ΕΜΠ-ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ-ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κεφάλαιο Ι
(Μαθηματικές Εφαρμογές, Κινηματική)

Α.1 Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σώματος με μάζα 100kg είναι $r(t) = 16t\hat{x} + 25t^2\hat{y} + 33\hat{z}$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθούν: α) η ταχύτητα του σώματος και η επιτάχυνσή του. β) η ορμή του και η δύναμη που ασκείται στο σώμα. γ) η στροφορμή του $\vec{\mathbf{L}} \equiv m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$ και η ροπή της δύναμης $\vec{\mathbf{N}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ ως προς την αρχή των αξόνων

Α.2 Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 3\sin 5t$, $y(t) = 4\cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθούν:
(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Α.3 (α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z) = 3x^2y + \dfrac{y}{z}$ υπολογίστε τις παραγώγους $\partial_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x}, \partial_y f, \partial_z f, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ ως προς x, y, z.
(β) Ομοίως για την συνάρτηση $g = \dfrac{1}{r}$ όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Α.4 Το πλάτος εξαναγκασμένου ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση: $A(\omega) = 1/\sqrt{(1+2\omega^2+\omega^4)}$. Έστω ότι ω=1, αλλά για κάποιο λόγο συμβαίνει μια μικρή αλλαγή κατά δω = +0.01. Πόση θα είναι η αλλαγή στο Α(ω);

Α.5 Κιβώτιο μάζας *m* είναι δεμένο με σκοινί το οποίο περνάει από τροχαλία η οποία είναι σε ύψος *H* πάνω από το κιβώτιο. Το άλλο άκρο του σκοινιού είναι δεμένο σε αυτοκίνητο το οποίο κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα v_0. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το κιβώτιο είναι στο έδαφος και το αυτοκίνητο βρίσκεται δίπλα στο κιβώτιο. (α) Βρείτε την ταχύτητα *v* με την οποία κινείται κατακόρυφα το κιβώτιο σαν συνάρτηση της θέσης *x* του αυτοκινήτου. (β) Βρείτε την επιτάχυνση *a* του κιβωτίου σαν συνάρτηση του *x*. (γ) Βρείτε την οριακή τιμή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Α.6 Δύο χάντρες *A* και *B* συνδέονται με μία συμπαγή ράβδο μήκους *L*. Τα δύο σώματα ολισθαίνουν κατά μήκος δύο κάθετων αξόνων *x* και *y* αντίστοιχα. Αν η χάντρα *A* ολισθαίνει προς τα αριστερά δηλαδή προς την αρχή *O* των δύο αξόνων με σταθερή ταχύτητα v_0, βρείτε την ταχύτητα της *B* όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta=30^0$, 45^0 , 60^0 με τον άξονα των *x*.

Α.7 (α) Μέλισσα πλησιάζει στην κυψέλη της ακολουθώντας σπειροειδή τροχιά που περιγράφεται από τις εξισώσεις $r=b-ct$ και $d\theta/dt=-kt$, σε πολικές συντεταγμένες. Υπολογίστε την ταχύτητά της ως συνάρτηση του χρόνου. (β) Όταν φεύγει από την κυψέλη ακολουθεί τροχιά που περιγράφεται από τις σχέσεις $r=be^{at}$ και $\theta=\omega t$. Δείξτε ότι η γωνία ταχύτητας και επιτάχυνσης παραμένει σταθερή με το χρόνο.

Α.8 Δύο σωματίδια με μάζες *m* και *2m*, κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (3t+2t^2)\hat{\mathbf{x}} + (4+4t^2)\hat{\mathbf{y}} + (5+2t)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{r}}_2 = (20-t-t^2)\hat{\mathbf{x}} + (10+9t-2t^2)\hat{\mathbf{y}} + (1+4t)\hat{\mathbf{z}}$$

αντίστοιχα, όπου t = χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).
(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό. Απ.: $\tau = 2\,\mathrm{s}$

(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα; Απ.: $\vec{\mathbf{F}}_{o\lambda} = \mathbf{0}$

(γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι; Απ.: $\vec{\mathbf{P}}_{o\lambda} = m(\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}})$

(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{3}(40\hat{\mathbf{x}} + 24\hat{\mathbf{y}} + 7\hat{\mathbf{z}}) + \frac{1}{3}t(\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}})$

Α.9 Σώμα μάζας *m* κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος: $x = 3a\sin\omega t$, $y = 4a\sin\omega t$, $z = 5a\cos\omega t$, όπου t = χρόνος, και ω και a είναι θετικές σταθερές. Αποδείξετε ότι η τροχιά είναι επίπεδη, δείχνοντας ότι σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3, τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3$ είναι συνεπίπεδα. Συνθήκη: $\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) = 0$. Ποιό είναι το σχήμα της τροχιάς;

Α.10 Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a\cos(\omega t), \qquad y = a\sin(\omega t), \qquad z = bt^2,$$

όπου t είναι ο χρόνος, και a, b και ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$, η ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ και η επιτάχυνση $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

(β) Αν Κ είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{c}} = z\hat{\mathbf{z}} = bt^2\hat{\mathbf{z}}$, και $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{c}}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο Κ στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\mathbf{R}}$ και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο Κ ή τον άξονα των z είναι σταθερή.

(γ) Βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξετε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο Κ, και μία σταθερή στην κατεύθυνση z. Απ.: $\vec{\mathbf{F}} = -m\omega^2 R\hat{\mathbf{R}} + 2mb\,\hat{\mathbf{z}}$

(δ) Υπολογίστε τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη, $P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, και δείξτε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στην κατεύθυνση z. Απ.: $P = 4mb^2 t$

Α.11 Δίνεται ότι: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$ για κάθε x. Να υπολογιστεί η τιμή του $e^{0,1}$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Πόσο είναι το σφάλμα στο $e^{0,1}$ αν υποθέσουμε ότι είναι α) $e^x \approx 1 + x$ β) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

Α.12 Εστω ότι το διάνυσμα θέσης ενός κινητού περιγράφεται από τη συνάρτηση $\bar{r} = \bar{r}(t)$ και ότι s είναι το μήκος της τροχιάς, όπως το μετράμε με αφετηρία κάποιο σημείο αναφοράς της τροχιάς. Ορίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{T}, \hat{N}$, το μεν $\hat{T}$ εφαπτομενικό στην τροχιά, κατά τη φορά της κίνησης, το δε $\hat{N}$ κάθετο στο $\hat{T}$ κατά τη φορά του $d\hat{T}/dt$ (ή του $d\hat{T}/ds$). Δείξτε ότι τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης γράφονται ως εξής: $\bar{v} = v\hat{T}$ και $\bar{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{T} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{N}$, όπου $\dfrac{1}{\rho} = k = \left|\dfrac{d\hat{T}}{ds}\right|$, η τοπική καμπυλότητα της τροχιάς και ρ η τοπική ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς. Οι δυο συνιστώσες της επιτάχυνσης είναι η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση, αντίστοιχα.

Α.13 Η ροπή μιας δύναμης ως προς το σημείο Ο ορίζεται ως $\vec{\mathbf{N}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$, όπου $\vec{\mathbf{r}}$ είναι το διάνυσμα από το Ο στο σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη Να δειχθεί ότι η ροπή δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων $\vec{\mathbf{F}}$ και $-\vec{\mathbf{F}}$ που ασκούνται στα σημεία $\vec{\mathbf{r}}_1$ και $\vec{\mathbf{r}}_2$ αντίστοιχα (ζεύγος δυνάμεων), είναι ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

Α.14 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών: $F = \mu v + (m_0 + \mu t)\frac{dv}{dt}$. Όπου F, μ και m_0 σταθεροί αριθμοί.

Α.15 (α) Έστω η συνάρτηση $f(r) = \frac{A}{r}$, εάν $r = R + h$ όπου $h << R$. Να γίνει ανάπτυξη της συνάρτησης σε σειρά Taylor γύρω από το R. (β) Να κάνετε ανάπτυξη των συναρτήσεων $\cos\theta$, $\sin\theta$ γύρω από το μηδέν και να δείξετε ότι ισχύει $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Α.16 Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
να δείξετε ότι ισχύει $A\cos\omega + B\sin\omega = x_0\sin(\omega+\phi) = x_0\cos(\omega+\theta)$. Υπολογίστε τις ποσότητες x_0, ϕ, θ.

Α.17 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dt} = y^3 t^2$ με αρχικές συνθήκες $t = 0, y = 1$.

Α.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = Ax^2 e^{-x/a}$ όπου A, a θετικές σταθερές. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης, που έχουμε ευσταθή ισορροπία και που έχουμε ασταθή ισορροπία; Να σχεδιαστεί πρόχειρα η καμπύλη *f(x)*. Ομοίως για την συνάρτηση $g(x) = (x^2 - b^2)^2$.

Α.19 Η γραμμική πυκνότητα λ (μάζα ανά μονάδα μήκους) μιας λεπτής ράβδου *ΑΒ* μήκους L δίνεται από την σχέση $\lambda(x) = \frac{2m}{L}(\frac{3}{2} + \frac{x}{L})$, όπου *x* η απόσταση από κέντρο (μέσον) *O* της ράβδου. Να υπολογίσετε τη μάζα *M* της ράβδου.

Α.20 (α) Να υπολογίσετε το μήκος της περιφέρειας και το εμβαδόν ενός δίσκου ακτίνας *R*. (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας *R* καθώς και τον όγκο της.