

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

1

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων, Συμπλήρωμα.

Άσκηση 94

(a) η συνάρτηση $F = F(r, \theta, \varphi)$ μετατίθεται με
τους τρεις τελεστές L_x, L_y και L_z
της σφαιρικής.

$[L_k, F]\psi = 0$ για κάθε συνάρτηση ψ

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_k(F\psi) - F(L_k\psi) &= (L_k F)\psi + F(L_k\psi) - FL_k\psi = \\ &= (L_k F)\psi = 0 \Rightarrow L_k F = 0 \quad \forall k=1,2,3 \end{aligned}$$

$$L_1 = L_x, L_2 = L_y, L_3 = L_z$$

Οι τελεστές L_k είναι γραμμικοί και έχουν παραστάση ως προς θ, φ μόνο πρώτης τάξης.

$$\Rightarrow L_z F = 0 \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow F = F(r, \theta) \text{ μόνο}$$

$$L_x F = 0 \Rightarrow -i\hbar \left(-\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos\varphi \cot\theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) F(r, \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow F = F(r).$$

Δεύτερη απόδειξη: $L_k F = 0 \quad \forall k \Rightarrow \hat{L}^2 F = 0$

Για σταθερό r η συνάρτηση $F(r, \theta, \varphi)$ αναπτύσσεται σε σειρά ως προς τις σφαιρικές αρμονικές $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(r)} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\hat{L}^2 F = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(r)} \hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(r)} l(l+1) \hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

Οι συναρτήσεις Y_{lm} είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και γραμμικά ανεξάρτητες

⇒ $B_{lm} = 0$ όταν $l \geq 1$, $\forall m$.

⇒ $F(r, \theta, \varphi) = B_{00}(r) Y_{00}(\theta, \varphi)$, $Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

(b) Έστω $L_x F(\vec{r}) = 0$

Συνήθως το πηλίκο ούσωνα πυροσταθίων σφαιροσυναρτήσεων

\hat{L}^2 και L_x , $[\hat{L}^2, L_x] = 0$, με κλασσική ανάλυση

της $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ όπου φ είναι γωνία των \vec{r} των μερών από τον άξονα των x και των αξιωματικών γωνία θ στο επίπεδο (x, z) , δηλαδή γύρω από τον άξονα x :

⇒ $L_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$. $L_x F = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$

Δηλαδή η συνάρτηση F δεν εξαρτάται από την αξιωματική γωνία φ γύρω από τον άξονα των x ⇒ έχουμε αξιωματική συμπεριφορά γύρω από τον άξονα x .

Ausgabe 10:

$$(a) \quad \chi_{22} = \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} = A_{22} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$$

$$L_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_{\pm} = L_x \pm i L_y = \pm \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\text{Man } L_{\pm} \chi_{\ell m} = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} \chi_{\ell, m \pm 1}$$

$$L_- \chi_{22} = \hbar \cdot 2 \chi_{21}$$

$$L_- \chi_{22} = -\hbar e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial \chi_{22}}{\partial \theta} - i \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \chi_{22}}{\partial \varphi} \right)$$

$$= -\hbar e^{-i\varphi} A_{22} \left[2 \sin \theta \cos \theta - i (2i) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \sin^2 \theta \right] e^{2i\varphi}$$

$$= -\hbar \cdot 4 A_{22} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} = 2\hbar \chi_{21}$$

$$\Rightarrow \chi_{21} = -2 A_{22} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$$

$$L_- \chi_{21} = \hbar \sqrt{6} \chi_{20}$$

$$L_- \chi_{21} = -\hbar e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial \chi_{21}}{\partial \theta} - i \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \chi_{21}}{\partial \varphi} \right)$$

$$= -\hbar e^{-i\varphi} A_{21} \left[\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - i \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \sin \theta \cos \theta (i) \right] e^{i\varphi}$$

(4)

$$L \cdot Y_{21} = -\hbar A_{21} (3 \cos^2 \theta - 1) = \hbar \sqrt{6} Y_{20}$$

$$\Rightarrow Y_{20} = -\frac{A_{21}}{\sqrt{6}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{768\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

(b) όμοια Σπύρρα με τον Lt σαν

$$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \rightarrow Y_{2,-1} \text{ και } Y_{20}.$$

Άσκηση 1/4 :

$$\psi(\vec{r}) = c r e^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta, \quad V(r) = \frac{\delta}{r}$$

(a) Συνομοίει l των συστήματων?

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 \psi(\vec{r}) &= -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\} \\ &= -\hbar^2 c r e^{-\frac{r}{2a}} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) (-1) \right\} \end{aligned}$$

$$= \hbar^2 c r e^{-\frac{r}{2a}} \frac{2}{\sin \theta} \sin \theta \cos \theta = 2\hbar^2 \psi \rightarrow l=1.$$

$$\hat{L}^2 \psi = \hbar^2 l(l+1) \psi.$$

(b) + (γ) $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(r) \psi = E \psi (\psi, \theta, \varphi).$

$$-\hbar^2 \nabla^2 \psi = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2 \psi}{r^2}$$

(5)

Άρα η εξίσωση των Schroedinger γίνεται:

$$-\frac{\hbar^2}{2mV^2} \frac{d}{dr} \left(V^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{2\hbar^2 \psi}{2mV^2} + \frac{\psi}{V} = E\psi$$

Κάνουμε τις παραγωγίες:

$$\frac{1}{V^2} \frac{d}{dr} \left(V^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = \cos\theta \left\{ \frac{2}{V} e^{-\frac{V}{2a}} - \frac{4}{2a} e^{-\frac{V}{2a}} + \frac{V}{4a^2} e^{-\frac{V}{2a}} \right\}$$

$$= \frac{2}{V^2} \psi - \frac{2}{Va} \psi + \frac{1}{4a^2} \psi$$

$$\Rightarrow -\frac{2\hbar^2}{2mV^2} \psi + \frac{2\hbar^2}{2maV} \psi - \frac{\hbar^2}{8ma^2} \psi + \frac{2\hbar^2}{2mV^2} \psi + \frac{\psi}{V} =$$

$$= E\psi$$

Εξισώνοντας όμοιας όμοια έχουμε:

$$\begin{cases} E = -\frac{\hbar^2}{8ma^2} & (\text{ζάζμε } V^0 = 1) \\ r = -\frac{\hbar^2}{Va} & (\text{ζάζμε } \frac{1}{V}) \end{cases}$$

Άσκηση 12.4 :

$$\psi(\vec{r}_0) = 2c \psi_{211}(r, \theta, \varphi) + c \psi_{22,-1}(r, \theta, \varphi)$$

Γενικά ισχύει $\psi_{l m} = R_{l m}^{(r)} Y_{l m}(\theta, \varphi)$ και

$$H \psi_{l m} = E_n \psi_{l m} .$$

(a) κανονικοποιουν

$$\int \Psi(\vec{r})^* \Psi(\vec{r}) d^3x = 1$$

$$\int \Psi(\vec{r})^* \Psi(\vec{r}) d^3x = 4|c|^2 \int \Psi_{211}^* \Psi_{211} d^3x + |c|^2 \int \Psi_{32,-1}^* \Psi_{32,-1} d^3x + 2|c|^2 \int \Psi_{211}^* \Psi_{32,-1} d^3x + 2|c|^2 \int \Psi_{32,-1}^* \Psi_{211} d^3x$$

$$= 4|c|^2 + |c|^2 + 0 + 0 = 5|c|^2$$

$$\Rightarrow |c|^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \Psi_{211} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}} \Psi_{32,-1}$$

$$(b) \hat{L}_z \Psi_{nlm} = \hbar m \hat{L}_z \Psi_{nlm} = m \hbar \Psi_{nlm}$$

→ διαφέρει την τιμή του L_z $2\hbar$ (+1) και $2\hbar$ (-1).

$$(c) \langle \hat{L}^2 \rangle = \int \Psi(t)^* \hat{L}^2 \Psi(t) d^3x$$

$$\hat{L}^2 \Psi(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \hat{L}^2 \Psi_{211} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}} \hat{L}^2 \Psi_{32,-1} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} (2\hbar^2) \Psi_{211} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}} (6\hbar^2) \Psi_{32,-1}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{L}^2 \rangle = (2\hbar^2) \frac{4}{5} + (6\hbar^2) \frac{1}{5} = \frac{14}{5} \hbar^2$$

$$\hat{L}^2 \Psi_{nlm} = \hbar^2 l(l+1) \Psi_{nlm}$$