Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων, Συμπλήρωμα.

Άσκηση 5η:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$ η Χαμιλτονιανή

$H\Phi_n = E_n \Phi_n$ και $H\Phi_m = E_m \Phi_m$, $E_n \neq E_m$

και E_n, E_m πραγματικοί αριθμοί διότι η H είναι ερμιτιανός τελεστής.

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \Phi_n^* H \Phi_m \, dx = E_m \int \Phi_n^* \Phi_m \, dx \\ \int \Phi_n^* H \Phi_m \, dx = \int (H\Phi_n)^* \Phi_m \, dx = E_n^* \int \Phi_n^* \Phi_m dx = E_n \int \Phi_n^* \Phi_m \, dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow (E_m - E_n) \int \Phi_n^* \Phi_m \, dx = 0 \quad \Rightarrow \int \Phi_n^* \Phi_m \, dx = 0$$

2

Άσκηση 12η:

Θα δουλέψουμε στην μία διάσταση, η απόδειξη "εύκολα" γενικεύεται στις τρεις διαστάσεις.

Κάνουμε ανάπτυξη της κυματοσυνάρτησης στον χώρο των ορμών

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \Phi(p,t)\, dp$$

ισχύει: $$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')\frac{x}{\hbar}} = \delta(p-p')$$

ακόμη $$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\,dx = \int_{-\infty} \Phi^*(p,t)\Phi(p,t)\,dp$$

δηλαδή η συνάρτηση Φ είναι κανονικοποιημένη εάν η συνάρτηση Ψ είναι κανονικοποιημένη

$$\Phi(p \to \pm\infty, t) \to 0 .$$

Ακόμη υποθέτουμε ότι η δυναμική ενέργεια $V(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του x.

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x)\right]\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} (i\hbar)\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d^2}{dx^2}e^{i\frac{px}{\hbar}}\right]\Phi\, dp$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, V(x)\, e^{i\frac{px}{\hbar}}\,\Phi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty} dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}}\left\{i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}\Phi\right\}dp = \int_{-\infty}^{\infty} dp\left[V\left(-i\hbar\frac{d}{dp}\right)e^{i\frac{px}{\hbar}}\right]\Phi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}}\left[V\left(i\hbar\frac{d}{dp}\right)\Phi\right]$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \left[V\left(-i\hbar \frac{d}{dp}\right) e^{i\frac{px}{\hbar}} \right] \Phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} \left[V\left(i\hbar \frac{d}{dp}\right) \Phi(p) \right]$$

π.χ. για $V(x) = x$

$$-i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{d}{dp} e^{i\frac{px}{\hbar}}\right) \Phi(p) = (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dp}\left(e^{i\frac{px}{\hbar}} \Phi(p)\right) dp - (-i\hbar) \int e^{i\frac{px}{\hbar}} \frac{d\Phi}{dp}\, dp$$

$$= (-i\hbar)\, e^{i\frac{px}{\hbar}} \Phi(p) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} \left(i\hbar \frac{d\Phi}{dp}\right)$$

$$= 0 + \int dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} \left(i\hbar \frac{d\Phi}{dp}\right)$$

ο τελεστής της θέσης στην αναπαράσταση των ορμών είναι $x = i\hbar \frac{d}{dp}$.

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \Phi + V\left(i\hbar \frac{d}{dp}\right) \Phi$$

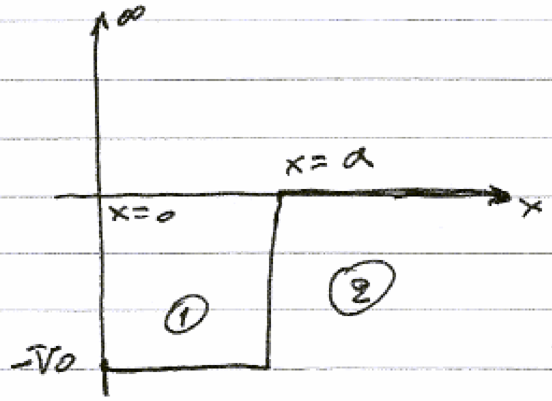
$$\frac{d^2}{dx^2} e^{i\frac{px}{\hbar}} = \frac{i^2 p^2}{\hbar^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}$$

$$V(x)\, e^{i\frac{px}{\hbar}} = V\left(-i\hbar \frac{d}{dp}\right) e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων, Συμπλήρωμα.

Άσκηση 10η:



$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{για } x<0 \\ -V_0 & \text{για } 0<x<a,\ V_0>0 \\ 0 & \text{για } x>0 \end{cases}$$

$$-V_0 < E < 0 \quad , \quad E = -|E|$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi$$

περιοχή 1: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_1'' - V_0\psi_1 = E\psi_1$ και $\psi_1(0)=0$

$$\Rightarrow \psi_1'' = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0 - |E|\right)\psi_1 = k_1^2\psi_1$$

όπου $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|)$ η λύση της εξίσωσης η οποία ικανοποιεί αυτόματα την συνθήκη $\psi_1(x=0)=0$ είναι $\psi_1(x) = A\sin k_1 x$

περιοχή 2: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_2'' = E\psi_2 \Rightarrow \psi_2'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_2$

$$\Rightarrow \psi_2'' = \frac{2m|E|}{\hbar^2}\psi_2 = k_2^2\psi_2 \quad \text{και} \quad \psi_2(x\to\infty)\to 0$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = Be^{-k_2 x} \quad \text{όπου} \quad k_2^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

Συνοριακές Συνθήκες:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a) \Rightarrow A\sin k_1 a = Be^{-k_2 a}$$

$$\psi_1'(a) = \psi_2'(a) \Rightarrow k_1 A\cos k_1 a = -k_2 B e^{-k_2 a}$$

διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$\tan k_1 a = -\frac{k_1}{k_2}$ από την λύση αυτής της εξίσωσης βρίσκουμε το E.

Γραφική λύση: ορίζουμε $z = k_1 a$ και $z_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}\, a$

$\Rightarrow \tan k_1 a = \tan z$

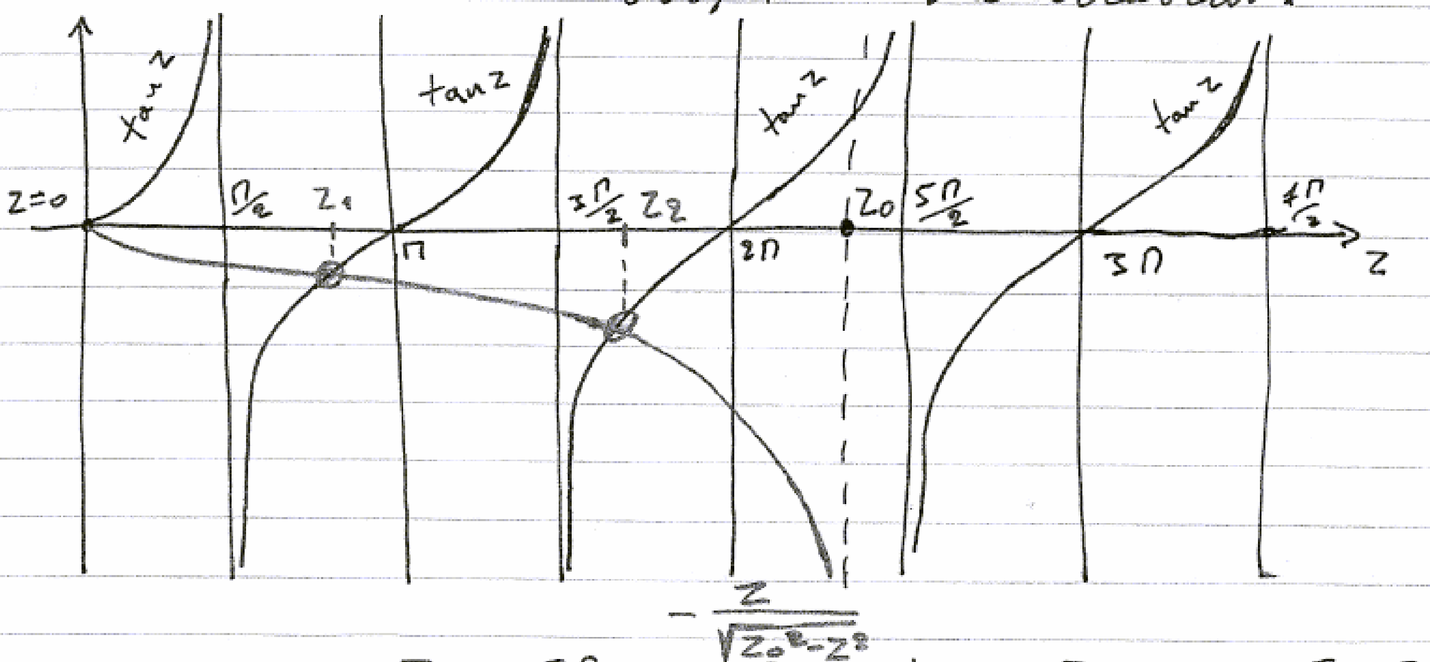
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_1 a}{k_2 a} = \sqrt{\frac{k_1^2 a^2}{k_2^2 a^2}} = \sqrt{\frac{z^2}{z_0^2 - z^2}}$$

διότι $k_2^2 a^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2} a^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2} a^2 \pm \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2 =$

$$= \left(\frac{2m|E|}{\hbar^2} a^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2\right) + \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2 = -k_1 a^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2$$

$$\Rightarrow \tan z = -\frac{z}{\sqrt{z_0^2 - z^2}}$$

και κάνουμε γραφική παράσταση των δύο μελών, τα σημεία τομής δίνουν τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων.



για $\frac{3\pi}{2} < z_0 \le \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$ δύο λύσεις $z_1, z_2 \Rightarrow E_1, E_2$