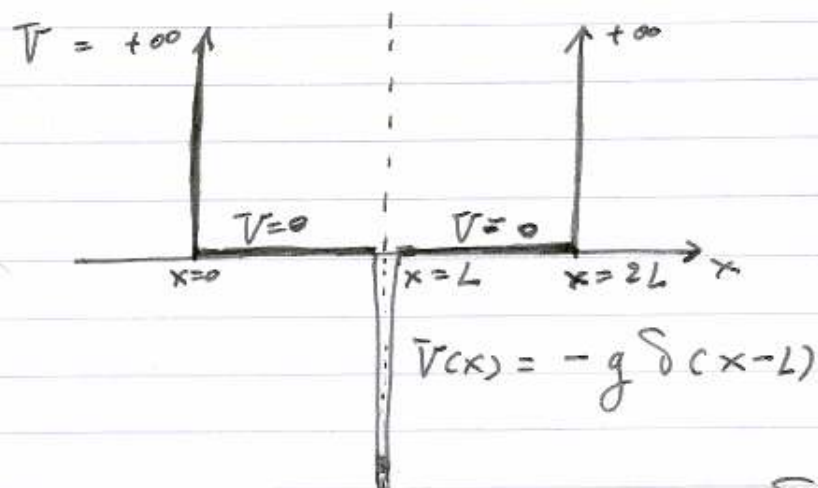


(1)

# Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

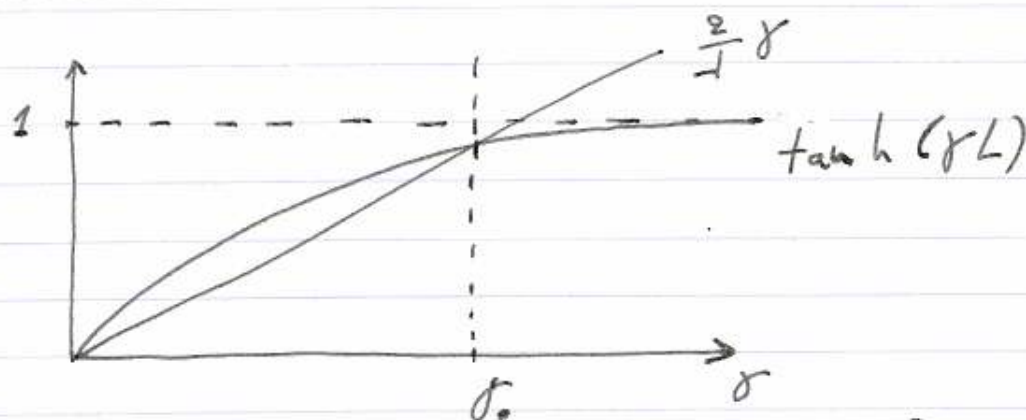
Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων, Συμπλήρωμα.

## Σχήμα 1 (Άσκηση 5)



Γραφική Παράσταση των δυναμικών.

## Σχήμα 2 (Άσκηση 5)



σημείο τομής των δύο συναρτήσεων.

Γραφική Παράσταση των δύο συναρτήσεων  
και η γραφική λύση.

Άσκηση 14: Αρμονικός Ταλαντωτής στη  
πρώτη διεγερμένη κατάσταση έχει ενέργεια  
ίσου με  $E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$

και κυματοσυνάρτηση:  $\psi_1(x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} (2a)^{1/2} x e^{-ax^2/2}$   
όπου  $a = \frac{m\omega}{\hbar} \Rightarrow \psi_1(x) = A x e^{-ax^2/2}$ .

(i) Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας των ορμών.

$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x) \psi_1(x) dx$ ,  $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{iPx/\hbar}$

$\Rightarrow \Phi(p) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{2a}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2/2} e^{-iPx/\hbar} dx$

ισχύει:  $I_0(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}$

$\frac{dI_0}{db} = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2+bx} dx = \frac{b}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}$

όπου  $b = -\frac{iP}{\hbar}$ ,  $a = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \Phi(p) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{2a}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} \left(\frac{-iP}{\hbar a}\right) e^{-\frac{P^2}{2\hbar^2 a}}$

$\Phi(p) = -i \underbrace{\left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{2}{\hbar a}\right)^{1/2}}_B \left(\frac{P}{\hbar\sqrt{a}}\right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{P}{\hbar\sqrt{a}}\right)^2}$

ορίζουμε  $k = \frac{P}{\hbar\sqrt{a}} \Rightarrow \Phi(k) = -i B k e^{-\frac{k^2}{2}}$ .

(3)

(ii) Πιθανότητα να βρεθεί σταγονίδια με  
ορμή σε κλασικά απαγορευμένη περιοχή.

$$E_1 = \frac{P^2}{2m} + V(x), \quad E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$$

Κλασικά έχουμε την μέγιστη ορμή για  $x=0$

$$V(x=0)=0 \Rightarrow E_1 = \frac{P_1^2}{2m} \Rightarrow P_1^2 = 2mE_1 = 3m\hbar\omega$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{3m\hbar\omega}$$

$$P_{>} (|P| \geq P_1) = 2 \int_{P_1}^{\infty} \Phi^*(P) \Phi(P) dP$$

η πιθανότητα που ζητάμε.

$$P_{>} = 2 \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\hbar a}\right) \int_{k_1}^{\infty} k^2 e^{-k^2} dk (\sqrt{a} \hbar)$$

$$\text{όπου } k_1 = \frac{P_1}{\hbar a} = \frac{\sqrt{3m\hbar\omega}}{\hbar \sqrt{m\omega}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P_{>} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{3}}^{\infty} k^2 e^{-k^2} dk \approx 0.11161$$

Άσκηση 24 Ο τελεστής  $A = XP + PX$  είναι  
ερμιτικός

$$A^\dagger = (XP + PX)^\dagger = PX + XP = A$$

Τότι οι τελεστές  $X$  και  $P$  είναι ερμιτικοί.

(4)

$$\text{από την } [x, P] = i\hbar \Rightarrow xP - Px = i\hbar$$

$$\Rightarrow A = xP + Px = 2Px + i\hbar$$

$$\begin{aligned} \langle n | (xP + Px)^2 | n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* (xP + Px)(xP + Px) \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* A A \psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} (A \psi_n)^* (A \psi_n) dx \end{aligned}$$

υπολογίζουμε την δράση του  $A$  στον  $\psi_n$   
χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των άσκησης 3.

$$x \psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \psi_{n-1} + \sqrt{n+1} \psi_{n+1})$$

$$Px \psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n} P \psi_{n-1} + \sqrt{n+1} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} P \psi_{n+1} =$$

$$= (-i\hbar) \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n} (\sqrt{n-1} \psi_{n-2} - \sqrt{n} \psi_n)$$

$$+ (-i\hbar) \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n+1} (\sqrt{n+1} \psi_n - \sqrt{n+2} \psi_{n+2})$$

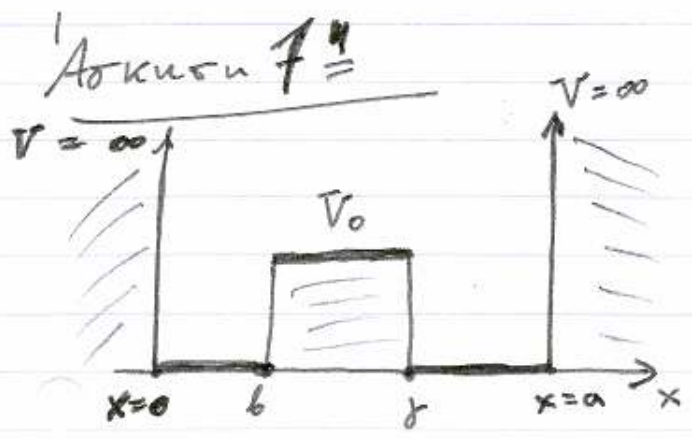
$$= (-i\hbar) \frac{1}{2} (\sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} - n \psi_n + (n+1) \psi_n - \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2})$$

$$Px \psi_n = \frac{-i\hbar}{2} (\sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} + \psi_n - \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2})$$

$$\Rightarrow A \psi_n = (2Px + i\hbar) \psi_n = (-i\hbar) (\sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} - \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle n | (P_x + xP)^2 | n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (A\psi_n)^* (A\psi_n) dx = \\ &= (-i\hbar)^* (-i\hbar) \left[ n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n-2}^* \psi_{n-2} dx + (n+1)(n+2) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+2}^* \psi_{n+2} dx \right] \\ &= \hbar^2 [n(n-1) + (n+1)(n+2)] = \hbar^2 (n^2 + 3n + 2). \end{aligned}$$

Διότι  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^* \psi_k dx = 1$  και  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^* \psi_l dx = 0$   
όπου  $k \neq l$



Πόσες είναι οι ανεξάρτητες διακριτές για  $0 < x < a$ .

Θεωρούμε το  $V(x) = V_0$  για  $b < x < r$  και διακριτά.

$$\psi_n^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad E_n^{(0)} = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Διόρθωση στην ενέργεια σε πρώην τάξη της θεωρίας διαταραχών:  $E_n = E_n^{(0)} + W_n$

$$\begin{aligned} W_n = V_{nn} &= \langle n | V(x) | n \rangle = \int_0^a \psi_n^{(0)*} V(x) \psi_n^{(0)} dx = \\ &= \frac{2V_0}{a} \int_b^r \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \end{aligned}$$

(6)

$$\int \sin^2 kx \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2kx}{4k}$$

$$\Rightarrow W_n = \frac{2V_0}{a} \left\{ \frac{r-b}{2} + \frac{a}{4n\pi} \left[ \sin\left(\frac{2n\pi b}{a}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi r}{a}\right) \right] \right\}$$

$$W_n = V_0 \frac{r-b}{a} + \frac{V_0}{2n\pi} \left[ \sin \frac{2n\pi b}{a} - \sin \frac{2n\pi r}{a} \right]$$

$$W_n = V_0 \frac{r-b}{a} - \frac{V_0}{n\pi} \cos\left(n\pi \frac{r+b}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{r-b}{a}\right)$$

Κυριακού συνάρτηση σε πρώτη τάξη του  $\theta$ . Δ. :

$$\Phi_n = \Psi_n^{(0)} + \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \Psi_k^{(0)}$$

$$E_n^{(0)} - E_k^{(0)} = (n^2 - k^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2} \cdot$$

$$V_{kn} = 2 \frac{V_0}{a} \int_b^r \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad k \neq n$$

$$\int_b^r \sin p x \sin q x \, dx = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} \Big|_b^r - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} \Big|_b^r$$

$$V_{kn} = \frac{V_0}{n(k-n)} \left[ \sin\left(n(k-n)\frac{r}{a}\right) - \sin\left(n(k-n)\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$- \frac{V_0}{n(k+n)} \left[ \sin\left(n(k+n)\frac{r}{a}\right) - \sin\left(n(k+n)\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$V_{kn} = \frac{2V_0}{n(k-n)} \cos\left(n(k-n)\frac{r+b}{a}\right) \sin\left(n(k-n)\frac{r-b}{a}\right)$$

$$- \frac{2V_0}{n(k+n)} \cos\left(n(k+n)\frac{r+b}{a}\right) \sin\left(n(k+n)\frac{r-b}{a}\right) \cdot$$