psi(x)$ της Χαμιλτονιανής να ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{d\psi(x)}{dx} = 0$ για $-b < x < b$.

Θέμα II. Ένας διδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται από την

$$\text{Χαμιλτονιανή: } H_0 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

(α) Να δοθεί μία γενική έκφραση για τις ενεργειακές στάθμες της H_0 , και να βρείτε τον εκφυλισμό τους.

(β) Να εκφράσετε την κυματοσυνάρτηση του συστήματος για την θεμελιώδη στάθμη και την πρώτη διεγερμένη σαν συνάρτηση των κυματοσυναρτήσεων ψ_k του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

(γ) Εάν το σύστημα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi = Nxe^{-br^2} e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

όπου N θετική σταθερά. Να προσδιοριστούν οι σταθερές E και b .

(δ) [ακόμα 10 βαθμοί] Εάν το σύστημα έχει ενέργεια $E = 2\hbar\omega$ και προστεθεί μία ασθενής διαταραχή της μορφής $V(x) = ax^4$, $a > 0$, ο εκφυλισμός αίρεται. Να βρείτε τις νέες ενεργειακές στάθμες του συστήματος.

Υπόδειξη, να τις εκφράσετε σαν συνάρτηση των ποσοτήτων:

$$V_0 = \int dq \psi_0^*(q) q^4 \psi_0(q) \quad \text{και} \quad V_1 = \int dq \psi_1^*(q) q^4 \psi_1(q)$$

χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

Θέμα III. (α) Εάν η ολική στροφορμή J ενός συστήματος είναι $J = L + S$, άθροισμα δηλαδή τροχιακής στροφορμής και spin, να υπολογίσετε τον μεταθέτη $[J^2, J_z]$, χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις μετάθεσης για την τροχιακή στροφορμή και το spin.

(β) Η Χαμιλτονιανή ενός περιστρεφόμενου συστήματος δίνεται από την σχέση

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_2}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας.

Εάν $I_1 = 5I_2$, ποιός είναι ο εκφυλισμός της τρίτης στάθμης;

Θέμα IV. Σωματίο μάζας m κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού $V(r)$

$$\text{όπου, } V(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ V_0 & a < r \end{cases} .$$

(α) Γράψτε την Χαμιλτονιανή του συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.

(β) Προσδιορίστε το V_0 έτσι ώστε το σύστημα να έχει μόνο μία δέσμια κατάσταση.

Θέμα V. Η κυματοσυνάρτηση του spin ενός ηλεκτρονίου είναι $\Psi = C\chi_+ + 2C\chi_-$

όπου οι συναρτήσεις χ_+ και χ_- είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της z συνιστώσας του spin και C μία σταθερά κανονικοποίησης. Έστω ότι μετράμε το spin του σωματιδίου στην κατεύθυνση ενός άξονα \mathbf{n} που αντιστοιχεί στον τελεστή

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(s_x + \sqrt{2}s_y), \text{ όπου } s_x \text{ και } s_y \text{ οι τελεστές του spin στις διευθύνσεις } x, y$$

αντίστοιχα. (α) Τι τιμές θα βρούμε για το spin του σωματιδίου σε αυτήν την κατεύθυνση; (β) Ποιά είναι η πιθανότητα να βρούμε κάθε μία από τις τιμές αυτές;

$$\text{Δίνονται: } s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες. Με κλειστά βιβλία. Το κάθε θέμα παίρνει 25 μονάδες. Άριστα το 100.